Periyodik Lineer Sistemler

A, $n \times n$ türünde bir matris olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{1}$$

lineer sistemini ele alalım. Bu bölümde (1) sistemi hangi koşullar altında periyodik çözümlere sahiptir sorusuna cevap arayacağız.

Teorem 1. (1) sisteminin w periyotlu sıfırdan farklı bir periyodik çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul

$$I - e^{Aw}$$

matrisinin singüler olmasıdır, burada I, $n \times n$ türünde birim matristir.

Örnek 1.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases} \tag{2}$$

sistemini çözmeden (a) $\dfrac{\pi}{2}$, (b) 2π periyotlu periyodik çözümü var mıdır araştırınız.

Çözüm.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

olup, önceki bölümlerde açıklanan yöntemler yardımıyla

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

olarak hesaplanır.

(a) $w = \dfrac{\pi}{2}$ olsun. Bu durumda

$$I - e^{Aw} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olup $\det(I - e^{Aw}) \neq 0$ dır. O halde Teorem 1 den (2) sisteminin $w = \dfrac{\pi}{2}$ periyotlu periyodik bir çözümü yoktur.

(b) $w = 2\pi$ olsun. Bu durumda

$$I - e^{Aw} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olup $\det(I - e^{Aw}) = 0$ olduğundan (2) sisteminin $w = 2\pi$ periyotlu periyodik bir çözümü vardır.

Şimdi A, $n \times n$ türünde bir sabit matris ve f, $(-\infty, \infty)$ üzerinde tanımlı sürekli vektör değerli bir fonksiyon olmak üzere homogen olmayan lineer

$$x' = Ax + f(t) \tag{3}$$

sistemine göz önüne alalım.

Teorem 2. $f(t)$, w periyotlu periyodik bir fonksiyon olsun. Bu durumda (3) sisteminin bir $x(t)$ çözümünün w periyotlu periyodik bir fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul $x(0) = x(w)$ olmasıdır.

Teorem 3. $f(t)$, w periyotlu periyodik bir fonksiyon olsun. Bu durumda (3) sisteminin w periyotlu bir tek periyodik çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul (1) sisteminin w periyotlu periyodik çözümlere sahip olmamasıdır.

Şimdi değişken katsayılı lineer sistemler için temel sonuçlar ifade edilecektir.

$$x' = A(t)x \tag{4}$$

sistemini ele alalım, burada $A(t)$, $n \times n$ türünde bir sürekli matris olup, $-\infty < t < \infty$ için

$$A(t + w) = A(t)$$

olduğu kabul edilmektedir.

Teorem 4. $\Phi(t)$, (4) sisteminin bir temel matrisi olsun. Bu durumda $\Phi(t+w)$ matrisi de (4) sisteminin bir temel matrisidir.

Uyarı 1. $\Phi(t)$ ve $\Phi(t + w)$ temel matris olduklarından

$$\Phi(t + w) = \Phi(t)C$$

olacak şekilde singüler olmayan bir C sabit matrisi vardır. Singüler olmayan C matrisine karşılık olarak

$$C = e^{Rw}$$

olacak şekilde bir R matrisinin mevcut olduğu da bilinmektedir.

Teorem 5. $A(t+w) = A(t)$ olmak üzere $\Phi(t)$, (4) sisteminin bir temel matrisi olsun. Bu durumda

$$\Phi(t) = P(t)e^{Rt}, \quad -\infty < t < \infty,$$

olacak biçimde singüler olmayan ve w periyotlu periyodik bir $P(t)$ matrisi ve sabit bir R matrisi vardır.

Teorem 6. $P(t)$ ve R matrisleri Teorem 5 de tanımlandığı gibi olsunlar. Bu durumda $x = P(t)z$ dönüşümü değişken katsayılı lineer (4) sistemini sabit katsayılı

$$z' = Rz$$

sistemine indirger.

Sonuç 1. Değişken katsayılı lineer (4) sisteminin bir $\varphi(t)$ çözümünün

$$\varphi(t+w) = k\varphi(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

özelliğine sahip olması için gerek ve yeter koşul k sabitinin

$$\Phi(w) = C = e^{Rw}$$

matrisi için bir özdeğer olmasıdır. Burada $\Phi(t)$, (4) sisteminin $\Phi(0) = I$ koşulunu sağlayan bir temel matrisidir.