BÖLÜM-II: RELATİVİSTİK KİNEMATİK

4. Hız Dönüşümleri

S' ve S çerçeveleri standart şekillenimdeler (S' çerçevesi S çerçevesine göre $+x'$ yönünde sabit v hızı ile ilerliyor). Bir parçacığın S' ve S çerçevelerindeki hızları sırasıyla u' ve u olsun.

$$\vec{u} = \left(u_x, u_y, u_z\right) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

$$\vec{u}' = \left(u'_x, u'_y, u'_z\right) = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}\right)$$

$$dx' = \gamma(dx - v dt)$$
$$dy' = dy$$
$$dz' = dz$$
$$dt' = \gamma\,(dt - \frac{v}{c^2}dx)$$

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma\left(\frac{dt}{dt} - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right) = \gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right) \Rightarrow \frac{dt}{dt'} = \gamma^{-1}\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^{-1} \qquad (*)$$

- $$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma\left(dx - vdt\right)}{dt'} = \gamma\frac{dx}{dt'} - \gamma v\frac{dt}{dt'}$$
  $$= \gamma\frac{dx}{dt}\frac{dt}{dt'} - \gamma v\frac{dt}{dt}\frac{dt}{dt'}$$

$$= \gamma\frac{dt}{dt'}(u_x - v) \qquad (**)$$

(*), (**) da kullanılarak;

$$u'_x = \gamma\gamma^{-1}\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^{-1}(u_x - v) \Rightarrow \boxed{u'_x = \frac{(u_x - v)}{\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}}$$

- $$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dt'} = u_y\gamma^{-1}\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^{-1} \Rightarrow \boxed{u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}}$$

- Benzer şekilde;
  $$\boxed{u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}}$$

⇨ **Hız dönüşümlerinden elde edilen sonuçlar:**

I. $u_x << c$ ve $v << c$ için bu dönüşümler Galileo dönüşümlerine indirgenir. Bu durumda $\gamma \to 1$ olur ve $u'_x \approx u_x - v$

II. $u_x = c$ için $u'_x = c$ olmalı.

$$u'_x = \frac{(c-v)}{\left(1-\dfrac{vc}{c^2}\right)} = \frac{(c-v)}{\left(\dfrac{c-v}{c}\right)} = c$$

III. Ters dönüşümleri elde etmek için $v \rightarrow$ -v almak yeterlidir.

$$u_x = \frac{(u'_x + v)}{\left(1+\dfrac{vu'_x}{c^2}\right)} \qquad u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1+\dfrac{vu'_x}{c^2}\right)} \qquad u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left(1+\dfrac{vu'_x}{c^2}\right)}$$

5. İvme Dönüşümleri

Bir parçacık tekdüze (uniform) hareket etmiyorsa, sadece hızının nasıl dönüştüğünün değil, ivmesinin de nasıl dönüştüğünün bilinmesi yararlıdır. Burada ilk olarak hız diferansiyellerini hesaplayarak başlayalım:

$A \equiv \left(1-\dfrac{vu_x}{c^2}\right)$ olsun.

$$a_x = \frac{du_x}{dt} \quad a_y = \frac{du_y}{dt} \quad a_z = \frac{du_z}{dt}$$

$$a'_x = \frac{du'_x}{dt'} \quad a'_y = \frac{du'_y}{dt'} \quad a'_z = \frac{du'_z}{dt'}$$

$$du'_x = du_x A - (u_x - v)\left(\frac{-v}{c^2}\right) du_x / A^2$$

$$du'_x = \frac{du_x A + (u_x - v) v/c^2 du_x}{A^2} \qquad (1)$$

$$du'_y = \frac{du_y \gamma A + u_y \gamma v/c^2 du_x}{\gamma^2 A^2} \qquad (2) \qquad du'_z = \frac{du_z \gamma A + u_z \gamma v/c^2 du_x}{\gamma^2 A^2} \qquad (3)$$

⇨ $$dt' = \gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx) = \gamma dt\left(1-\frac{dx}{dt}\frac{v}{c^2}\right) = \gamma dt\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right) = \gamma A dt$$

$$dt' = \gamma A dt \qquad (4)$$

⇨ (1), (2) ve (3) denklemlerini sırasıyla (4) denklemine bölelim:

- $$\frac{du'_x}{dt'} = \frac{du_x A + (u_x - v) v/c^2 du_x}{A^2(\gamma A dt)} = \frac{A\dfrac{du_x}{dt} + (u_x - v)\dfrac{v}{c^2}\dfrac{du_x}{dt}}{A^3\gamma} = \frac{Aa_x}{A^3\gamma} + \frac{(u_x - v)\dfrac{v}{c^2}a_x}{A^3\gamma}$$

$$=\frac{Aa_x}{A^3\gamma}+\frac{u_x v a_x}{c^2 A^3\gamma}-\frac{v^2}{c^2}\frac{a_x}{A^3\gamma} \qquad \frac{v^2}{c^2}=\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}$$

v

$$\frac{u_x v}{c^2}=(1-A)$$

$$a_x^{'}=\frac{du_x^{'}}{dt^{'}}=\frac{Aa_x}{A^3\gamma}+(1-A)\frac{a_x}{A^3\gamma}-\left(\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}\right)\frac{a_x}{A^3\gamma}$$

$$=\cancel{\frac{Aa_x}{A^3\gamma}}+\cancel{\frac{a_x}{A^3\gamma}}-\cancel{\frac{Aa_x}{A^3\gamma}}-\cancel{\frac{\gamma^2 a_x}{A^3\gamma^3}}+\frac{a_x}{A^3\gamma^3} \qquad \Rightarrow \quad a_x^{'}=\frac{a_x}{A^3\gamma^3} \qquad (5)$$

- $$\frac{du_y^{'}}{dt^{'}}=\frac{du_y\gamma A+u_y\gamma v/c^2 du_x}{\gamma^2 A^2(\gamma A dt)}=\frac{\gamma A\frac{du_y}{dt}}{\gamma^3 A^3}+\frac{u_y\gamma\frac{v}{c^2}\frac{du_x}{dt}}{\gamma^3 A^3}$$

$$a_y^{'}=\frac{du_y^{'}}{dt^{'}}=\frac{\gamma A\frac{du_y}{dt}}{\gamma^3 A^3}+\frac{u_y\gamma\frac{v}{c^2}\frac{du_x}{dt}}{\gamma^3 A^3} \qquad \Rightarrow a_y^{'}=\frac{a_y}{\gamma^2 A^2}+\frac{u_y v a_x}{c^2\gamma^2 A^3} \qquad (6)$$

- $$\frac{du_z^{'}}{dt^{'}}=\frac{du_z\gamma A+u_z\gamma v/c^2 du_x}{\gamma^2 A^2(\gamma A dt)}=\frac{\gamma A\frac{du_z}{dt}}{\gamma^3 A^3}+\frac{u_z\gamma\frac{v}{c^2}\frac{du_x}{dt}}{\gamma^3 A^3}$$

$$a_z^{'}=\frac{du_z^{'}}{dt^{'}}=\frac{\gamma A\frac{du_z}{dt}}{\gamma^3 A^3}+\frac{u_z\gamma\frac{v}{c^2}\frac{du_x}{dt}}{\gamma^3 A^3} \qquad \Rightarrow a_z^{'}=\frac{a_z}{\gamma^2 A^2}+\frac{u_z v a_x}{c^2\gamma^2 A^3} \qquad (7)$$

⇨ Galileo dönüşümleri altında ivme invaryant iken Lorentz dönüşümleri altında bu geçerli değildir. İvme Lorentz dönüşümleri altında daha komplike bir yoldan dönüşmektedir.

Has ivme:

S ve $S^{'}$ çerçeveleri standart şekillenimdeler ve bir parçacığın $S^{'}$ çerçevesinden ölçülen hızı $\vec{u}^{'}=0$ olsun. Yani $S^{'}$ çerçevesi parçacığın anlık durgun bir çerçevesi olsun. Bu durumda hız dönüşümleri gereği $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)=(v,0,0)$ olur.

$$u_x^{'}=\frac{(u_x-v)}{\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)}=0 \quad \Rightarrow u_x=v$$

$$A=\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=\gamma^{-2} \quad \text{olur.}$$

Parçacığın anlık durgun çerçevesinden ölçülen ivme has ivme olur ve α ile gösterilir.

$$a_x^{'} = \frac{a_x}{A^3\gamma^3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = a_x^{'} = \frac{a_x}{\left(\gamma^{-2}\right)^3\gamma^3} = \gamma^3 a_x$$

Sabit bir has ivme ile düz bir çizgide hareket eden parçacığın yörünge denklemi bir hiperboldür, bu nedenle bu harekete hiperbolik hareket denir.

$$\alpha = sbt \quad \Rightarrow \quad x^2 - c^2t^2 = \frac{c^4}{\alpha^2} \quad , \quad X = \frac{c^2}{\alpha}$$

$$x^2 - c^2t^2 = X^2 \quad \Rightarrow \quad hiperbol\ denklemi$$

Sabit her X değeri için bu denklem, x-doğrultusunda $\alpha = c^2 / X$ sabit has ivmesiyle hareket eden bir parçacığı temsil eder.