

# A 305 Astrofizik I

Prof. Dr. Fehmi EKMEKÇİ

Ankara Üni. Fen Fak. Astronomi ve  
Uzay Bilimleri Bölümü

# ÖNSÖZ

Bu ders notları özellikle Gökbilimin Astrofizik alanındaki temel bilgilerini aktarmak üzere III. sınıfın birinci dönemi Astrofizik I ve ikinci dönemi Astrofizik II başlıkları altında Gökbilim Öğrencilerine son beş yıldır verdiğim derslerin düzenli bir sunumunu bir Türkçe kaynak olarak sağlamak üzere hazırlanmıştır.

AST305 veya A305 koduyla okutulan Astrofizik I adlı dersin içeriğine, hazırlamış olduğum bu ders notlarını, liste halinde verdiğim ve yararlandığım kaynaklardaki ilgili bölümlerinden ve lisans eğitimi gördüğüm Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Astronomi ve Uzay Bilimleri'ndeki hocalarımdan Prof. Dr. Ömür Gülmen'in Astrofizik dersinde bize aktardığı bilgilerden derleyerek ve yıldızların tayfsal

# ÖNSÖZ(devamı)

çalışmaları için gerekli temel bilgiyi dikkate alarak hazırlamış bulunuyorum . Konuların dayandığı denel fizik ve Teorik fizik konularına da değinerek temel bilgileri aktarmaya özen gösterilmiştir. Bu notların bilgisayar ortamında hazırlanmasında şekillerin çizilmesinde ve ilgili formata dönüştürmede yardımcı olan Araş.Gör. Tolgahan KILIÇOĞLU, Mustafa DÜZER, Ananur ERSOY ve Cenk YEŞİLBAĞ' a teşekkür ederim. Öğrencilerime ve okurlarıma bu 'Astrofizik' notlarının yararlı olmasını dilerim.

Bu ders notları izin alınmadan hiçbir ortamda kullanılamaz, paylaşılamaz. Eğitim amaçlı kullanım durumu için bu kaynak künyesine atıf yapma koşulu ile kullanım izni verilebilir.

Prof. Dr. Fehmi EKMEKÇİ

# Yararlanılacak Kaynaklar

- A. Kızılırmak, 1970, Astrofiziğe Giriş, Ege Üni. Fen Fak. Matbaası, Bornova-İzmir
- Lloyd Motz, Anneta Duven, 1974, Astronomide Temel Bilgiler, 4 Cilt, İ.Ü. Yayınları (Çeviri), Fen Fak. Basımevi-İST.
- Prof. Dr. Nüzhet Gökdoğan, 1978, Spektroskopiye Giriş, Fen Fak. Basımevi-İST.

## Yararlanılacak Kaynaklar (devam)

- Lawrence H. Aller, 1963, The Atmospheres of the Sun and Stars, The Ronald Press Comp. New York (A81250-523.7 ALL1963)
- Eva Novotny, 1973, Introduction to Stellar Atmospheres and Interiors, Oxford Univ. Press. New York, London, Toronto
- John P.Cox , R.Thomas Giuli , 1968 , Principles of Stellar Structure,Vol.I,Vol.II, Gordon and Breach, Science Publishers , Newyork / London / Paris

# Yararlanılacak Kaynaklar (devam)

- Physics 7- Lectures & Homework : Introduction to Astronomy  
<http://cassfos02.ucsd.edu/physics/ph7/lectures.htm>
- Index to Lectures – Astronomy 101/103  
<http://instruct1.cit.cornell.edu/courses/astro101/>
- Astronomy 162 – Stars, Galaxies, and Cosmology  
<http://csep10.phys.utk.edu/astr162/lect/index.html>
- Prof.Dr. Semanur Engin, Yıldız Atmosferleri Ders Notları

# 1. GİRİŞ

## ASTROFİZİK

- Yıldızların teker teker **iç yapılarını**,
- Nasıl **enerji ürettiklerini** ve bu **enerjilerin ölçülebilmeleri**,
- **Denge koşulları**, **yıldız oluşumunu**, **gelişimi** ve **sonu** konularını inceler.

Astronomlar diğer bilimadamları gibi, ilgilendikleri cisimleri (gök cismi) yakından inceleme olanağına sahip değildirler. Yakından inceleyip çalışabildikleri tek şey gök cisimlerinden bize gelen **ışınım**dır.

Yıldız ve diğer gök cisimleri bize sürekli olarak ışınım gönderirler. Bu ışınım boşlukta  $\sim 300\,000$  km / s lik bir hızla hareket eder.

# Giriş (devamı)

IŞIK bir dalga mı yoksa parçacık akımı mıdır ?

Uzun süre bu sorunun yanıtı tam olarak verilemedi. Fakat bugün biliyoruz ki ışık hakkındaki bu iki görüş de doğrudur. Bazı olaylar ışığın parçacık yapısı ile bazıları da dalga hareketi ile açıklanabilir.

**Astronomide ışığın hem dalga hem de parçacık kuramı kullanılır.** Önce ışığı dalga olarak ele alalım.



# Giriş (devamı)

## Dalgaboyuna göre IŞIK :

1-  $\gamma$  Işınları

2- X Işınları

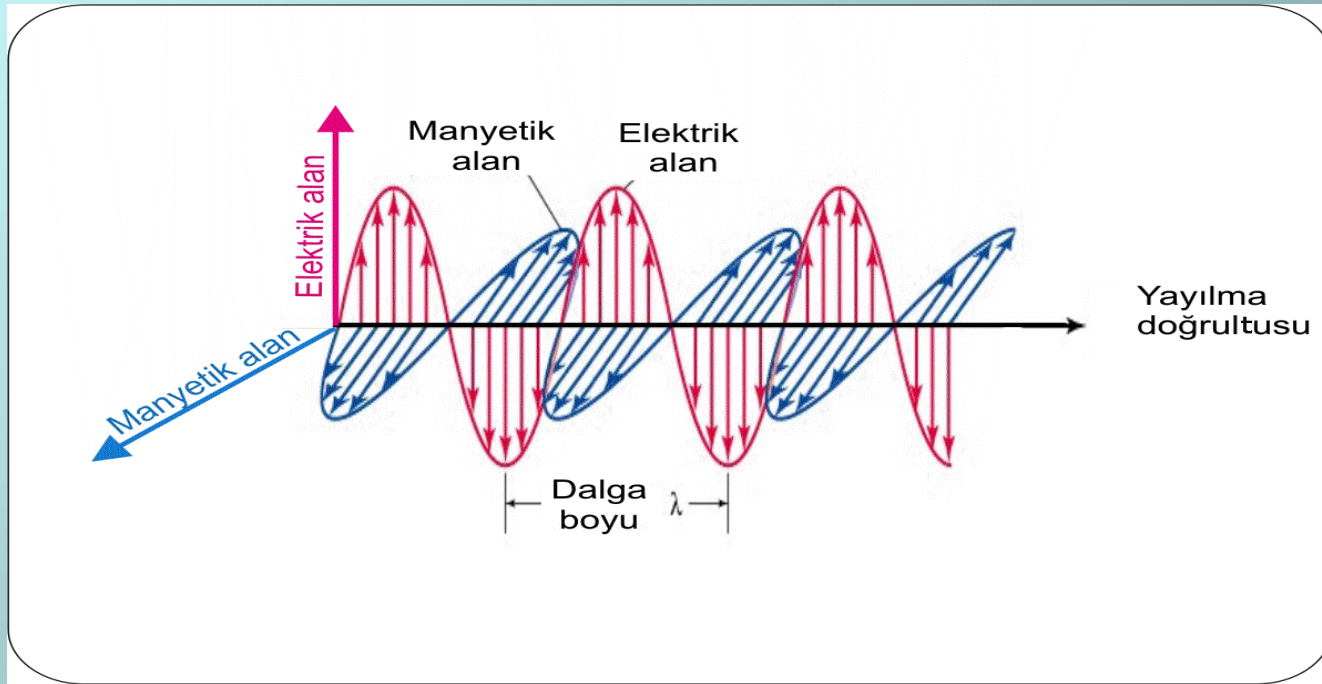
3- Morötesi Işık

4- Gözle görülebilen, Görünen Işık

5- Kırmızıötesi Işık

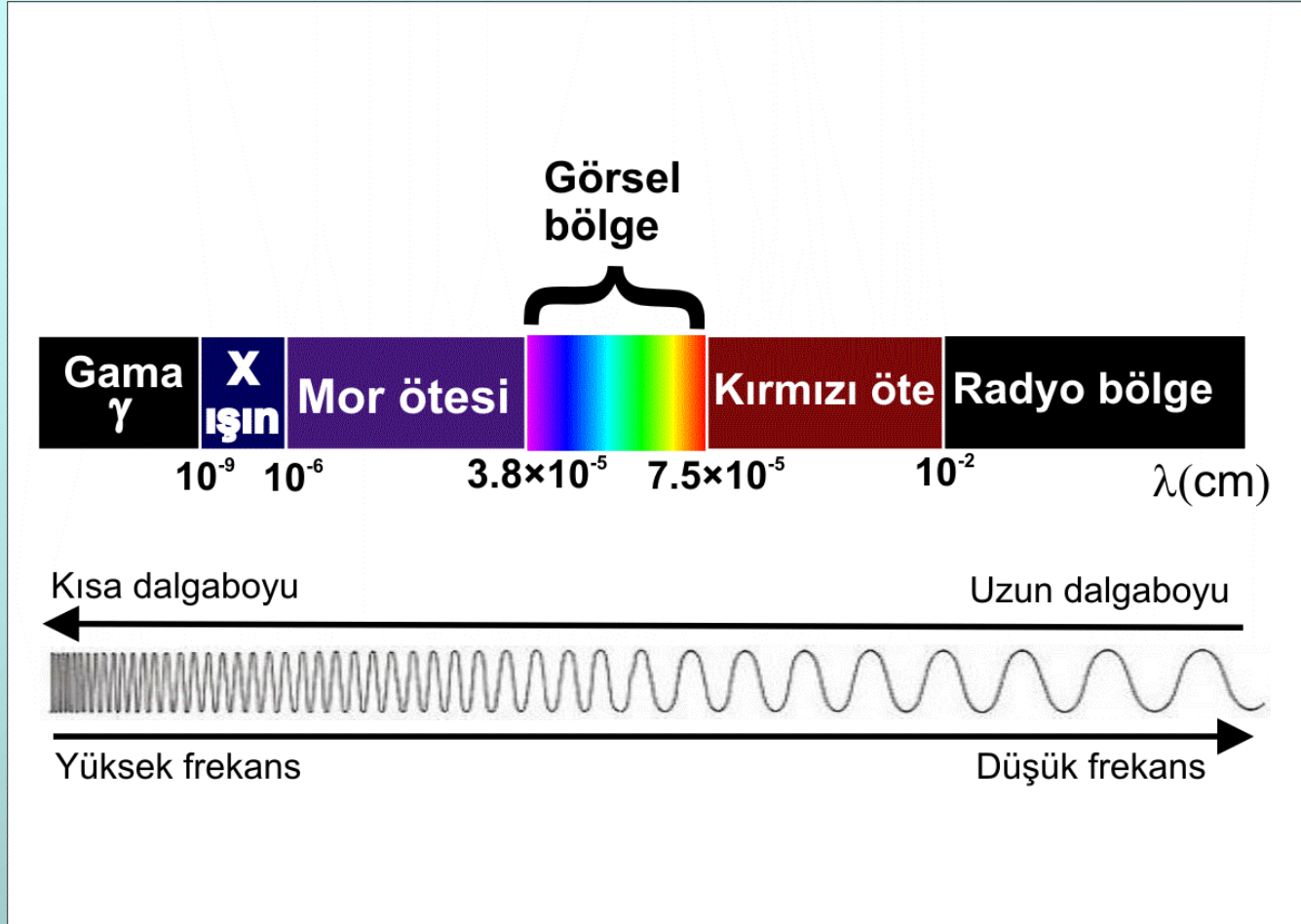
6- Radyo Işınları

Işık bir elektromanyetik dalga hareketidir. Yani ışığı meydana getiren dalgaların hem elektrik hem de manyetik alanı vardır (Şekil 1). Işık dediğimiz görünen ışık, yıldızlardan salınan ışığın ancak ufak bir parçasıdır. Gözümüz 3800 Å ile 7500 Å dalgalı boyları arasındaki ışınımı algılar.



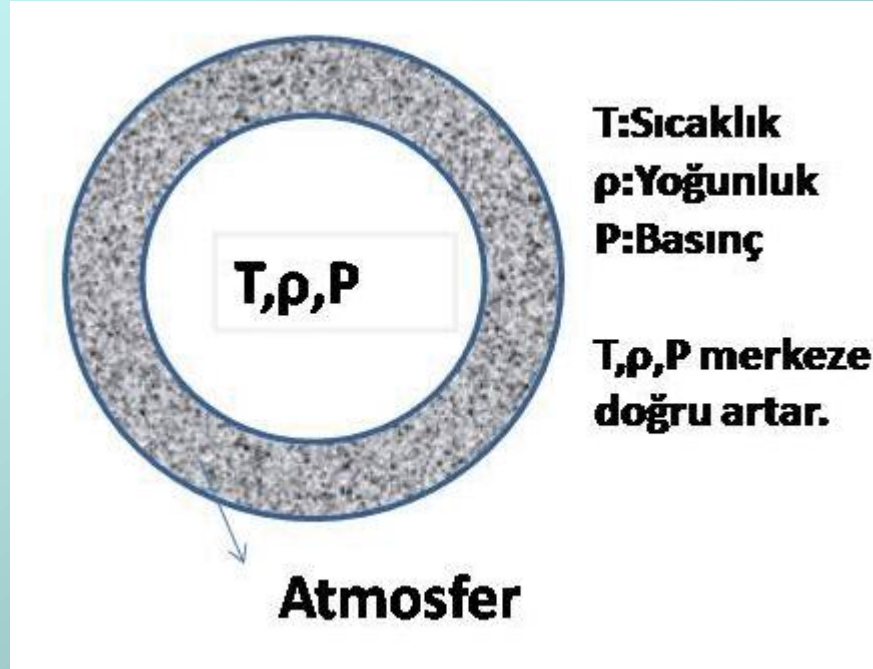
Şekil 1. Elektromanyetik dalganın hareketi

Oysa yıldızlar çok çeşitli  $\lambda$  'larda ışıınım gönderirler.



Şekil 2. Elektromanyetik dalga ışıınımın dalgaboyu ve frekansa bağılı görünümü

Yıldız'ın atmosferi (Şekil 3), ışık alabildiğimiz, yıldızın iç katmanlarının dışında kalan bölgesidir.



Şekil 3. Yıldız Atmosferinin temsili bir görünümü

# Giriş (devamı)

$\lambda$ :dalgaboyu,  $\nu$ :frekans ve  $c$ :ışığın boşlukta yayılma hızı

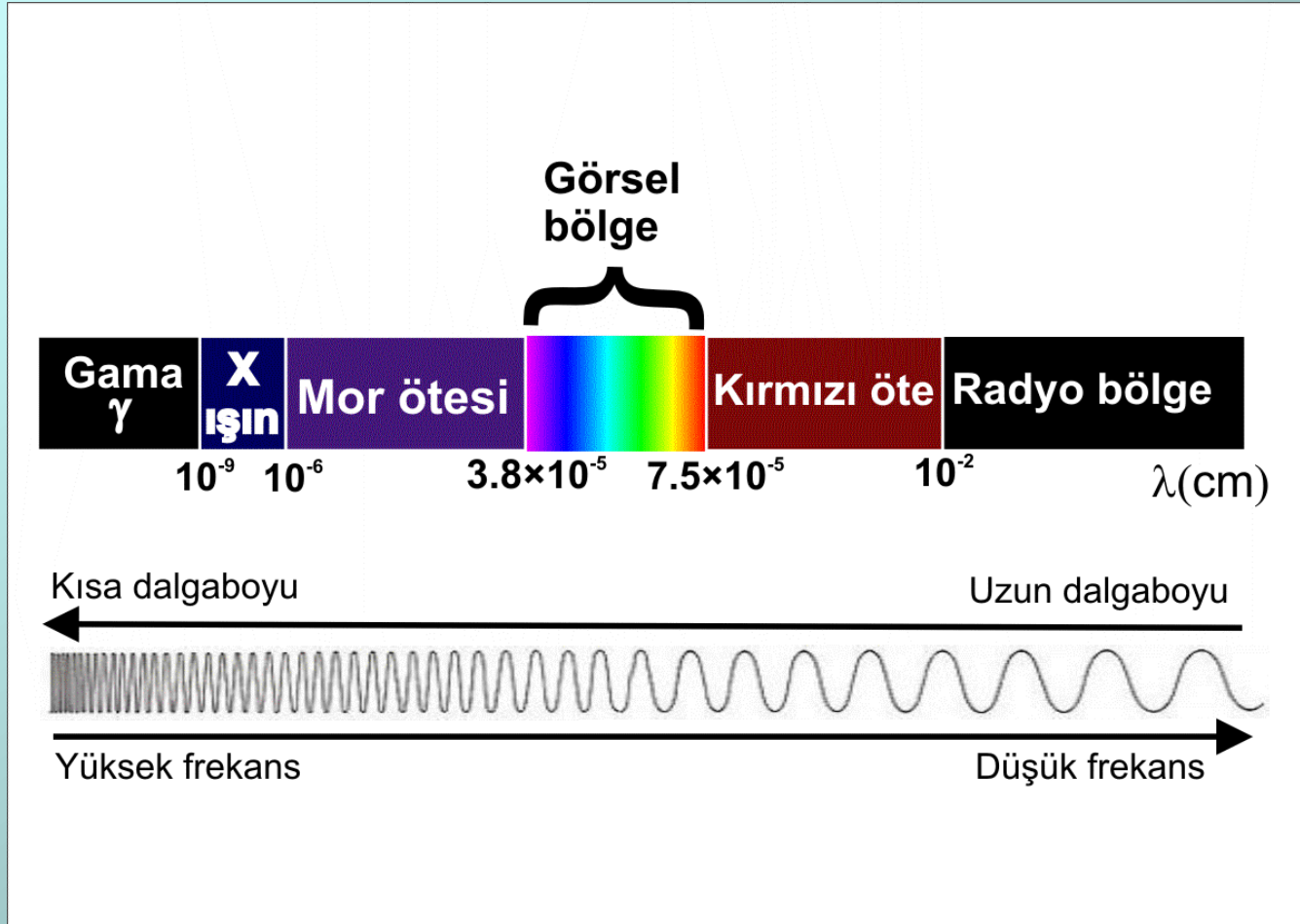
olmak üzere,

$$\lambda \nu = c \quad \dots\dots\dots( 1 )$$

bağıntısı vardır.  $c=299792.5 \text{ km / s}$  dir.

Çok uzun dalgaboyları **Radyo dalgaları**, en kısa dalgaboyları da  **$\gamma$  -ışınımı** diye adlandırılır. Tüm dalgaboylarındaki ışınım, adları ile birlikte aşağıdaki gibidir.

Tüm dalgaboyu aralığını kapsayan ışınım **elektromanyetik ışınım** denir (şekil 2).



# Giriş (devamı)

Herhangi bir ortamda  $c$  ışık hızı **sabit değildir**. Ancak  $\nu$  frekansı sabittir. Dolayısıyla herhangi bir ortamdaki dalgaboyu  $\lambda'$  ise,

$$\lambda' \nu = v \quad \dots\dots\dots( 2 )$$

olacaktır. Dolayısı ile ışığın ilgili ortamdaki  $v$  hızı değişmiş olur.

# Giriş (devamı)

Yukarıda adı geçen ışının hepsi Yeryüzüne erişemez. Bize erişemeyen bu ışının çoğu yaşam için zararlıdır. Yer atmosferindeki Ozon, özellikle Güneş'in Yeryüzündeki yaşam için tehlikeli olan morötesi ışınlarını soğurarak bize gelmesini engeller. Yapay uydular aracılığıyla atmosfer dışına çıkararak bu ışınların incelenmesi mümkün olmuştur.

Gök cisimlerini yakından incelemek mümkün olmadığına göre, onların kimyasal ve fiziksel yapılarını öğrenmenin tek yolu, bize gönderdikleri ışının tayfını incelemektir.



## 2.TEMEL KAVRAMLAR VE TANIMLARI

- Kozmik ışın (Evren ışınımı veya parçacık ışınımı): Çeşitli gök cisimlerinden çıkıp yüksek hızlarla uzaya yayılan proton veya elektronlardır.
- **Işınım** : Dalga ya da madde parçacıkları şeklindeki **enerjinin uzaya yayılma eylemidir.**
- **Işınım kaynağı** : Işınım eylemini yapan **nesneye** denir.

## 2.Bölüm (devamı)

Boşlukta ışık hızı :  $c = \lambda v$  ..... ( 1 )

Herhangi bir ortamdaki ışık hızı :  $v = \lambda' v$  ... ( 2 )

Burada  $v$  ortama bağlı olmayıp sabittir.

(1) ve (2) den,

$$\frac{\lambda v}{\lambda' v} = \frac{c}{v} = \mu \Rightarrow \mu = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{c}{v}$$

olur. Burada  $\mu$  , ortama göre değişen bir nicelik olup, **ortamın kırılma ölçüğü(indisi)** adını alır.

Kuru hava için ;  $\mu = 1.0003$

Flint camı için ;  $\mu = 1.5$

## 2.Bölüm (devamı)

$\lambda'$ ,  $\lambda$  ve  $\mu$  arasındaki bağıntı;

$$\lambda / \lambda' = \mu \text{ idi.}$$

**İrdeleme** : a)  $\mu = 1$  ise  $\lambda' = \lambda$  olur,

b)  $\mu > 1$  ise  $\lambda' < \lambda$  olur.

**Sonuç** : Herhangi bir ortamdaki  $\lambda'$  dalgaboyu, boşluğa nazaran olan  $\lambda$  dalgaboyuna göre **küçülür**, dolayısıyla **hız** da **azalır** ( $v = st$ ).

## 2.Bölüm (devamı)

Dalgaboyu olan  $\lambda$  'nın birimleri (cm, m, ..., Å)

$$1 \text{ Å} = 10^{-8} \text{ cm}$$

$\lambda=5000 \text{ Å}$  için  $\nu=?$

$$\nu = c / \lambda ; \nu = 3 \times 10^{10} \text{ cm/s} / 5 \times 10^{-5} \text{ cm}$$

$$\nu = 6 \times 10^{14} \text{ s}^{-1} \text{ (=Hz veya titreşim / s)}$$

$\lambda=10 \text{ m}$  ise  $\nu=3 \times 10^7$  titreşim /s

1 Kilo Hertz = 1 KHz =  $10^3$  Hz

1 Mega Hertz = 1 MHz =  $10^6$  Hz

## 2.Bölüm (devamı)

Dalga sayısı ( $\sigma$ ) :

$\sigma$  nın birimi  $\text{cm}^{-1}$  dir.

$$\sigma = 1 / \lambda(\text{cm}) = \nu / c \quad \text{cm}^{-1} (= \text{KAYSER})$$

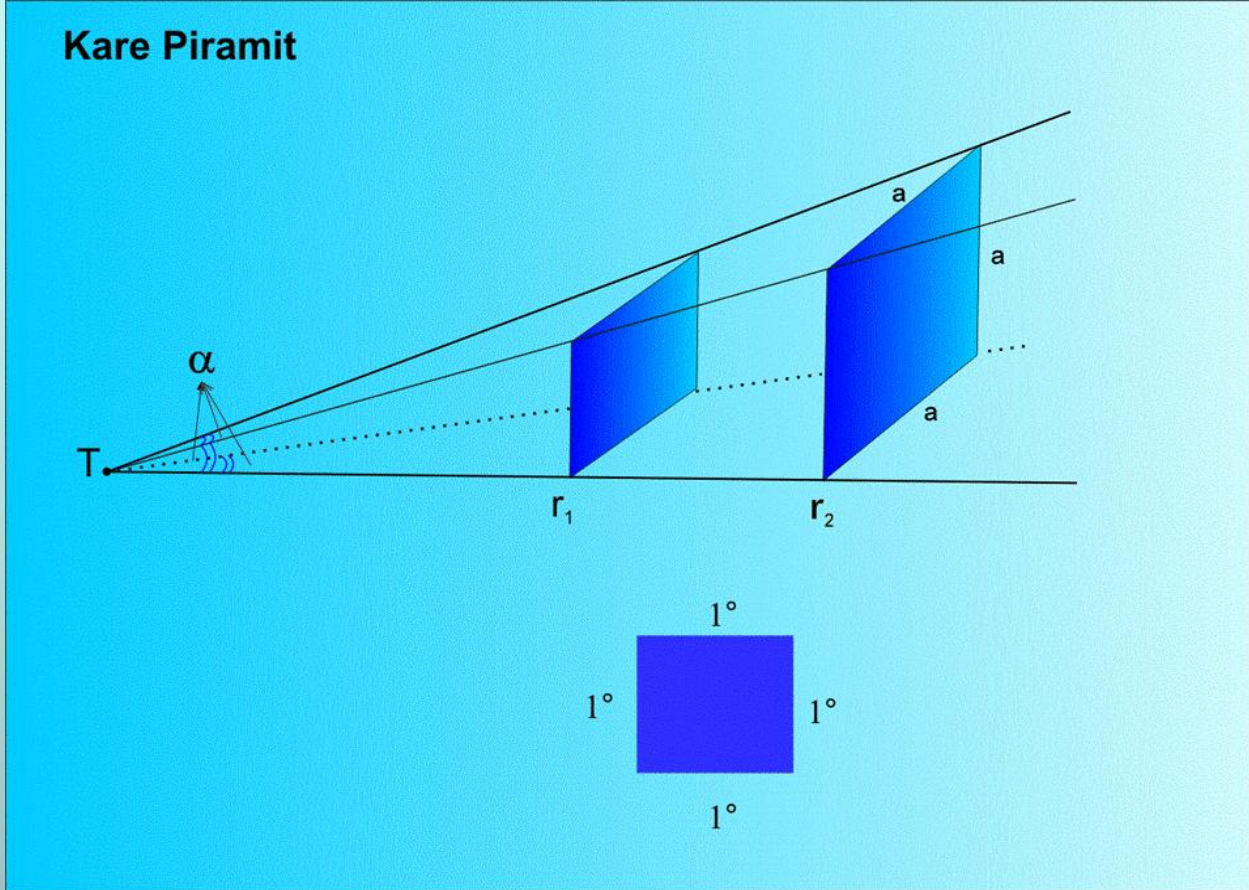
$\lambda = 5000 \text{ \AA}$  için  $\sigma = 2 \times 10^4 \text{ Kayser}$  gibi.

**Sonuç :**  $\lambda \nu = c$  ,  $\lambda$  ile  $\nu$  zıt yönlü değişirler. Biri artarsa diğeri azalır. Ancak bu durum belli bir c hızı için söz konusudur.

## UZAY AÇI (Kati açı):

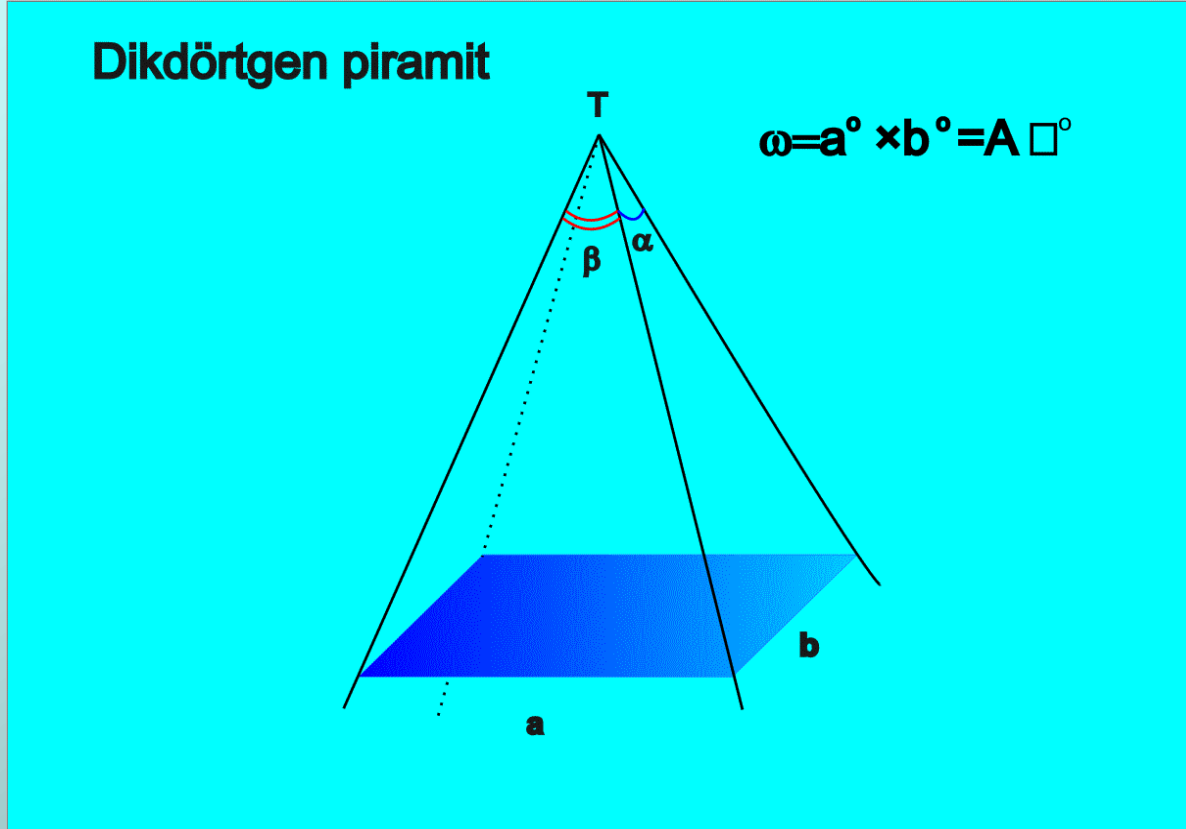
**Tanım:** Koni ya da piramit biçimindeki cisimlerin sınırladığı uzay parçasına **UZAY AÇI** denir.

1<sup>o</sup>) **KARE PİRAMİT** : (bkz. Şekil 4)



Şekil 4. Karepiramit'in tabanını çeşitli uzaklıklarda gören uzay açı

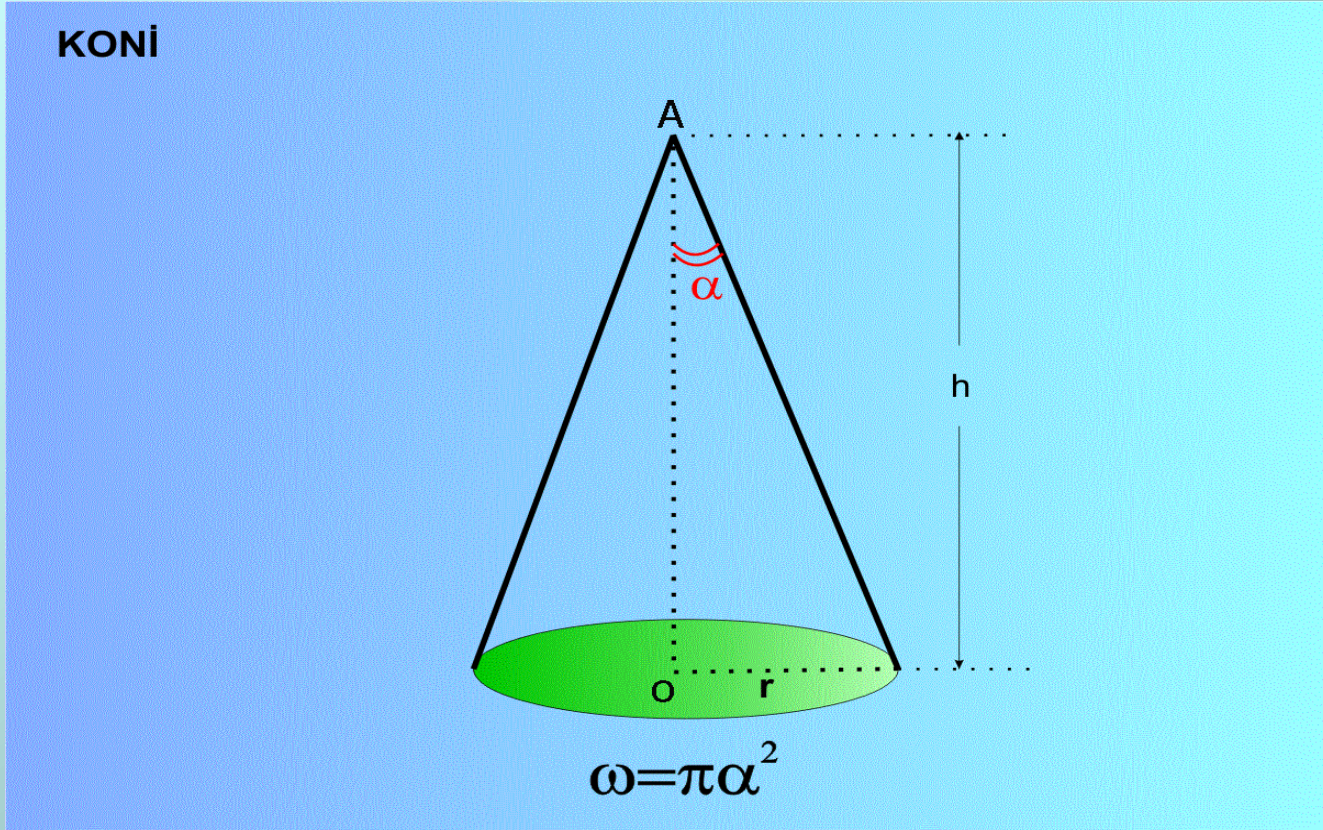
## 2°) DİKDÖRTGEN PİRAMİT : (bkz. Şekil 5)



Şekil 5. Dikdörtgen piramitde uzay açısı tanımı



3°) **KONİ** için : (bkz.Şekil 6)



Şekil 6. Koni için uzay açısı tanımı



## 2.Bölüm (devamı)

**Uzay açısı:** Herhangi bir alanı **r** uzaklığında gören açıdır.

**Koni için;**  $\text{tg } \alpha = r / h$  ; **Alan** =  $\pi r^2$

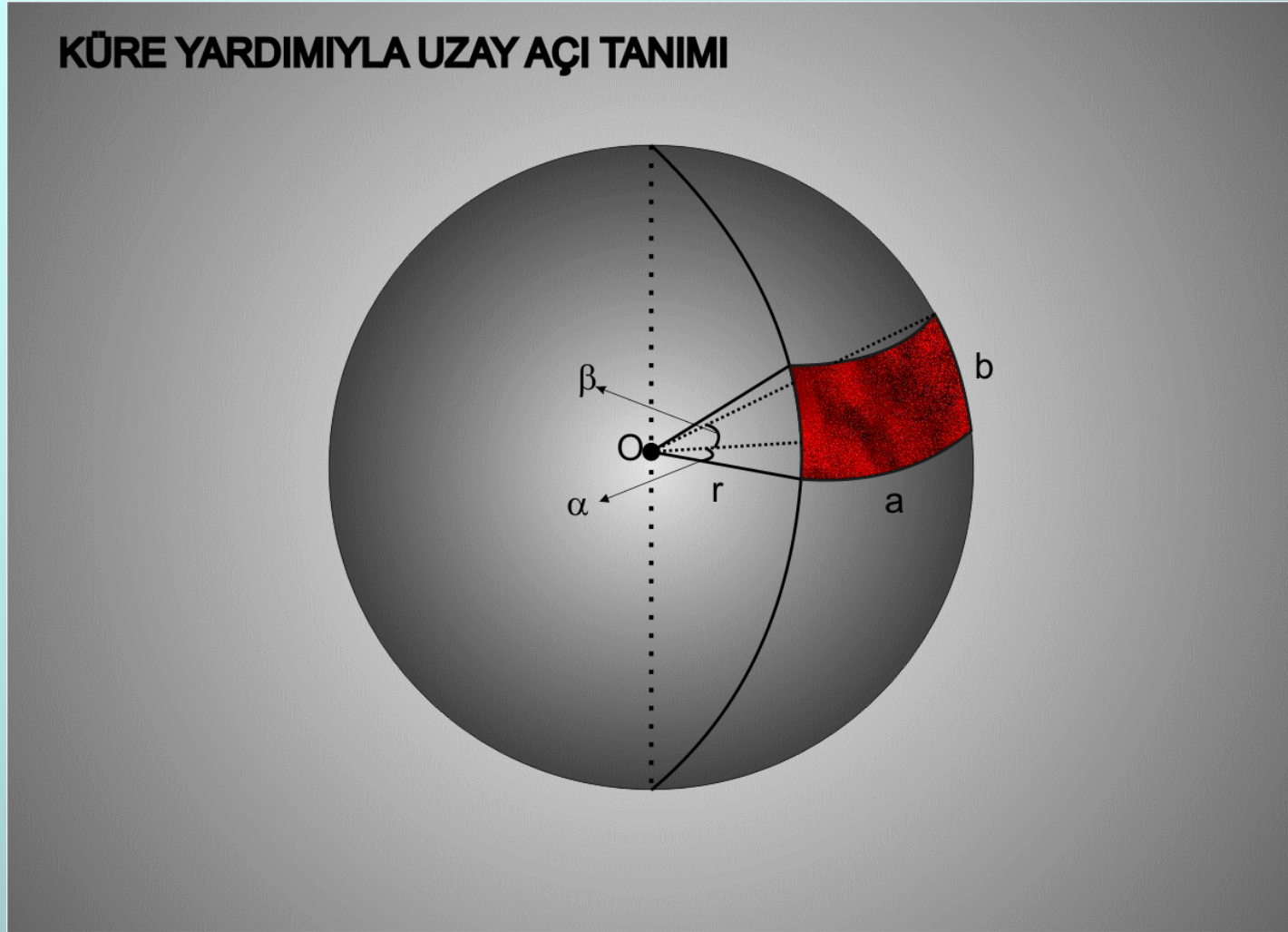
$\alpha \ll 1$  ise  $\alpha \text{ (rad)} = r / h$  yazılabilir.

O zaman,

$\omega = \pi r^2 / h^2$  ;  $h = r / \alpha \text{ (rad)}$  ,  $h^2 = r^2 / \alpha^2 \text{ (rad)}^2$

$r^2 = \alpha^2 h^2$  ;  $\omega = \pi \alpha^2 h^2 / h^2 = \pi \alpha^2$  bulunur.

4°)KÜRE YARDIMIYLA UZAY AÇI TANIMI  
Küre yarıçapı  $r$  olsun (bkz. Şekil 7).



Şekil 7. Küre yardımıyla uzay açısı tanımı

## 2.Bölüm (devamı)

$$\alpha \text{ (rad)} = a / r \quad , \quad \beta \text{ (rad)} = b / r$$

$$\omega = \alpha \text{ (rad)} \times \beta \text{ (rad)} = (a/r) (b/r)$$

$$\omega = a b / r^2$$

$\omega$  nın birimi, a ve b nin birimine bağlıdır

( $\square^\circ$  ,  $\square'$  ,  $\square''$  ,  $\text{rad}^2$  gibi).

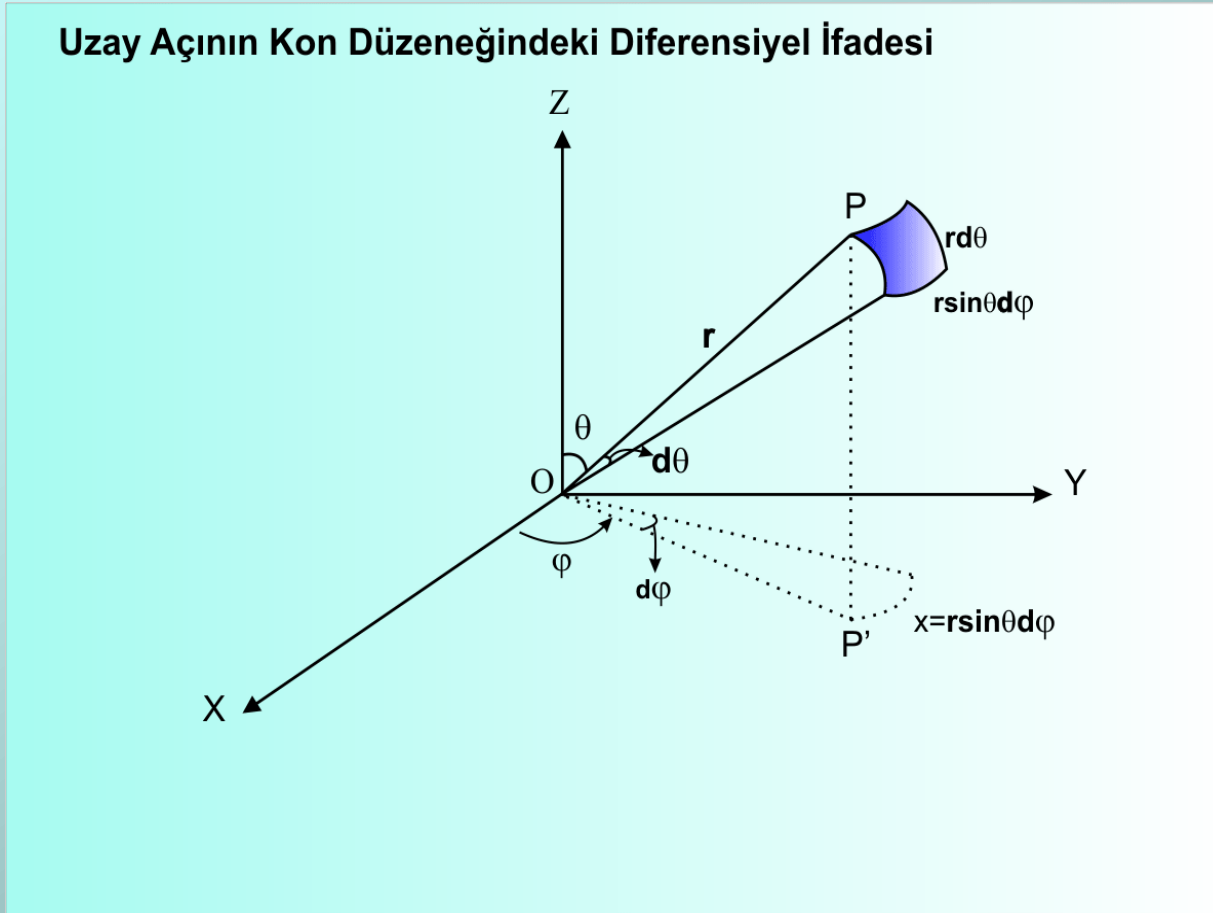
$r \rightarrow \infty$  ise a ve b yaylarının oluşturduğu alan dikdörtgen olarak alınabilir. Yani a, b nin sonsuz küçük olması koşuluyla,

$$\omega = \text{alan} / r^2 = \text{Dikdörtgen alanı} / r^2$$

dir.

$\omega = \text{alan} / r^2$  ; Herhangi bir uzay parçasını, normal doğrultusunda r uzaklığında gören **uzay açısıdır**.

UZAY AÇININ UÇLAK (Kutupsal)  
KON DÜZENEĞİNDEKİ DİFERANSİYEL İFADESİ  
(Şekil 8) den görüleceği gibi,



Şekil 8. Uzay açının uçlak kon düzeneğindeki ifadesi

## 2.Bölüm (devamı)

$$OP = r, P(r, \theta, \varphi),$$

$$0^\circ < \varphi < 360^\circ \text{ veya } 0 < \varphi < 2\pi$$

$$0^\circ < \theta < 180^\circ \text{ veya } 0 < \theta < \pi \quad \text{kadar de\u011fi\u015fim g\u00f6sterirler.}$$

$$OP' = r \cos(90 - \theta), \quad OP' = r \sin \theta$$

$$\operatorname{tg} d\varphi = x / r \sin \theta \Rightarrow x = r \sin \theta d\varphi$$

$$\operatorname{tg} d\theta = y / r \Rightarrow y = r d\theta$$

$$d\omega = \text{Alan} / r^2 = r \sin \theta d\varphi r d\theta / r^2$$

$d\omega = \sin \theta d\theta d\varphi$  bulunur ki bu, uzay açının uçlak kon düzene\u011findeki diferansiyelidir.

## 2.Bölüm (devamı)

### IŞINIM SALMA GÜCÜ (Emisyon Gücü) ve IŞINIM YEĞİNLİĞİ (Şiddeti)

Bir ışınım kaynağının birim yüzeyinin bir saniyede saldığı, her dalgaboyundaki toplam enerji miktarına **ışınım salma gücü (S)** denir.

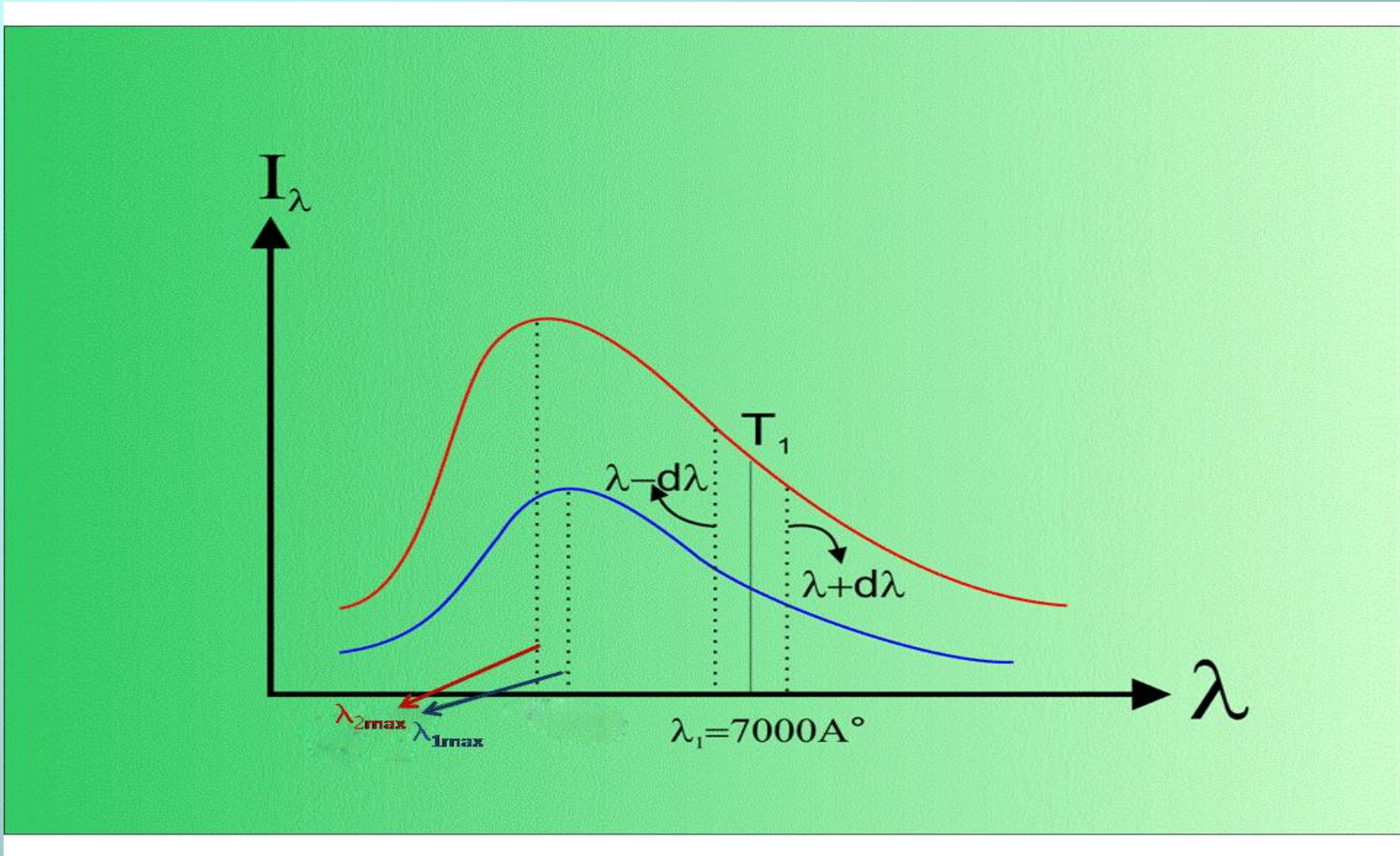
Deneylere göre,  $T = 1600 \text{ }^\circ\text{K}$  sıcaklığındaki erimiş **Demir** için  $S_1 = 1.1 \times 10^8 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$  ;

$T = 2750 \text{ }^\circ\text{K}$  sıcaklığındaki **Tungsten** için

$S_2 = 5 \times 10^8 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$  dir.



**Tek renk ( Monokromatik) Işınım** : Belirli ve dar bir dalga boyu ya da bir frekans aralığındaki ışınımaya denir (Şekil 9).



Şekil 9. Tekrenk ışınımın tanımı

## 2.Bölüm (devamı)

Yani,

$\lambda$  ile  $\lambda \pm d\lambda$  ya da  $v$  ile  $v \pm dv$  arasında saniyede salınan ışınım **Tekrenk ışınım** denir.

**Tekrenk ışınım :**

$\lambda \rightarrow \lambda$  ve  $\lambda + d\lambda$  için  $S_\lambda$  veya

$v \rightarrow v$  ve  $v + dv$  için  $S_v$  dir.



## 2.Bölüm (devamı)

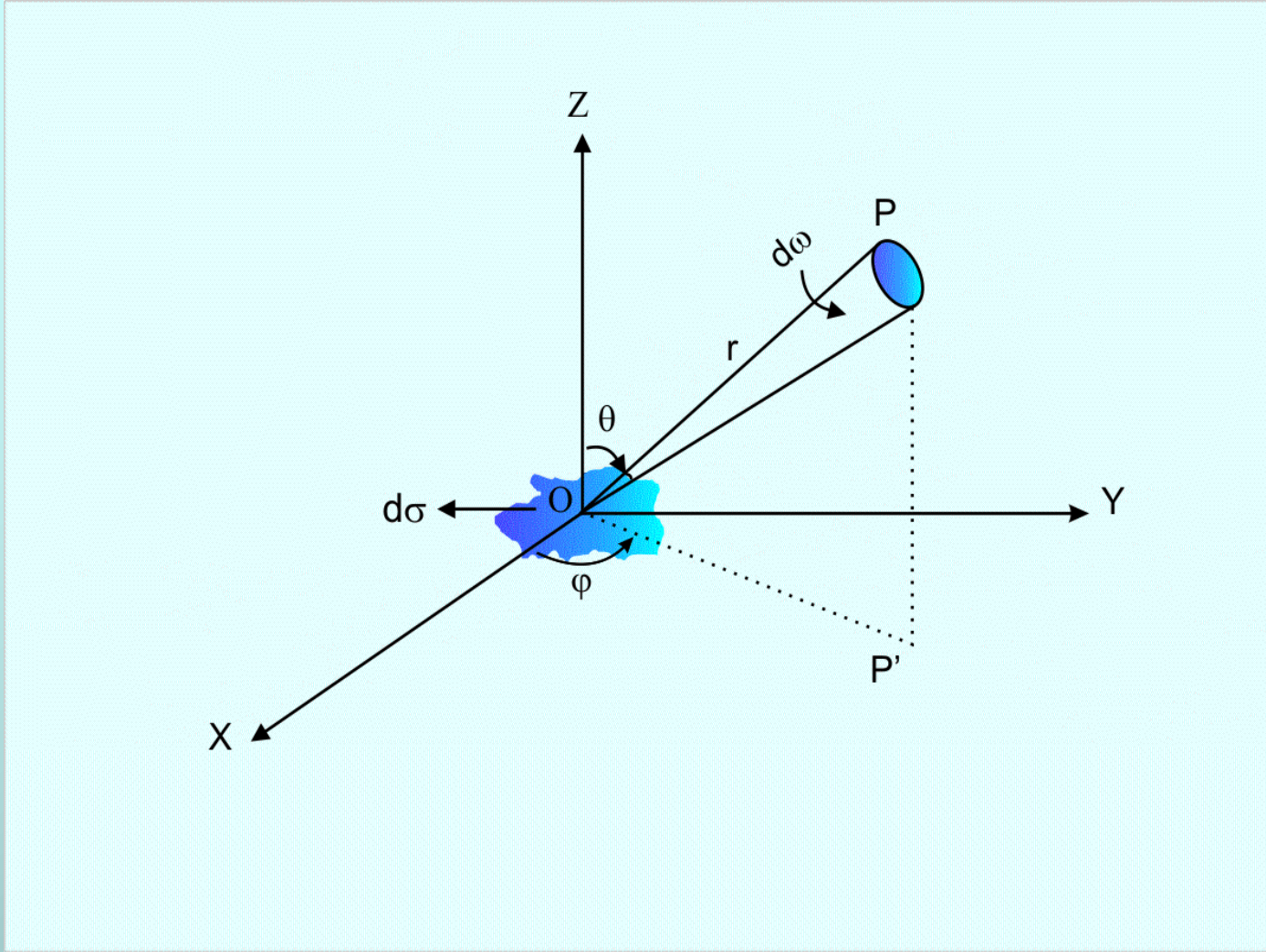
**Tekrenk Işınım Gücü** : Işınım kaynağının  $1 \text{ cm}^2$  sinden  $1$  saniyede ve  $\lambda$  ile  $\lambda + d\lambda$  ya da  $\nu$  ile  $\nu + d\nu$  arasında salınan enerji miktarıdır.  $S_\lambda$  ya da  $S_\nu$  ile gösterilir.

**TOPLAM IŞINIM GÜCÜ (S)** ise :

$$S = \int_{\lambda=0}^{\infty} S_\lambda d\lambda \quad \text{veya} \quad S = \int_{\nu=0}^{\infty} S_\nu d\nu \quad \text{dir.}$$

Herhangi bir ışınım kaynağının  $d\sigma$  gibi küçük bir yüzey parçasını gözönüne alalım ve onun herhangi bir doğrultudaki belirli bir uzay açısına verdiği ışınımın erkesini hesaplamaya çalışalım (Şekil 10) :

## 2.Bölüm (devamı)



Şekil 10. Işınım kaynağının elemanter yüzeyinin uzaya verdiği ışınım erkesi

## 2.Bölüm (devamı)

**$d\sigma$  yüzeyi  $d\omega$  uzay açısına ne kadar ışınım gönderir ?**

Her şeyden önce bu erke  $d\sigma$  yüzeyinin saldığı toplam erkenin küçük bir kısmı olmalıdır. Bu kısım  $dS(\theta, \varphi)$  olsun.

$$dS(\theta, \varphi) = d\sigma \cos \theta d\omega I(\theta, \varphi)$$

Burada ,  $I(\theta, \varphi)$  ile gösterilen bir orantı katsayısı olup buna “Işınım Yeğinliği”(=Intensity) denir.  $d\sigma \cos \theta$  ;  $d\sigma$  nın  $d\omega$  ya gösterdiği alandır.  $d\omega$  da uzay açının diferansiyelidir.

## 2.Bölüm (devamı)

**ÖZEL DURUM** :  $I(\theta, \varphi)$  yeğinliği,  $(\theta, \varphi)$  doğrultusundaki  $d\omega$  uzay açısına ilişkindir.

Yüzeyin yaptığı ışınım  $\varphi$  açısına bağlı değilse,  $\theta=0$ ,  $d\omega=1$ (birim),  $d\sigma=1$ (birim) için

$$dS = I$$

olur.

**Işınım yeğinliği** : Kaynağın birim yüzeyinin, yüzeye dik doğrultuda birim uzay açısına birim zamanda (1 s) gönderdiği her dalgaboyundaki erke miktarıdır.

## 2.Bölüm (devamı)

**Işınım**, dalgaboyuna bağlı olarak değişirse, yani  $(\lambda, \lambda+d\lambda)$  için ışınım yoğunluğu :  $I_\lambda$  ; yok eğer frekansa bağlı  $(\nu, \nu+d\nu)$  ise, ışınım yoğunluğu :  $I_\nu$  olup burada,  $I_\lambda$  ve  $I_\nu$  , **tekrenk ışınım yoğunluğu** adını alır.

### **IŞINIM AKISI (Radiation Flux) :**

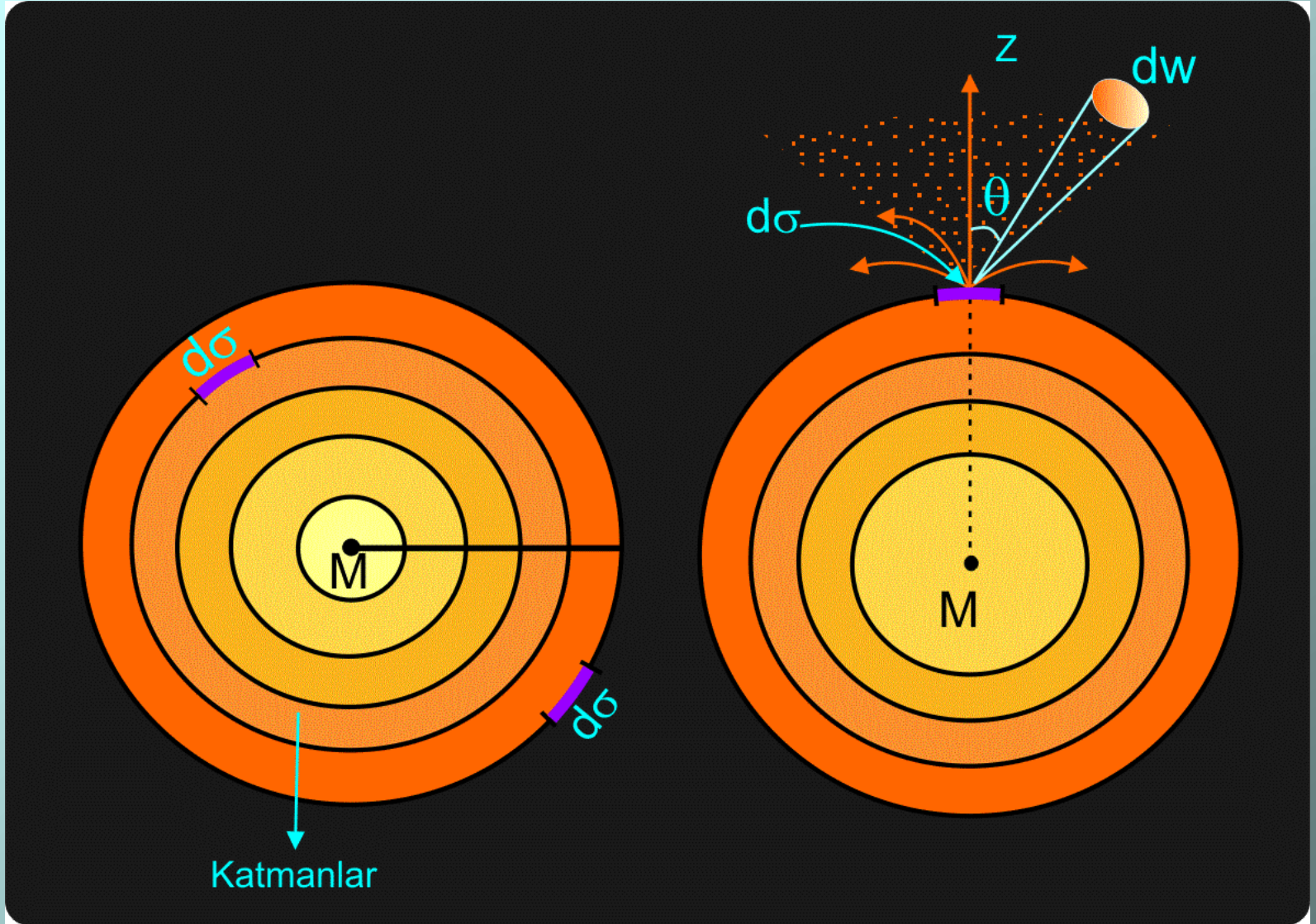
$dS(\theta, \varphi) = I(\theta, \varphi) d\sigma \cos \theta d\omega$  idi.

$d\omega = \sin \theta d\theta d\varphi$  olduğundan,

$dS(\theta, \varphi) = I(\theta, \varphi) d\sigma \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi$  olur.



# Şekil 11. Yıldız kesiti



## 2.Bölüm: Işınım Akısı (devamı)

Yıldız kesiti (bkz. Şekil 11):

Eğer  $d\sigma$  yüzeyi küresel bir ışık kaynağının katmanlarının birinin yüzeyinde bulunuyorsa, o zaman onun iç katmanlardan aldığı ve dış katmanlara verdiği erkenin matematiksel ifadelerini yazmamız gerekir.  $d\sigma$ 'nın üst yanda kalan yarım küreye saniyede verdiği toplam erke, onun dışarı saldığı erkeye karşılık gelir. Birim yüzey için bu erke  $S^+$  ise,  $d\sigma$ 'nın dışa doğru saniyede verdiği toplam erke,

$$S^+ d\sigma = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} I(\theta, \varphi) d\sigma \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi$$

olur.

## 2.Bölüm: Işınım Akısı (devamı)

Sözkonusu yüzeye giren erke ise, integral sınırlarını değiştirmekle bulunur. Bu da,  $d\sigma$ 'nın birim yüzeyine saniyede giren ışınım erkesi,

$$S^- d\sigma = \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} I(\theta, \varphi) d\sigma \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi$$

dir. Yıldızların iç katmanlarındaki her bir yüzey parçası içerden erke alır, kendisi erke üretir ve dışarı erke verir.



## 2.Bölüm: Işınım Akısı (devamı)

Böylece içerden dışarı doğru bir erke akımı doğmuş olur. Buna göre katmanın bizzat ürettiği erke  $S_a$  olmak üzere,

$$S_a = S^+ - S^-$$

olur. İşte, tanımlanan bu  $S_a$  'ya yüzeyin “ışınım akısı” denir.

**Işınım akısı** : Yüzeyin yayınladığı erke ile iç katmandan aldığı erke arasındaki farka, sözkonusu yüzeyin **ışınım akısı** denir.

## 2.Bölüm: Işınım Akısı (devamı)

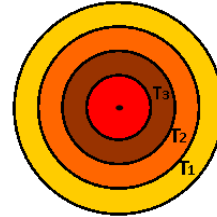
$S^+ = S^-$  ise  $S_a = 0$  olur.

$S^+ > S^-$  ise  $S_a > 0$  olur.

1°) Yıldızın iç katmanlarında  $S_a > 0$  dır. Yani iç katmanlar enerji üretiyor,

2°) En dış katmanda  $S_a > 0$  dır. Yani  $S^+ > S^-$  dir.  
Bu da  $S_a = S$  dir  $\rightarrow S^+ = S$

**Eş sıcaklı (izotermal) kaynak :** Eğer küresel yapıdaki bir kaynağın her noktasında sıcaklık aynı (=eşit) ise bu kaynağa “**eş sıcaklı kaynak**” denir.



Şekil 12. Eşsıcaklı kaynağın katmanları

## 2.Bölüm (devamı)

Ancak,  $T_1 = T_2 = \dots = T_n$  olması mümkün değildir.

Çünkü  $S^+ - S^- > 0$  dır.

### Sonuçlar :

1- Eş sıcaklı kaynağın ışınımı her doğrultuda aynıdır (özdeşir). Yani,  $I(\theta, \varphi) \rightarrow I$  dır

2- Her doğrultuda özdeş olan ışınımaya **Eş yönlü (izotropik) ışınım** denir.

3- Eş sıcaklı kaynağın ışınımı **eş yönlüdür**.

4- Eş sıcaklı bir kaynak için  $S_a = 0$  olur.  $S_a \neq 0$  olsaydı bu, varsayıma aykırı olurdu.

## 2.Bölüm (devamı)

### ORTALAMA IŞINIM YEĞİNLİĞİ : $\bar{I}(\theta, \varphi)$

Işınım salma gücü  $S$ , gökyüzü üzerindeki izdüşümün alanı  $\sigma$  olan bir kaynağın,  $(\theta, \varphi)$  doğrultusundaki  $d\omega$  uzay açısına saniyede yolladığı enerji payı  $dS(\theta, \varphi)$  olsun. Burada da  $\sigma$ 'nın  $(\theta, \varphi)$  doğrultusuna gösterdiği alan  $\sigma \cos \theta$  olduğuna göre, kaynağın ortalama ışınım yeğİnliği;

$$\bar{I} = \frac{\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} dS(\theta, \varphi)}{\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sigma \cos \theta d\omega}$$

## 2.Bölüm: ort. Işınım yeğ. (devamı)

Daha önce bulunan  $dS(\theta, \varphi)$ 'nin ve  $d\omega$ 'nin değerleri yukarıdaki ifadede yerine konursa,

$$\bar{I} = \frac{\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I(\theta, \varphi) \sigma \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi}{\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sigma \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi}$$

## 2.Bölüm: ort. Işınım yeğ. (devamı)

$$\sin \theta = u, \quad du = \cos \theta \, d\theta$$

$$\theta = 0 \text{ için } u = 0; \quad \theta = \pi / 2 \text{ için } u = 1$$

$\int_0^1 u \, du$  'dan yararlanarak hesap sonucu,

$$\bar{I} = \frac{S^+}{\pi} = \frac{S}{\pi}$$

ve böylece  $\bar{I} \pi = S$  olduğu bulunur.