

Şekil 7.1.4b. Bant-sınırlı bir fonksiyonun genlik izgesi ve Nyquist frekansı (1.5 Hz) civarında katlanmanın oluşumu. Sağ alttaki küçük resimde Nyquist frekansı civarında görüntü büyütülmüştür. Katlanma sadece yüksek frekanslarda görülmektedir. Kırmızı renkli eğri sürekli verinin Fourier dönüşümü ($G(f) = 5/(1 + 2\pi f^2)$) ile tarak fonksiyonunun evrişimidir. Yeşil bölge sürekli fonksiyonun genlik izgesi değerleridir. Sarı bölge, yüksek frekansların, Nyquist frekansından küçük frekanslara katlanan genliklerdir. Mavi bölge, yeşil ve sarı bölgenin toplamından oluşan sonuç genlik değerleridir. Bu bölgedeki genlikler katlanma nedeni ile büyütülmüştür.

7.1.2. Sürekli Verinin Yeniden Kurulması

Sürekli bir veriyi, sayısal veriye dönüştüren (7.1.3) bağıntısı, sayısal veriden sürekli veriye bir yaklaşımı sağlayan (7.1.15) bağıntısında yerine yazılır,

$$g^*(t) = g_s(t) * \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k \cdot \Delta t) \cdot \delta(t - k \cdot \Delta t) \right] * \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t}$$

ve toplama ile evrişimin sırası değiştirilerek,

$$g^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [g(k \cdot \Delta t) \cdot \delta(t - k \cdot \Delta t)] * \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t},$$

elde edilebilir. Kaymış birim impuls ile evrişim özelliğinden,

$$g^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k.\Delta t) \cdot \frac{\sin(2\pi f_N(t - k.\Delta t))}{2\pi f_N(t - k.\Delta t)}$$

yazılabilir veya Nyquist frekansı yerine, örnekleme aralığı kullanıldığında,

$$g^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k.\Delta t) \cdot \frac{\sin[\pi(t - k.\Delta t) / \Delta t]}{[\pi(t - k.\Delta t) / \Delta t]} \quad (7.1.19)$$

sonucu bulunabilir. Aynı sonuç, (E3.1.2) bağıntısı ile verilen dikdörtgenlere yaklaştırma ile sayısal integral alma yönteminin, (7.1.15) sürekli evrişim integraline uygulanması ile de elde edilebilir.

(7.1.19) bağıntısı ile verilen evrişim işlemi ile herhangi bir t yatay eksen değerinde sürekli fonksiyona bir yaklaşımın elde edilmesine bir örnek Şekil 7.1.5'de görüntülenmiştir. Toplama işleminin sınırları $(+\infty; -\infty)$ olarak gösterilmekle birlikte, uygulamada sınırlı sayıda $g(k.\Delta t)$ değeri kullanılabilir. Eğer, negatif ve pozitif yatay eksen değerlerinde sırası ile p ve r adet sayısal veri tanımlı ise sürekli veriye bir yaklaşım için

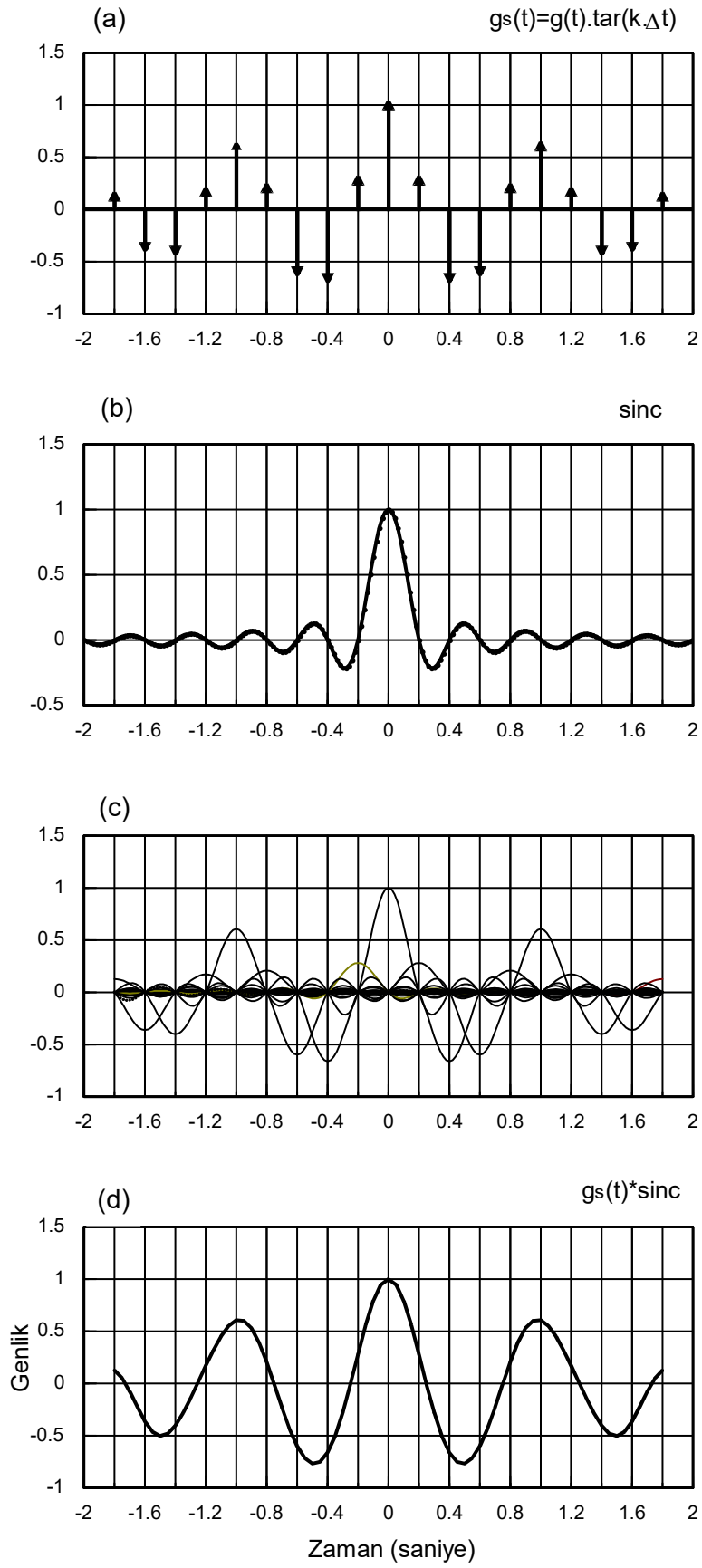
$$g^*(t) = \sum_{k=-p}^r g(k.\Delta t) \frac{\sin[\pi(t - k.\Delta t) / \Delta t]}{[\pi(t - k.\Delta t) / \Delta t]} \quad (7.1.20)$$

bağıntısı kullanılabilir. Merkezdeki sayısal veriyi de kapsamak üzere veri sayısı $n=p+r+1$ eşitliği ile verilebilir. Sayısal veri için $g_k = g(k.\Delta t)$ simgelemesi kullanılarak, aynı toplam izleyen biçimlerde de yazılabilir:

$$g^*(t) = \sum_{k=-p}^r g_k \frac{\sin[\pi(t - k.\Delta t) / \Delta t]}{\pi(t - k.\Delta t) / \Delta t} = \sum_{k=-p}^r g_k \frac{\sin[\pi(t / \Delta t - k)]}{\pi(t / \Delta t - k)}. \quad (7.1.21)$$

(7.1.21) toplamının öğeleri her k için zamana bağlı olarak ayrı ayrı görüntülenir ise dorukları $t = k.\Delta t$ örnekleme noktalarına yerleşen n adet sinc fonksiyonu elde edilir. $t = k.\Delta t$ iken, k numaralı sinc fonksiyonunun değeri birdir. Bu sinc fonksiyonu kendisine karşılık gelen $g(k.\Delta t)$ değeri ile çarpılarak ölçeklenir iken diğer örnekleme noktalarında sıfır değerini alırlar. Şekil 7.1.5c'de, Şekil 7.1.5a'da verilen sayısal verinin, Şekil 7.1.5b'de görüntülenenen sinc fonksiyonu ile evrişiminden elde edilen fonksiyonlar görülmektedir. Sayısal veri, n adet ise bu fonksiyonların sayısı da n kadar olacaktır. Herhangi bir t değişkeni için sinc fonksiyonlarının belirli bir değeri vardır ve sürekli veri bu değerlerin toplamı ile oluşturulur. Şekil 7.1.5d'de, n adet fonksiyonun toplamı ile elde edilen sürekli veri görülmektedir.

Sayısal veri kullanılarak herhangi bir t değişkenine karşılık gelen $g(t)$ sürekli verisi, (7.1.21) veya başka bir hesaplama ile yöntemi ile aynen elde edilemez. Birinci neden, $g(t)$ sürekli verisindeki Nyquist frekansından ($f_N = 1/(2.\Delta t)$) daha büyük frekanslı olayların, katlanma sonucu $g^*(t)$ yaklaştırma verisinde doğru olarak temsil edilememesidir. Yukarıda da değinildiği gibi bant-sınırlı fonksiyonların örneklenmesi bu nedenle daha başarılıdır. İkinci neden, sınırlı miktarda sayısal verinin örneklenmesidir. Sürekli fonksiyon, sayısal veriye dönüştürülür iken küçük ve büyük yatay eksen değerlerinden yeteri kadar veri örneklenmelidir. Yani, sürekli fonksiyon küçük ve büyük yatay eksen değerlerinde sıfıra yaklaşmalıdır. Bu tür fonksiyonlar **zaman-sınırlı** olarak adlandırılır. Eğer bir fonksiyon hızlı olarak sıfıra yaklaşır ise daha az sayıda sayısal veri ile temsil edilebilir. Ancak, örnekleme için her zaman sınırlı sayıda veri kullanılmak zorunluluğu bulunduğundan, sürekli veriye yapılan yaklaşım da belirli bir yanılğı içerir. Sonuç olarak, $g^*(t) - g(t)$ farkı hiçbir zaman sıfır yapılamamakla birlikte, bu fark nedeni ile oluşabilecek yanılığın en aza indirgenmeye çalışılır. Yukarıdaki işlemin daha iyi anlaşılabilmesi için Çizelge 7.1.1'deki yedi adet sayısal verinin kullanıldığı bir örnek verilecektir. Örnekleme aralığı $\Delta t = 0.5$ alınmıştır.



Şekil 7.1.5. Sayısal veri ve sinc fonksiyonunun evrişimi ile sürekli verinin yeniden kurulması.

Çizelge 7.1.1. Sıra numaraları ve yatay eksen değerleri verilen bir sayısal veri. Örneklem aralığı 0.5 olarak verilmiştir.

Sıra No	Yatay Eksen	Veri Değeri
-3	-1.5	0.105
-2	-1.0	0.368
-1	-0.5	0.779
0	0.	1.
1	0.5	0.779
2	1.0	0.368
3	1.5	0.105

Çizelge 7.1.1'deki veri, ölçülen veriyi temsil eden bir **sınama verisi**dir ve $\exp(-t^2)$ bağıntısından hesaplanarak, Şekil 7.1.6a'da görüntülenmiştir. Bu tür yapay yaratılmış veriler ile sayısal yöntemlerin hangi doğrulukta çalıştığı anlaşılabilir. Eğer, sayısal yöntem doğru çalışmakta ise fonksiyonun kendisinden hesaplanan sayısal değerlere yakın sonuçlar üretilecektir. Değişkenin 0.25 değeri için sürekli fonksiyona bir yaklaşım (7.1.20) bağıntısından,

$$g^*(0.25) = \sum_{k=-3}^3 g(k \cdot \Delta t) \cdot \frac{\sin[\pi(0.25 - k \cdot 0.5) / 0.5]}{[\pi(0.25 - k \cdot 0.5) / 0.5]}$$

şeklinde yazılabilir. Toplamın açılması ile

$$\begin{aligned} g^*(0.25) &= g(-1.5) \cdot \frac{\sin[\pi(0.25 - (-3) \cdot 0.5) / 0.5]}{[\pi(0.25 - (-3) \cdot 0.5) / 0.5]} + g(-1.) \cdot \frac{\sin[\pi(0.25 - (-2) \cdot 0.5) / 0.5]}{[\pi(0.25 - (-2) \cdot 0.5) / 0.5]} \\ &+ g(-0.5) \cdot \frac{\sin[\pi(0.25 - (-1) \cdot 0.5) / 0.5]}{[\pi(0.25 - (-1) \cdot 0.5) / 0.5]} + g(0) \cdot \frac{\sin[\pi(0.25 - (0) \cdot 0.5) / 0.5]}{[\pi(0.25 - (0) \cdot 0.5) / 0.5]} \\ &+ g(0.5) \cdot \frac{\sin[\pi(0.25 - (1) \cdot 0.5) / 0.5]}{[\pi(0.25 - (1) \cdot 0.5) / 0.5]} + g(1.) \cdot \frac{\sin[\pi(0.25 - (2) \cdot 0.5) / 0.5]}{[\pi(0.25 - (2) \cdot 0.5) / 0.5]} \\ &+ g(1.5) \cdot \frac{\sin[\pi(0.25 - (3) \cdot 0.5) / 0.5]}{[\pi(0.25 - (3) \cdot 0.5) / 0.5]} \end{aligned}$$

elde edilir. Sadeleştirmeler yapılarak,

$$\begin{aligned} g^*(0.25) &= g(-1.5) \cdot \frac{\sin[3.5\pi]}{3.5\pi} + g(-1.) \cdot \frac{\sin[2.5\pi]}{2.5\pi} + g(-0.5) \cdot \frac{\sin[1.5\pi]}{1.5\pi} + g(0) \cdot \frac{\sin[0.5\pi]}{0.5\pi} \\ &+ g(0.5) \cdot \frac{\sin[0.5\pi]}{0.5\pi} + g(1.) \cdot \frac{\sin[1.5\pi]}{1.5\pi} + g(1.5) \cdot \frac{\sin[2.5\pi]}{2.5\pi}, \end{aligned}$$

ve veri ve sinc değerlerinin yerine yazılması ile

$$g^*(0.25) = 0.105*(-0.0909) + 0.368*0.1273 + 0.779*(-0.2122) + 1.*0.6366$$

$$+ 0.779*0.6366 + 0.368*(-0.2122) + 0.105*0.1273$$

$$g^*(0.25) = -0.00954450 + 0.0468464 - 0.165304 + 0.6366 + 0.495911 - 0.0780896 + 0.0133665$$

$$g^*(0.25) = 0.939786$$

elde edilir. Bu örnekte ölçülen veri temsili olup, $\exp(-t^2)$ fonksiyonundan hesaplanan bir sınama verisidir. Yukarıda hesaplanan değer ile $\exp(-0.25 * 0.25) = 0.939413$ değerinin karşılaştırılması ile oldukça doğru bir sonuca erişildiği görülebilir. Sırası ile Şekil 7.1.6a ve b'den görülebileceği gibi verimiz hem zaman-sınırlı hem de bant-sınırlıdır. (7.1.21) bağıntısından ve Gaussian fonksiyonundan hesaplanan değerler arasındaki küçük fark, sınırlı sayıda veri kullanılmasından kaynaklanmaktadır. Çizelge 7.1.2'de, çeşitli yatay eksen değerlerinde, (7.1.21) toplamından ve sınama fonksiyonundan hesaplanan değerler verilmiştir. Şekil 7.1.6a'da, ölçülen veriyi temsil eden sınama verisi ve yatay eksenin ara değerlerinde sürekli verinin kurulması gösterilmiştir. Şekil 7.1.6b'de Gaussian fonksiyonunun, Şekil 7.1.6c'de ise örneklenmiş değerlerden kurulan yaklaşıma fonksiyonunun Fourier dönüşümü görülmektedir. Aradaki fark sadece yeniden kurulan $G^*(f)$ fonksiyonunda, Nyquist frekansından daha büyük frekanslı bileşenlerinin daha küçük frekanslara taşınmış olmasıdır.

(7.1.21) toplamı ile yapılan işlem, sayısal matematikte **ara değer bulma** olarak adlandırılır. Eğer, yatay eksen değeri olarak örnekleme noktalarından biri seçilir ise yine bu noktadaki sayısal değer elde edileceği kolaylıkla görülebilir. Yukarıdaki sayısal veride, yeniden kurma için yatay eksen değeri $t=1.0$ seçilir ise

$$\frac{t}{\Delta t} = \frac{1.0}{0.5} = 2$$

olduğundan, (7.1.21) bağıntısından,

$$g^*(1.0) = g(-1.5) \cdot \frac{\sin[\pi(2 - (-3))]}{\pi(2 - (-3))} + g(-1) \cdot \frac{\sin[\pi(2 - (-2))]}{\pi(2 - (-2))} + g(-0.5) \cdot \frac{\sin[\pi(2 - (-1))]}{\pi(2 - (-1))} \\ + g(0) \cdot \frac{\sin[\pi(2 - (0))]}{\pi(2 - (0))} + g(0.5) \cdot \frac{\sin[\pi(2 - 1)]}{\pi(2 - 1)} + g(1) \cdot \frac{\sin[\pi(2 - 2)]}{\pi(2 - 2)} + g(2) \cdot \frac{\sin[\pi(2 - 3)]}{\pi(2 - 3)}$$

yazılabilir. Sinüs fonksiyonu, π değerinin tam katlarında sıfır olduğundan, yukarıdaki bütün sinc terimlerinin payları sıfır olur. Ancak, $g(1)$ değeri ile çarpılan sinc fonksiyonunun paydası da sıfır olduğundan,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin[x]}{x} = \frac{\sin[\pi(2 - 2)]}{\pi(2 - 2)} = 1.$$

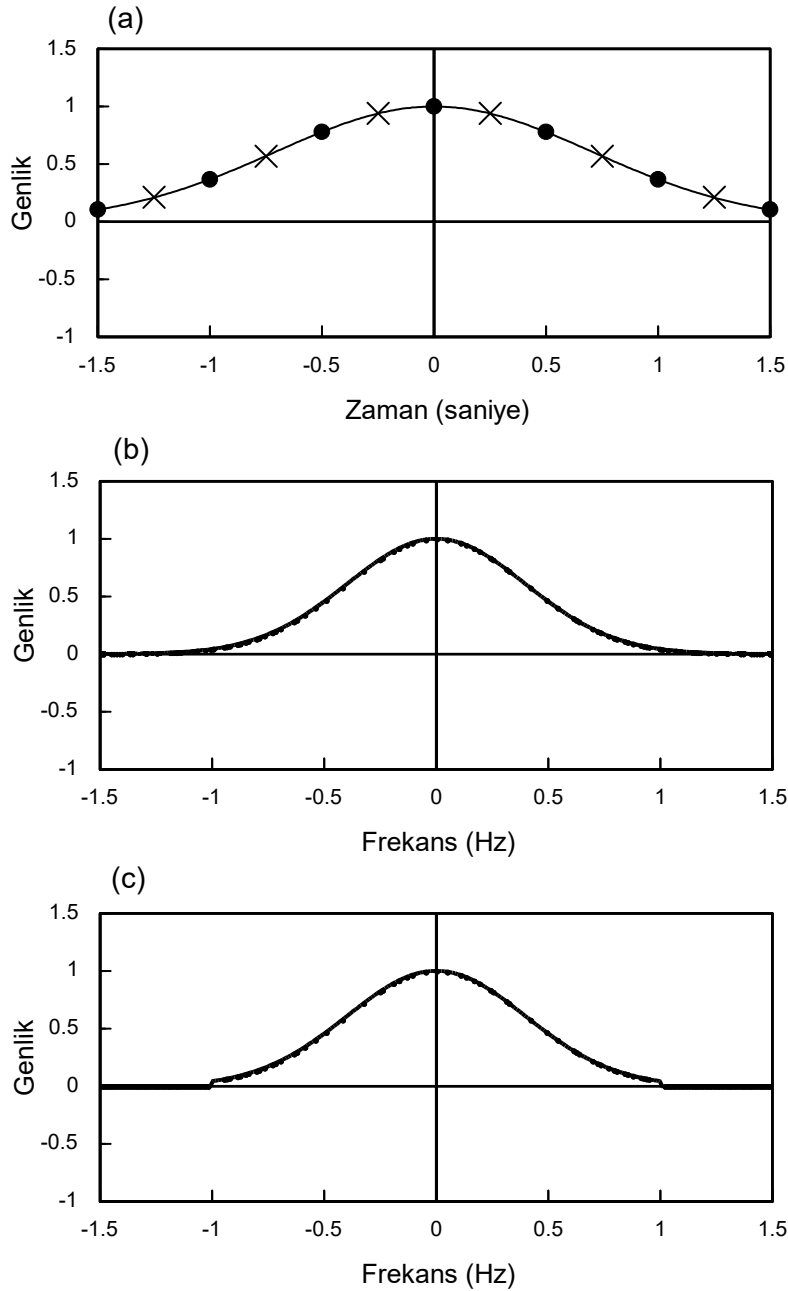
limiti ile $t=1.0$ noktasındaki yaklaşıma değerinin, o noktadaki sayısal değere eşit olduğu görülebilir:

$$g^*(1.0) = 0. + 0. + 0. + 0. + g(1.0) \cdot \frac{\sin[\pi(2 - 2)]}{\pi(2 - 2)} + 0. + 0.$$

$$g^*(1.0) = g(1.0).$$

Çizelge 7.1.2. Çizelge 7.1.1 de verilen sayısal veriden ara yatay eksen değerlerinde yaklaştırma fonksiyonunun kurulması ve sürekli veri ile karşılaştırılması.

Yatay Eksen	Yeniden Kurulan Veri	Sürekli Veri	% Bağıl Yanılgı
-1.25	0.212450	0.209611	-1.35400
-0.75	0.568585	0.569783	0.210275
-0.25	0.939761	0.939413	-0.0370097
0.25	0.939761	0.939413	-0.0370160
0.75	0.568585	0.569783	0.210275
1.25	0.212450	0.209611	-1.35400



Şekil 7.1.6. (a) Sayısal veriden (siyah noktalar), örnekleme kuramı ile ara değer hesaplanması (çarpı işaretleri), sürekli veri, sürekli çizgi ile gösterilmiştir. (b) Sürekli verinin Fourier dönüşümü. (c) yeniden kurma ile hesaplanan yaklaştırma fonksiyonunun Fourier dönüşümü.

Örnekleme kuramına başka bir örnek $\exp(-t^2) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ fonksiyonu ile sına ma verisi yaratılarak verilecektir. Örnekleme aralığı $\Delta t = 0.5$ sn ve kosinüsün frekansı (f_0) 1 Hz alınarak, yatay eksen değerleri -1.5 ile 1.5 arasında değişen yedi adet sayısal değer Çizelge 7.1.3'de verilmiştir. Çizelge 7.1.4'de ise çeşitli yatay eksen değerleri için yeniden kurulan veri görülmektedir. Yeniden kurulan veri ile sürekli veri değerleri arasındaki yüzde bağıl yanılğı oldukça büyüktür. Şekil 7.1.7a'da ise sürekli veri, sayısal veri ve ondan yeniden kurulan veri görülmektedir. Gaussian fonksiyonunun Fourier dönüşümünü veren (4.2.19) bağıntısından,

$$\exp(-\pi t^2) \leftrightarrow \exp(-\pi f^2)$$

yazılabilir. Gaussian fonksiyonu zaman bölgesinde kosinüs fonksiyonu ile çarpıldığından, frekans bölgesinde kaymış birim impuls ile evriştirilmelidir:

$$\exp(-\pi t^2) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \exp(-\pi f^2) * \frac{1}{2} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)].$$

Frekans bölgesinde evrişim işleminin gerçekleştirilmesi ile sürekli verinin Fourier dönüşümünün, $\mp f_0$ frekanslarına kaymış iki adet Gaussian fonksiyonundan oluştuğı anlaşılır:

$$\exp(-\pi t^2) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \left\{ \exp[-\pi(f + f_0)^2] + \exp[-\pi(f - f_0)^2] \right\}.$$

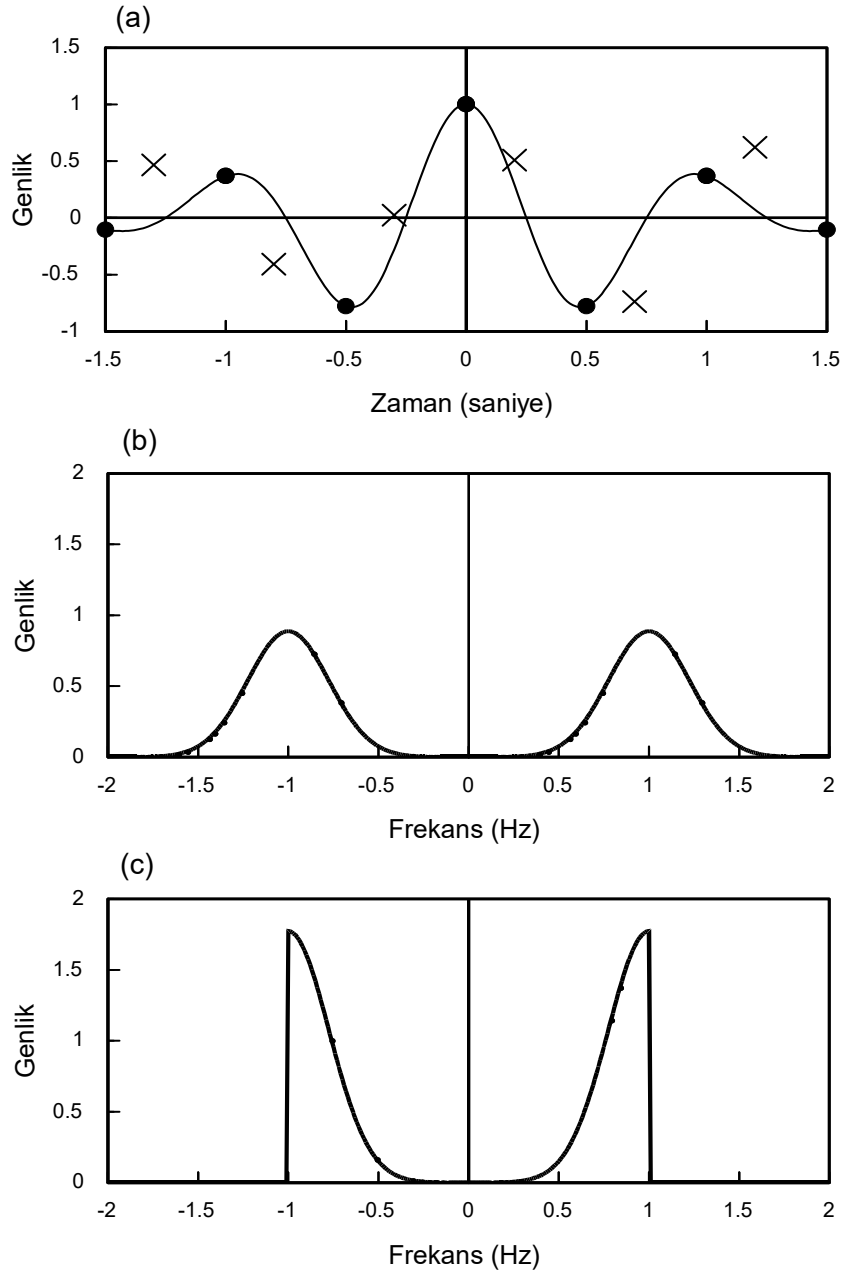
Şekil 7.1.7b'den de görüldüğü gibi genlik izgesi bant-sınırlıdır ve yaklaşık 1.75 Hz civarında sıfıra yaklaşmaktadır. Şekil 7.1.7c de ise yeniden kurulan verinin Fourier dönüşümü verilmiştir ve katlanma nedeni ile sürekli verinin Fourier dönüşümüne benzememektedir. Bunun nedeni, Nyquist frekansı

$$f_N = 1 / 2 \cdot \Delta t = 1 / (2 * 0.5) = 1 \text{ Hz},$$

iken, (7.1.18) kuralı gereği $\mp(2.1 - 1) = \mp 1$ Hz frekansında geri katlanmasıdır. Yani, 2 ile 1 Hz arasındaki genlik değerleri Nyquist frekansına bir ayna konulmuş gibi ters dönerek 0 ile 1 Hz arasındaki genlik değerleri üzerine katlanırlar. Böylece, Şekil 7.1.7c'de görüldüğü gibi -1 ile 1 Hz arasında genlik değerleri gerçek değerlerden daha büyüktür.

Çizelge 7.1.3. Sıra numaraları ve yatay eksen değerleri verilen bir sayısal veri. Örnekleme aralığı 0.5 olarak verilmiştir.

Sıra No	Yatay Eksen	Veri Değeri
-3	-1.5	-0.105399
-2	-1.0	0.367879
-1	-0.5	-0.778801
0	0.0	1.00000
1	0.5	-0.778801
2	1.0	0.367879
3	1.5	-0.105399



Şekil 7.1.7. Sayısal veriden (siyah noktalar, $\Delta t = 0.5$), örnekleme kuramı ile ara değer hesaplanması (çarpı işaretleri), sürekli veri, sürekli çizgi ile gösterilmiştir. (b) Sürekli verinin Fourier dönüşümü. (c) yeniden kurma ile hesaplanan yaklaştırma fonksiyonunun Fourier dönüşümü.

Çizelge 7.1.4. Çizelge 7.1.3 de verilen sayısal veriden ara yatay eksen değerlerinde veri kurulması ve sürekli veri ile karşılaştırılması.

Yatay Eksen	Yeniden Kurulan Veri	Sürekli Veri	% Bağıl Yanılgı
-1.3	0.465033	-0.0570196	915.568
-0.8	-0.409491	0.162942	351.310
-0.3	0.0213416	-0.282420	107.557
0.2	0.506198	0.296900	-70.4942
0.7	-0.738341	-0.189312	-290.013
1.2	0.620347	0.0732145	-747.301

Çizelge 7.1.5'de, aynı fonksiyonun toplam zaman aralığı sabit (3 sn) kalmak üzere $\Delta t = 0.3$ sn örnekleme aralığı ile sayısallaştırılmış değerleri görülmektedir. Çizelge 7.1.6'da, çeşitli zaman değerlerinde yeniden kurulan veri ile sürekli verinin karşılaştırılması verilmiştir. Yüzde bağıl yanılgı oldukça küçük olup, yeniden kurma işlemi başarılıdır. Şekil 7.1.8b'de sürekli fonksiyonun Fourier dönüşümü görülmektedir ve genlik değerleri daha önce de değinildiği gibi yaklaşık 1.75 Hz frekansından sonra sifira yaklaşmaktadır. Fonksiyon bant-sınırlıdır. Nyquist frekansı,

$$f_N = 1 / 2 \cdot \Delta t = 1 / (2 \cdot 0.3) = 3.3333 \text{ Hz}$$

olarak bulunabilir ve genlik izgesinin sifira yaklaştığı frekanslara göre büyüktür. Böylece, katlanma nedeni ile $(-f_N; +f_N)$ aralığına başka frekanslardan genlik değerleri taşınmaz. Şekil 7.1.8c'de görüldüğü gibi yaklaştırma fonksiyonunun Fourier dönüşümü ile sürekli verinin Fourier dönüşümü hemen hemen eşittir. Yukarıda verilen örneklerde, sürekli veriler bir fonksiyon ile temsil edildiğinden, sayısal veriden yeniden kurulan veriler ile karşılaştırılabilir ve yeniden kurma işleminin doğruluğu sınanabilir. Gerçek uygulamalarda örnekleme değerleri doğal veya deneysel süreçleri temsil ettiğinden, yeniden kurulan verinin hangi doğrulukta hesaplandığı, başka bir deyiş ile sürekli veriye doğru bir yaklaşımın yapılıp, yapılmadığı bilinemez. Ancak, burada verilen örneklerden de anlaşılacağı gibi sayısallaştırılmış herhangi bir veride, Nyquist frekansından daha büyük frekanslı olayların daha küçük frekanslara taşındığı bilinmelidir.

Çizelge 7.1.5. Sıra numaraları ve yatay eksen değerleri verilen bir sayısal veri. Örnekleme aralığı 0.3 olarak verilmiştir.

Sıra No	Yatay Eksen	Veri Değeri
-5	-1.5	-0.105399
-4	-1.2	0.0732145
-3	-0.9	0.359898
-2	-0.6	-0.564432
-1	-0.3	-0.282420
0	0.0	1.00000
1	0.3	-0.282421
2	0.6	-0.564431
3	0.9	0.359898
4	1.2	0.0732145
5	1.5	-0.105399

Çizelge 7.1.6. Çizelge 7.1.5 de verilen sayısal veriden ara yatay eksen değerlerinde veri kurulması ve sürekli veri ile karşılaştırılması.

Yatay Eksen	Yeniden Kurulan Veri	Sürekli Veri	% Bağlı Yanılgı
-1.3	-0.0551185	-0.0570196	3.334
-1.0	0.366604	0.367879	0.347
-0.7	-0.188442	-0.189312	0.459
-0.4	-0.689897	-0.689399	-0.072
-0.1	0.801093	0.800967	-0.016
0.2	0.297150	0.296900	-0.084
0.5	-0.779423	-0.778801	-0.080
0.8	0.163940	0.162943	-0.612
1.1	0.239807	0.241246	0.597
1.4	-0.111668	-0.113957	2.009
1.7	-0.0551185	-0.0570196	3.33

7.1.3. Örnekleme ile İlgili Uygulamalar

Örnekleme aralığı seçiminin sayısallaştırmadaki önemini göstermek amacı ile çeşitli uygulamalar aşağıda verilmiştir. Bunun için, birincisi Gaussian fonksiyonu ile kosinüs fonksiyonunun çarpımı ve ikincisi iki sinüzoidal toplamı olan iki fonksiyon örneklenecek ve örnekleme değerlerinden bu veriler yeniden kurulmaya çalışılacaktır.

Şekil 7.1.9'da, $\exp(-\pi t^2) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ fonksiyonunun sayısallaştırılması ve yeniden kurulan veri görüntülenmiştir. Şekil 7.1.10'da ise işlem frekans bölgesinde görüntülenmiştir. Sürekli fonksiyonun ve yeniden kurulan verinin Fourier dönüşümleri birbirine benzememektedir. Şekil 7.1.10'dan, Şekil 7.1.16'ya kadar verilen örneklerde, Gaussian fonksiyonu ile kosinüs fonksiyonunun çarpımı kullanılarak örnekleme işleminin kuralları gösterilmeye çalışılmıştır.

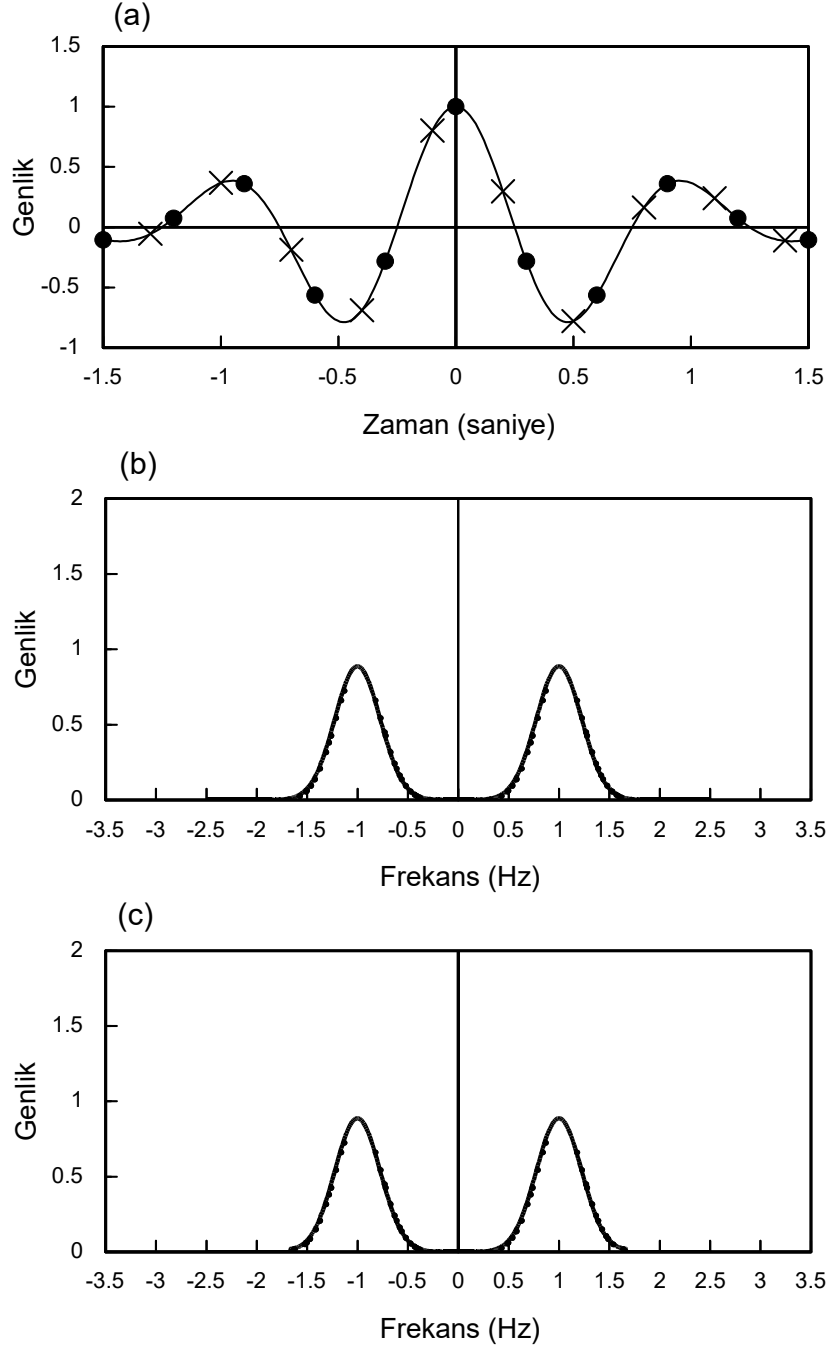
Şekil 7.1.17 ve izleyen görüntülerde, iki adet sinüzoidal fonksiyonun toplamı örnek olarak verilmiştir. Şekil 7.17'de birinci sinüzoidal frekansı, a ve b katsayıları, sırası ile 1, 1.5 ve 1.5 ile ikinci sinüzoidal frekansı, a ve b katsayıları ise 4, -1 ve -1 olarak verilmiştir. Örnekleme aralığı 1 sn ve Nyquist frekansı 0.5 Hz'dir. Her iki sinüzoidalde sıfır frekansına katlanmıştır. a katsayılarının katlanmasından $(0.75-0.5) \times 2 = 0.5$ genliği ve b katsayılarının katlanmasından sıfır genliği elde edilmiştir. Çünkü b katsayıları tek fonksiyon olduğundan $(b(-f) = -b(f))$ katlandıklarında işaret değiştirmektedirler. Şekil 7.1.17 ve Şekil 7.1.18'de sırası ile zaman bölgesinde ve frekans bölgesinde sıfır frekansına katlanma nedeni ile oluşan sabit görülmektedir. Bu sonuç, her iki sinüzoidal frekansının örnekleme aralığına karşılık gelen Nyquist frekansının tam katı olması nedeni ile elde edilmiştir. Bu koşul olduğu sürece örnekleme ile bir sabit üretilir. Yani ana periyodun tam katına eşit olan bütün örnekleme aralıkları için sabit bir değer elde edilir.

Şekil 7.1.19 ve 7.1.20'de sırası ile zaman ve frekans bölgelerinde, frekansları yukarıda verilen iki sinüzoidal toplamının, $\Delta t = 0.5$ sn örnekleme aralığı ile sayısallaştırılması ve sayısal veriden yeniden kurulması görüntülenmiştir. Nyquist frekansı 1 Hz olduğundan, frekansı 1 Hz olan sinüzoidal veride temsil edilebilir. 4 Hz frekanslı sinüzoidal ise sıfır frekansına katlanarak, a katsayısı için -1 ve b katsayısı için sıfır sabitini oluşturmuştur. Örnekleme ile -1 sabiti ile frekansı 1 Hz olan bir sinüzoidal toplamı elde edilmiştir.

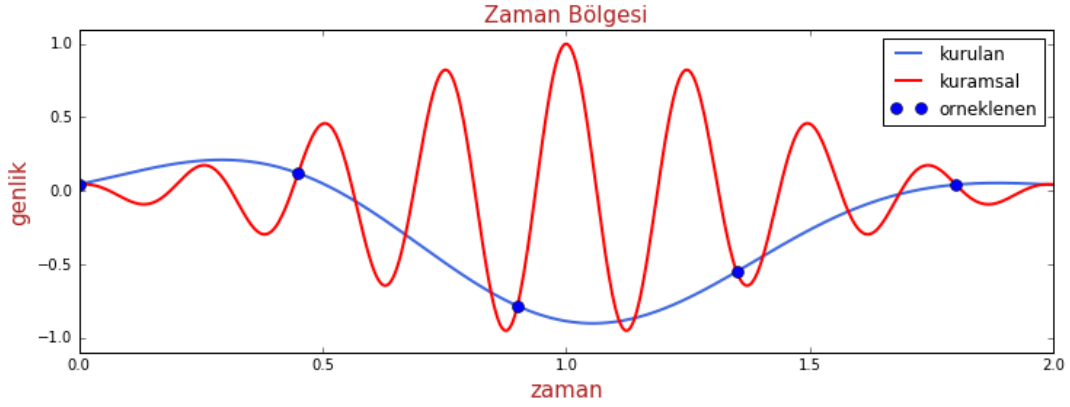
Şekil 7.1.21 ve 7.1.22'de, iki sinüzoidal toplamından oluşan sına verisinin (kırmızı), $\Delta t = 0.15$ sn örnekleme aralığı ile sayısallaştırılması ve sayısal veriden yeniden kurulması görüntülenmiştir. Nyquist frekansı 3.33 Hz'dir. 1 Hz frekanslı bileşen Nyquist frekansından küçük olduğundan,

katlanma oluşmaz ve sürekli ve yeniden kurulan verilerin izgeleri bu frekansta aynıdır. 4 Hz frekansı Nyquist frekansından büyük olduğundan, $2 \times 3.33 - 4 = 2.66$ frekansında katlanma oluşur ve örnekleme ile 1 Hz ve 2.66 Hz frekanslarındaki iki sinüzoidalın toplamından oluşan bir dönemsel veri elde edilir.

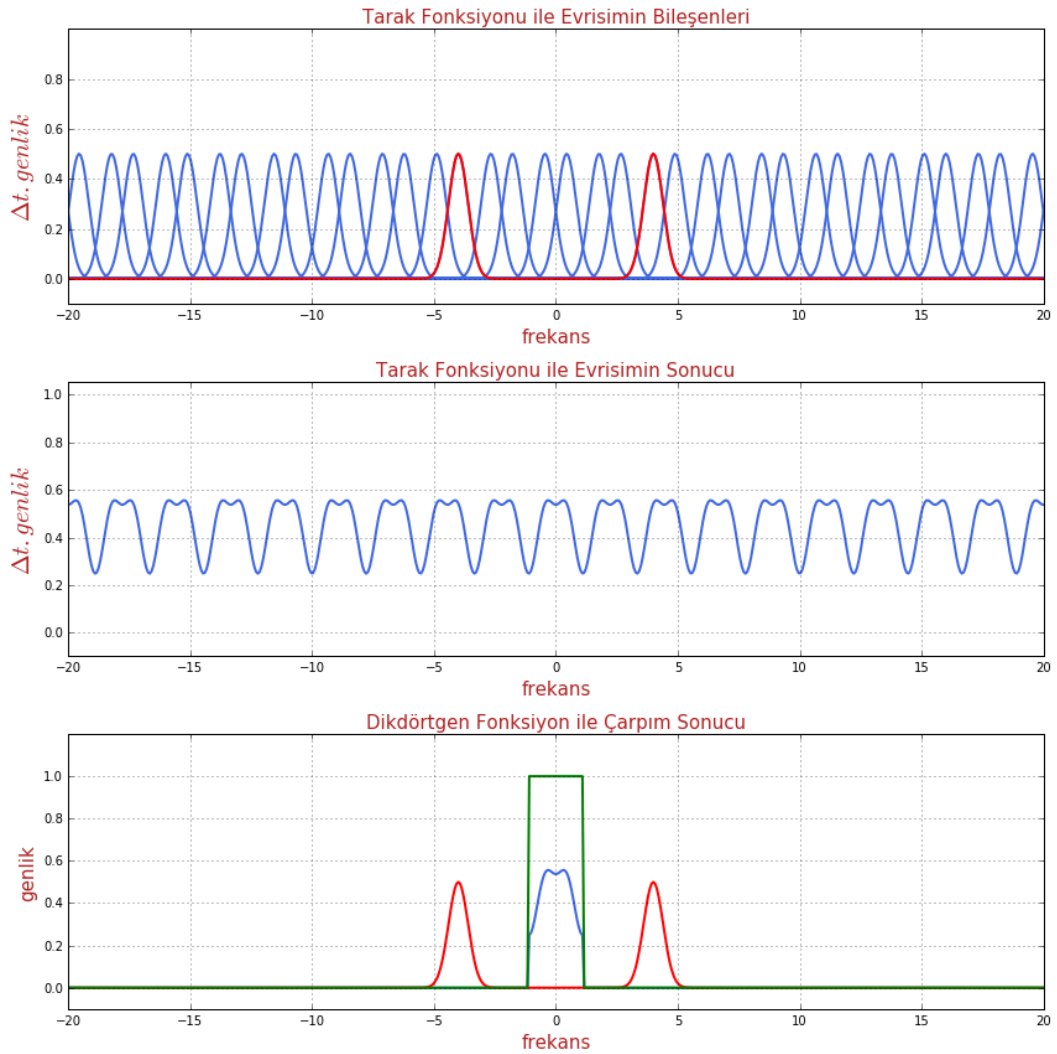
Şekil 7.1.23 ve 7.1.24'de zaman ve frekans bölgelerinde $\Delta t = 0.1$ sn örnekleme aralığı ile sayısallaştırılması verilmiştir. Nyquist frekansı 5 Hz'dir ve sinüzoidalı oluşturan 1 ve 4 Hz frekanslarından büyüktür. Bu nedenle zaman ve frekans bölgelerinde sürekli veri ile yeniden kurulan veri ve onların izgeleri birbiri ile örtüşmektedir.



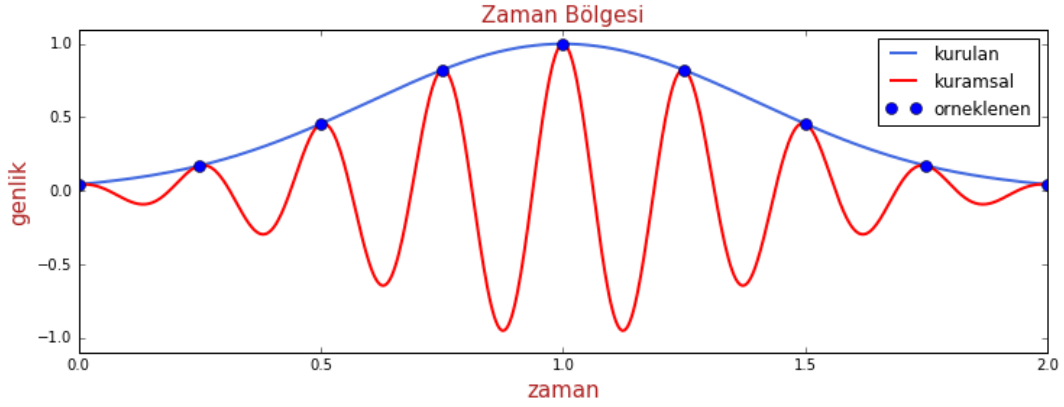
Şekil 7.1.8. Sayısal veriden (siyah noktalar, $\Delta t = 0.3$), örnekleme kuramı ile ara değer hesaplanması (çarpı işaretleri), sürekli veri, sürekli çizgi ile gösterilmiştir. (b) Sürekli verinin Fourier dönüşümü. (c) yeniden kurma ile hesaplanan yaklaştırma fonksiyonunun Fourier dönüşümü.



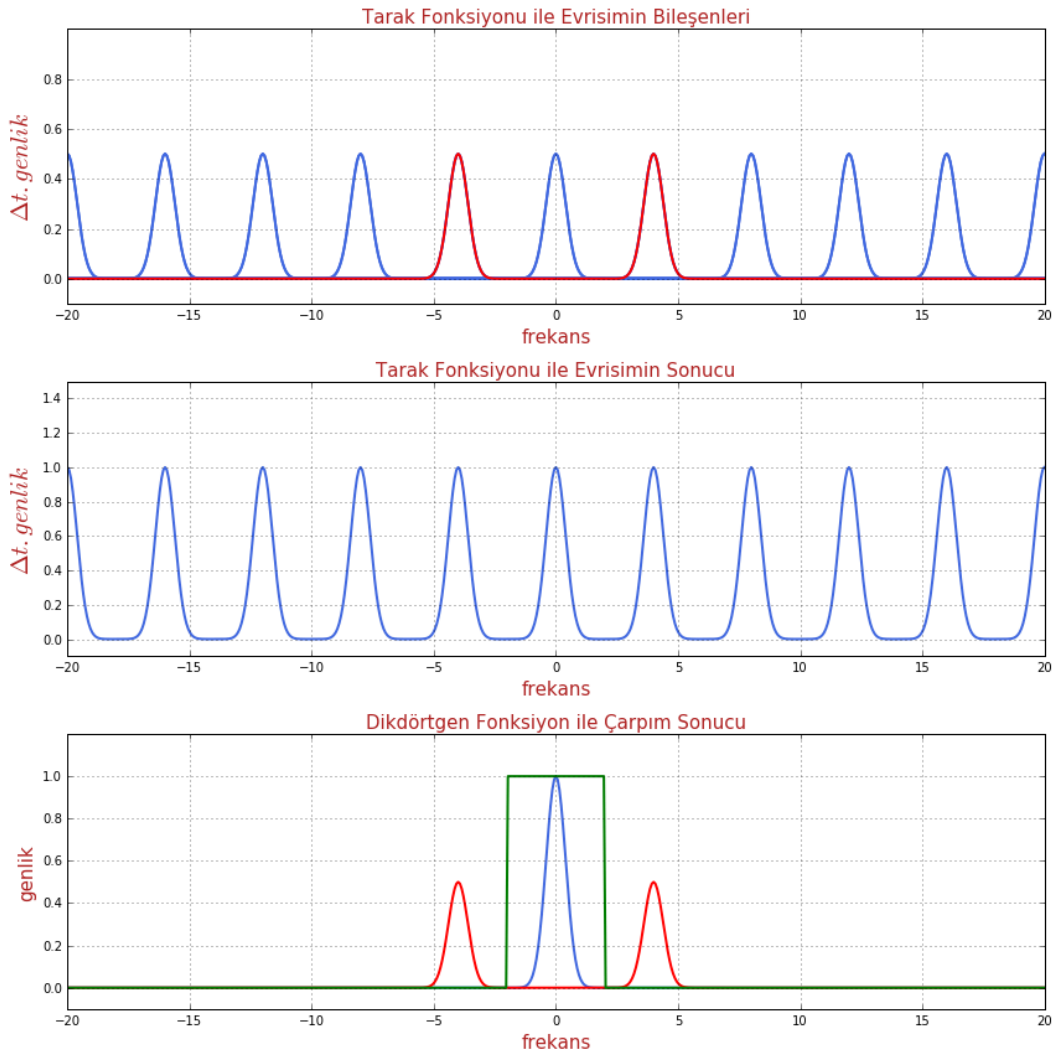
Şekil 7.1.9. Kırmızı renk ile gösterilen $\exp(-\pi t^2) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ fonksiyonunun $\Delta t = 0.45$ örnekleme aralığı ile sayısallaştırılması ve sayısal veriden yeniden kurulması. Lacivert noktalar sayısal veriyi ve mavi eğri yeniden kurulan veriyi göstermektedir. İlk fonksiyona geri dönülememektedir ($f_0 = 4$ Hz).



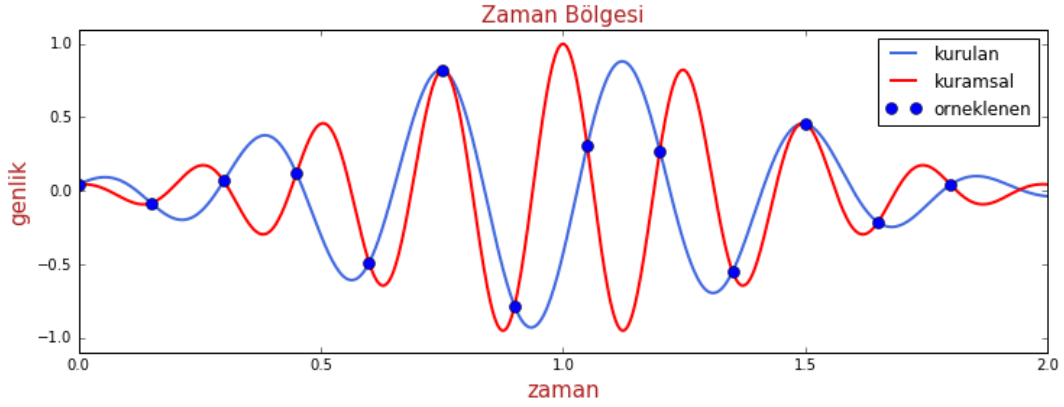
Şekil 7.1.10. En üstte tarak fonksiyonu ile evrisim sonucu frekans bölgesinde katlanmanın oluşumu. Kırmızı renkli bileşen tarak fonksiyonunda sıfır frekanslı birim impuls ile sürekli verinin Fourier dönüşümünden elde edilmiştir. Ortada katlanan izgelerin toplamı ve en altta Nyquist frekansının iki katı genişliğindeki dikdörtgen fonksiyon (yeşil) ile çarpım sonucu yeniden kurulan verinin Fourier dönüşümünün elde edilmesi (mavi). Sürekli verinin izgesi dikdörtgenin dışında kalmaktadır (kırmızı).



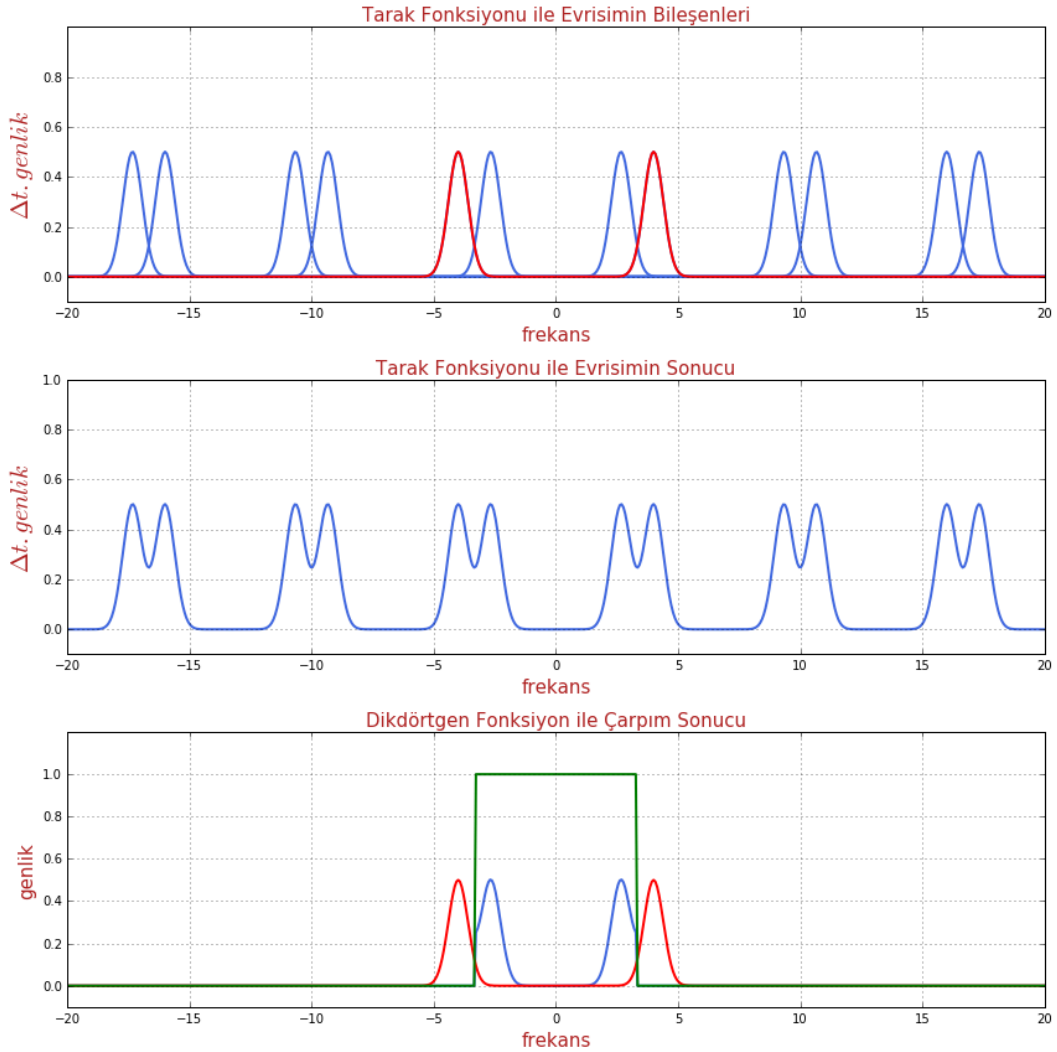
Şekil 7.1.11. $\exp(-\pi t^2) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ fonksiyonunun $\Delta t = 0.25$ örnekleme aralığı ile sayısallaştırılması ve sayısal veriden yeniden kurulması. İlk fonksiyona geri dönülememekte ve bir Gaussian fonksiyonu elde edilmektedir ($f_0 = 4$ Hz).



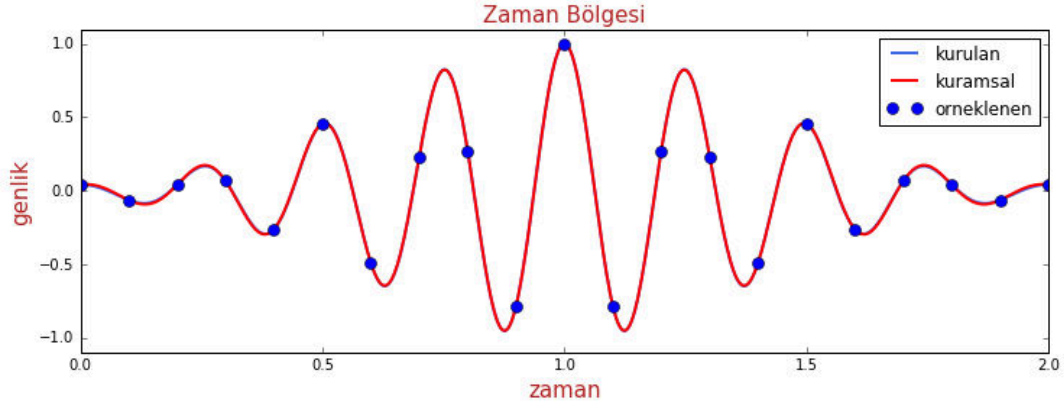
Şekil 7.1.12. Şekil 7.1.11'de zaman bölgesinde verilen işlemin frekans bölgesinde gösterimi. Gaussian fonksiyonunun dönüşümü yine kendisi olduğundan her iki bölgede de Gaussian elde edilmiştir.



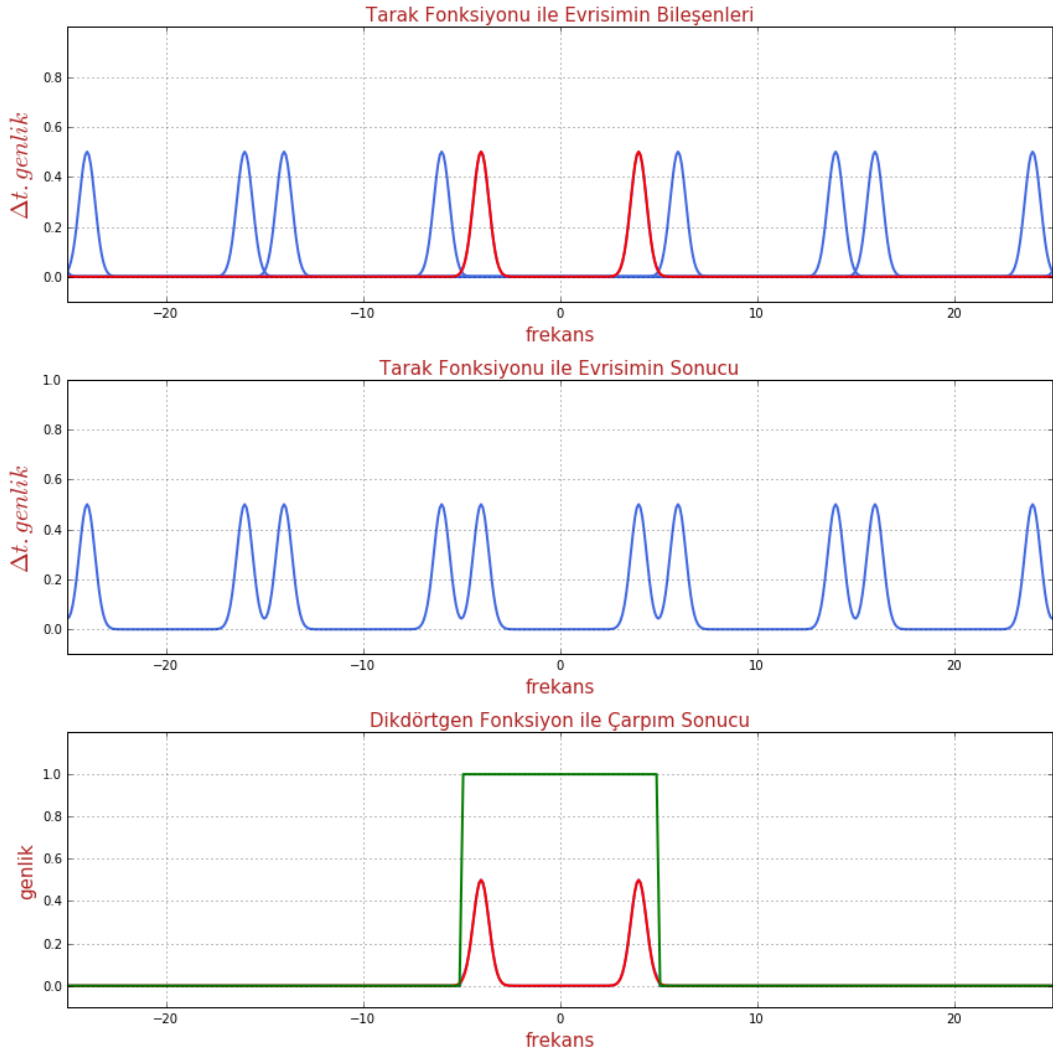
Şekil 7.1.13. $\exp(-\pi t^2) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ fonksiyonunun $\Delta t = 0.15$ örnekleme aralığı ile sayısallaştırılması ve sayısal veriden yeniden kurulması. İlk fonksiyonun yeniden kurulamamıştır ($f_0 = 4$ Hz).



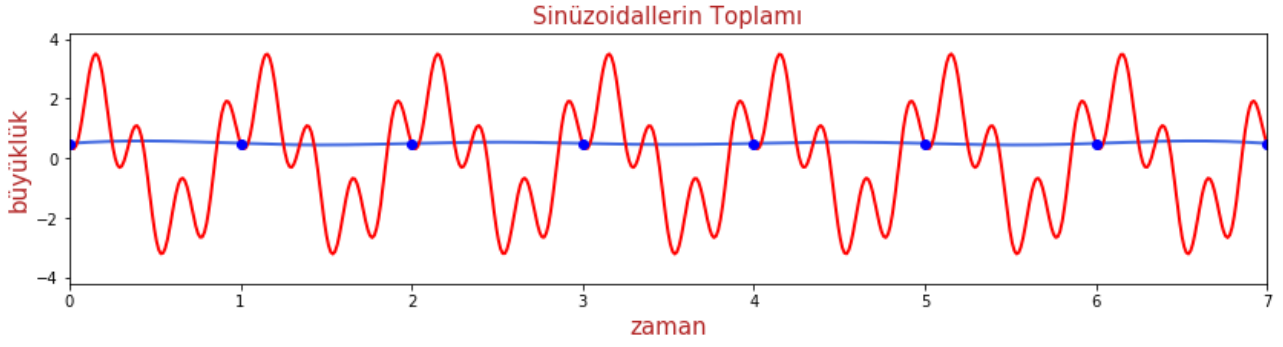
Şekil 7.1.14. Şekil 7.1.13'de zaman bölgesinde verilen işlemin frekans bölgesinde gösterimi. Nyquist frekansı, sürekli verinin genlik izgesinin sıfıra yaklaştığı frekans değerlerinden küçüktür ve katlanma oluştuğundan yeniden kurulan veri ile sürekli veri farklıdır.



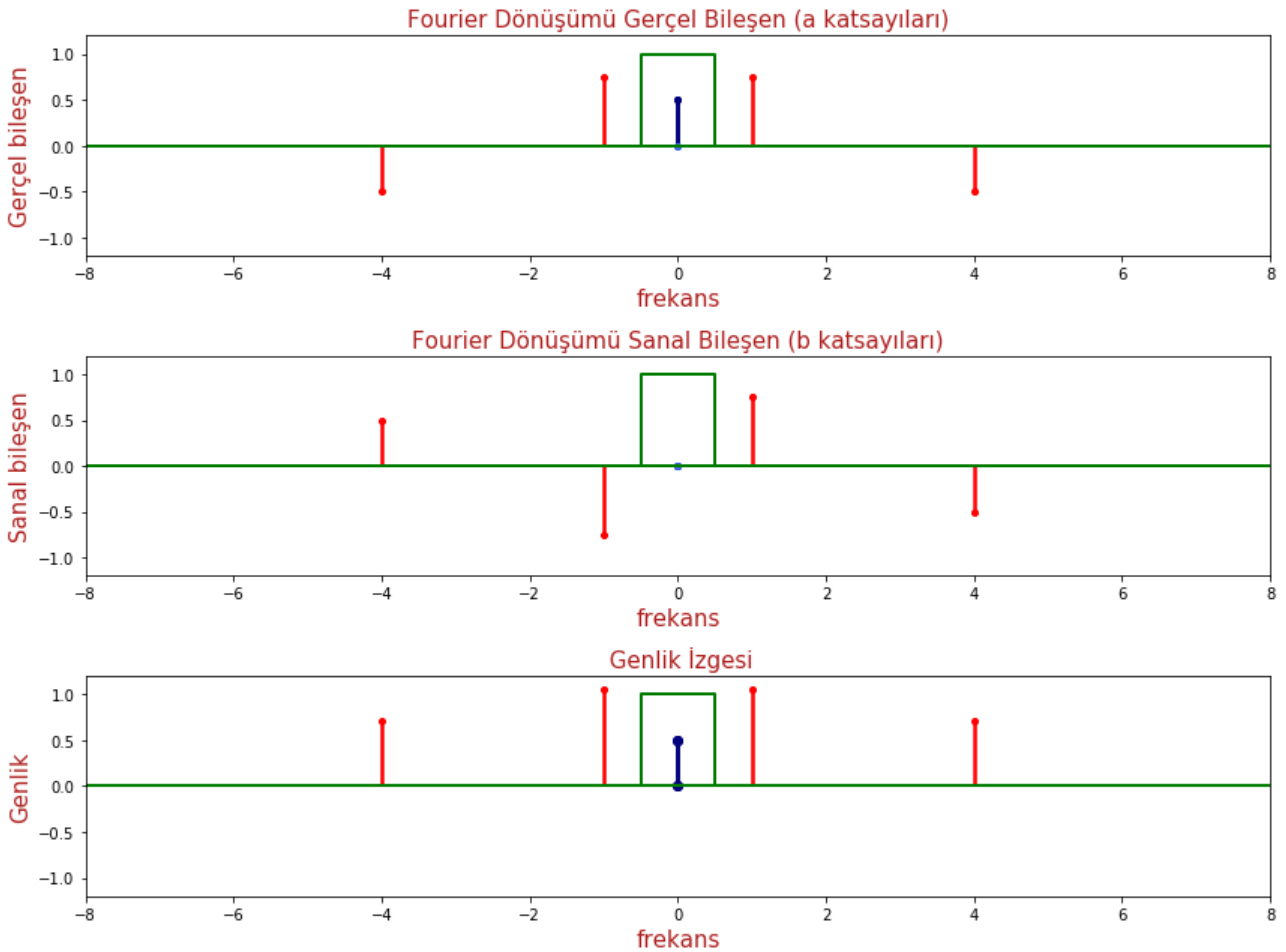
Şekil 7.1.15. $\exp(-\pi t^2) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ fonksiyonunun $\Delta t = 0.1$ örnekleme aralığı ile sayısallaştırılması ve sayısal veriden yeniden kurulması. İlk fonksiyonun yeniden kurulmuştur ($f_0 = 4$ Hz).



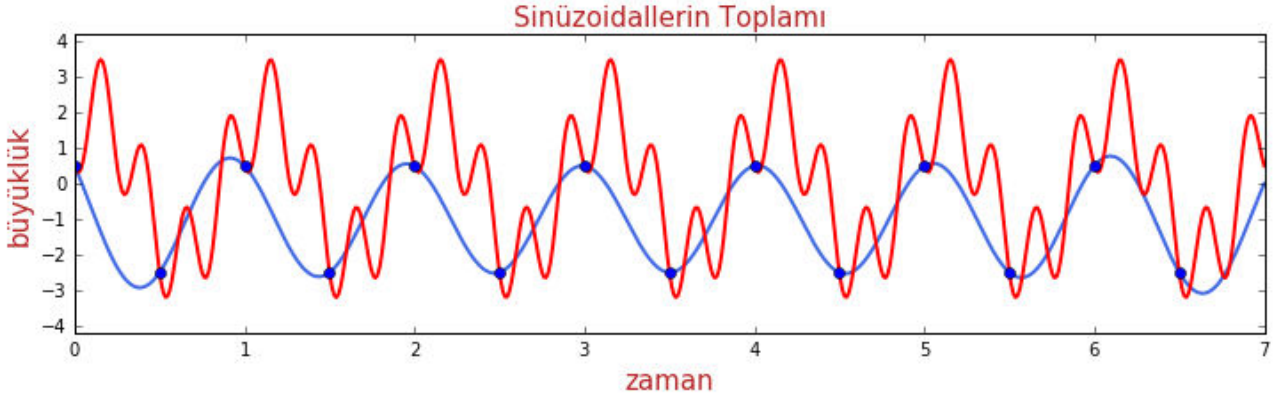
Şekil 7.1.16. Şekil 7.1.15'de zaman bölgesinde verilen işlemin frekans bölgesinde gösterimi. Nyquist frekansı yeteri kadar büyük olduğundan sürekli ve yeniden kurulan verilerin Fourier dönüşümleri yaklaşık olarak aynıdır.



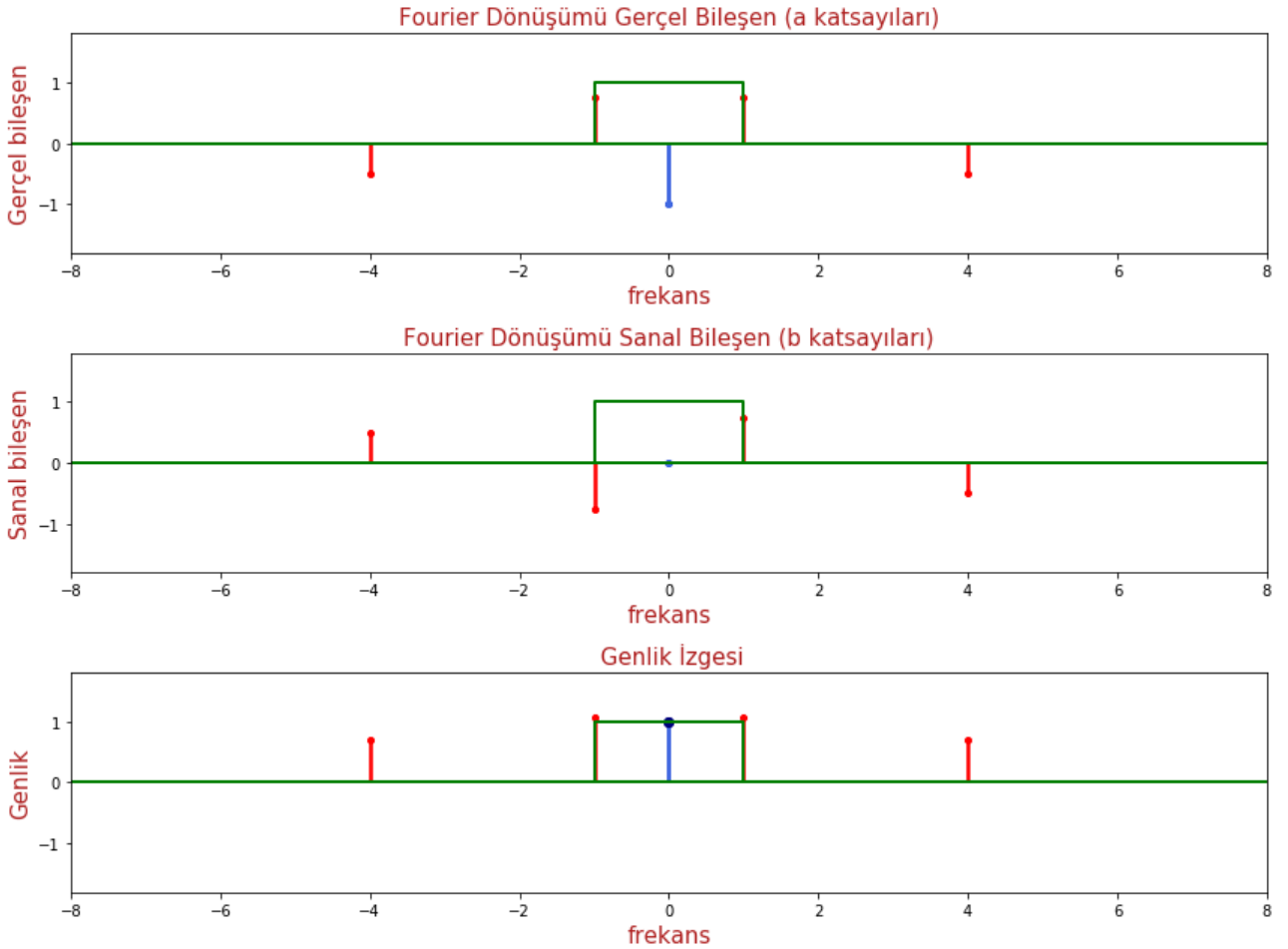
Şekil 7.1.17. Frekansı 1 Hz, a_1 ve b_1 katsayıları sırası ile 1.5 ve 1.5 olan bir sinüzoidal ile frekansı 4 Hz, a_2 ve b_2 katsayıları sırası ile -1 ve -1 olan diğer bir sinüzoidalın toplamı ile oluşan dönemsel veri (kırmızı). Verinin $\Delta t = 1$ sn örnekleme aralığı ile sayısallaştırılması ve sayısal veriden yeniden kurulması. Lacivert noktalar sayısal veriyi ve mavi sürekli eğri, yeniden kurulan veriyi göstermektedir. Örnekleme ile 0.5 sabiti elde edilmiştir.



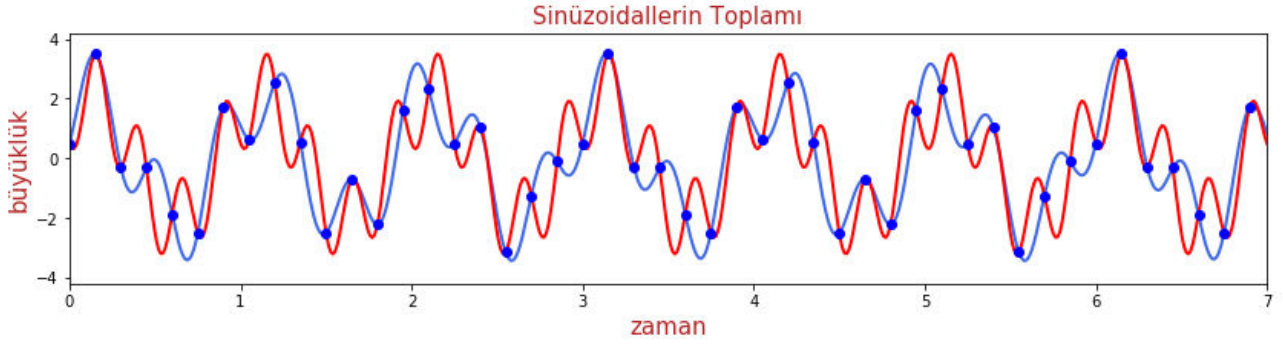
Şekil 7.1.18. Şekil 7.1.17'de zaman bölgesinde verilen işlemin frekans bölgesinde gösterimi. Yeşil renkli dikdörtgen fonksiyonu içerisindeki bölge elde edilen izgeye ($-f_N; f_N$ frekans aralığı) işaret etmektedir. En üste a katsayıları, ortada b katsayıları ve en altta genlik izgesi görülmektedir. Sürekli verinin Fourier dönüşümü (kırmızı) yeniden üretilmemiştir. Katlanma sonucunda elde edilen bileşen (mavi) sıfır frekansındadır ve zaman bölgesinde bir sabite karşılık gelmektedir.



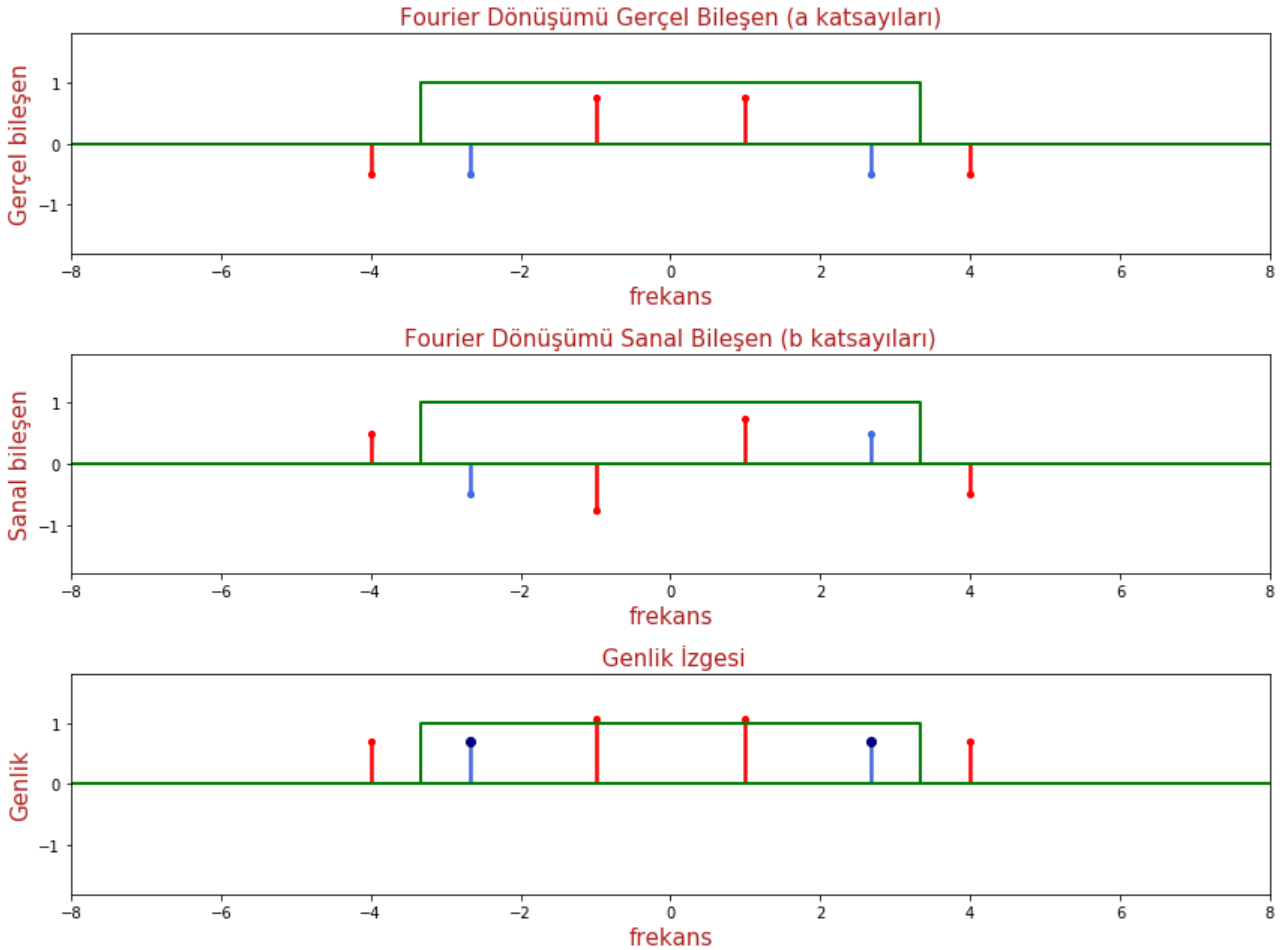
Şekil 7.1.19. Frekansları 1 ve 4 Hz olan İki sinüzoidalin toplamının (kırmızı) $\Delta t = 0.5$ sn örnekleme aralığı ile sayısallaştırılması ve sayısal veriden yeniden kurulması. Lacivert noktalar sayısal veriyi ve mavi sürekli eğri, yeniden kurulan veriyi göstermektedir. Örnekleme ile -1 sabiti ile 1 Hz frekansındaki bir sinüzoidalin toplamı elde edilmiştir.



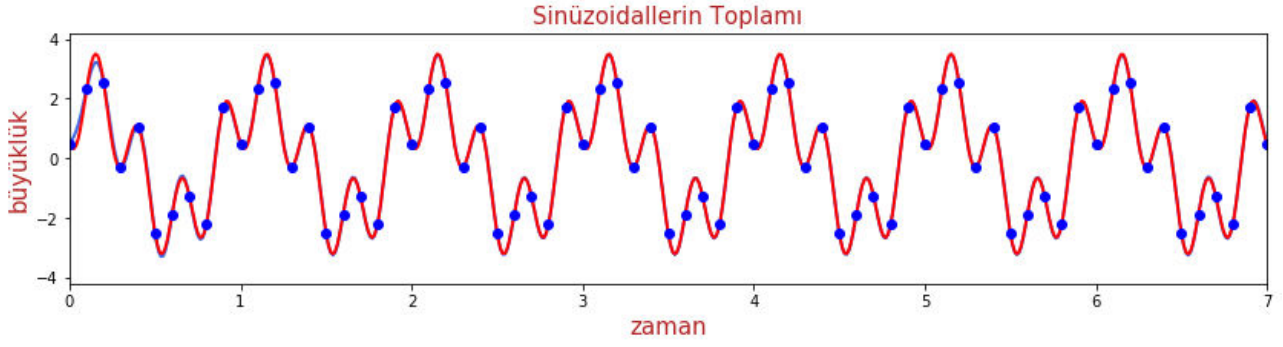
Şekil 7.1.20. Şekil 7.1.19'da zaman bölgesinde verilen işlemin frekans bölgesinde gösterimi. Yeşil renkli dikdörtgen fonksiyonu içerisindeki bölge elde edilen izgeye $(-f_N; f_N)$ frekans aralığı işaret etmektedir. En üste a katsayıları, ortada b katsayıları ve en altta genlik izgesi görülmektedir. Sürekli verinin Fourier dönüşümünü (kırmızı), yeniden kurulan verinin Fourier dönüşümünden (mavi) farklıdır. 4 Hz frekansı sıfır frekansına katlanmıştır. Nyquist frekansına eşit olan 1 Hz frekansında bir sinüzoidal ile -1 sabitinin toplamı elde edilmiştir.



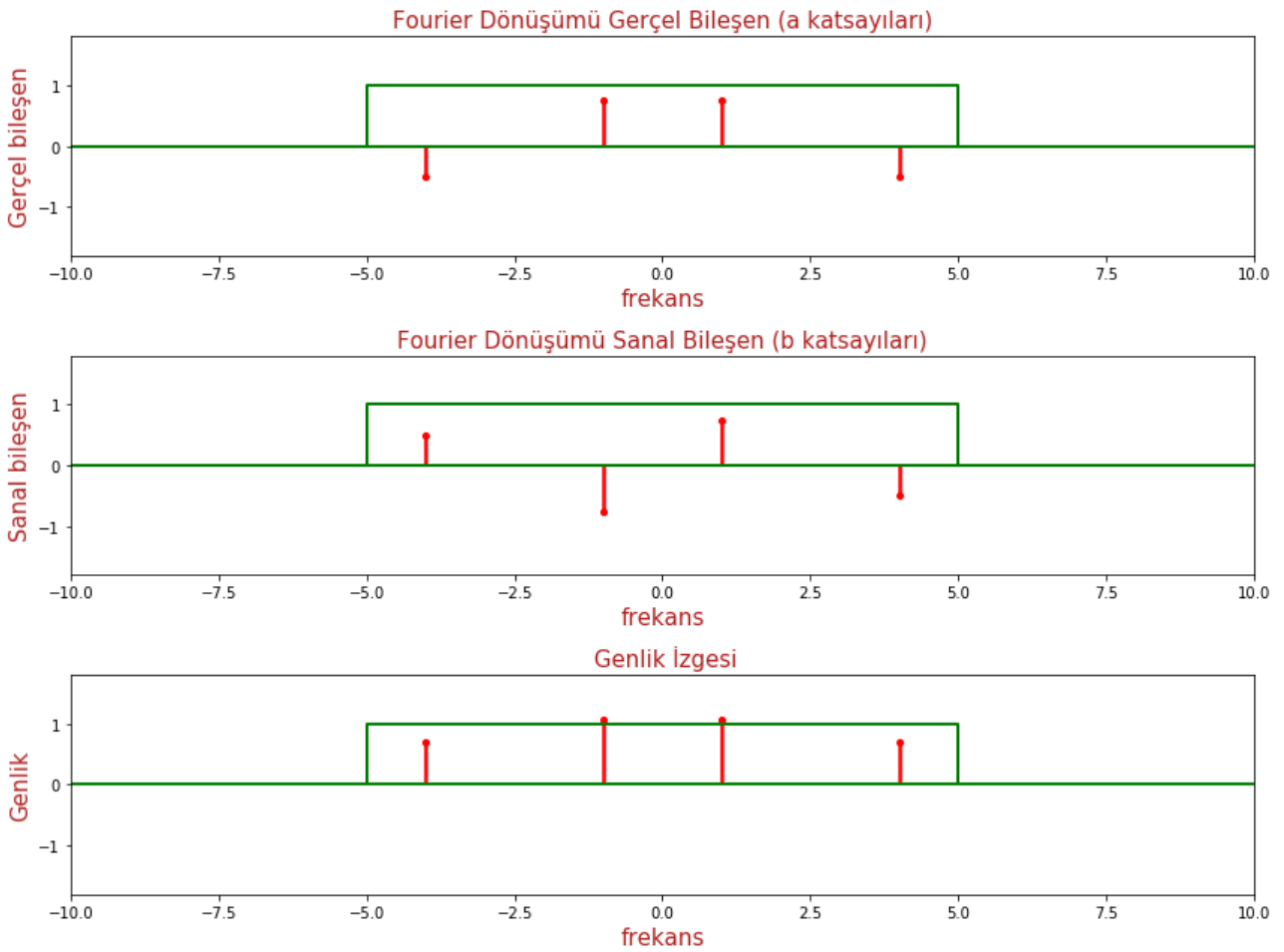
Şekil 7.1.21. Frekansları 1 ve 4 Hz olan İki sinüzoidalın toplamının (kırmızı) $\Delta t = 0.15$ sn örnekleme aralığı ile sayısallaştırılması ve sayısal veriden yeniden kurulması. Lacivert noktalar sayısal veriyi ve mavi sürekli eğri, yeniden kurulan veriyi göstermektedir. 4 Hz frekansı Nyquist frekansından büyük olduğundan, örnekleme ile 1 Hz ve 2.67 Hz frekanslarındaki iki sinüzoidalın toplamından oluşan bir dönemsel veri elde edilmiştir.



Şekil 7.1.22 Şekil 7.1.21'de zaman bölgesinde verilen işlemin frekans bölgesinde gösterimi. Yeşil renkli dikdörtgen fonksiyonu içerisindeki bölge elde edilen izgeye ($-f_N; f_N$ frekans aralığı) işaret etmektedir. En üste a katsayıları, ortada b katsayıları ve en altta genlik izgesi görülmektedir. Sürekli verinin Fourier dönüşümü (kırmızı) yeniden üretilememiştir. 4 Hz frekansı 2.67 Hz frekansına katlanmıştır. 1 Hz frekansı Nyquist frekansından küçük olduğundan kendi yerindedir.



Şekil 7.1.23. Frekansları 1 ve 4 Hz olan İki sinüzoidalin toplamının (kırmızı) $\Delta t = 0.1$ sn örnekleme aralığı ile sayısallaştırılması ve sayısal veriden yeniden kurulması Lacivert noktalar sayısal veriyi göstermektedir. Yeniden kurulan veri ile sürekli veri aynı olduğundan önceki şekillerden farklı olarak yeniden kurulan veriye işaret eden mavi sürekli eğri görülmektedir. Nyquist frekansı, veriyi oluşturan sinüzoidallerin frekanslarından (1 ve 4 Hz) büyük olduğundan sürekli veri ile yeniden kurulan veri örtüşmektedir.



Şekil 7.1.24 Şekil 7.1.23'de zaman bölgesinde verilen işlemin frekans bölgesinde gösterimi. Yeşil renkli dikdörtgen fonksiyonu içerisindeki bölge elde edilen izgeye ($-f_N; f_N$ frekans aralığı) işaret etmektedir. En üste a katsayıları, ortada b katsayıları ve en altta genlik izgesi görülmektedir. Sürekli verinin Fourier dönüşümünü (kırmızı), yeniden kurulan verinin Fourier dönüşümü ile aynı olduğundan üst üste görüntülenmiştir.