7.2. SAYISAL EVRİŞİM

7.2.1. Sayısal Evrişim Bağıntısı

Fonksiyonların sırasının önemi olmaksızın *g(t)* ve *b(t)* sürekli fonksiyonlarının evrişimi daha önce (5.1.1) bağıntısı ile verilmişti:

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, b(t-\tau)\, d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} b(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau\,. \tag{7.2.1}$$

Burada, *f(t)* ***çıkış fonksiyonu*** olarak adlandırılır. τ değişkeninin Δt aralıkları ile tanımlanması ve EK1.3'de verilen dikdörtgenler yöntemi ile belirli integral hesaplama kuralının uygulanması sonucunda, ayrık veri için (7.2.1) sürekli bağıntısı

$$f(t)=\Delta t\sum_{j=-\infty}^{\infty} b(j.\Delta t)\; g(t-j.\Delta t)$$

toplamı ile ifade edilebilir. Evrişim işleminde kullanılan sayısal veriler, *t* değişkeninin sadece Δt aralıklarında tanımlıdır. Dolayısı ile çıkış fonksiyonu da, Δt aralıklarının tamsayı katlarında hesaplanabilir. Yukarıdaki bağıntıda $t=i.\Delta t$ yazılarak,

$$f(i.\Delta t)=\Delta t\sum_{j=-\infty}^{\infty} b(j.\Delta t)\; g((i-j).\Delta t)$$

sayısal evrişim (***ayrık evrişim***) bağıntısı elde edilir. Uygulamada sonsuz sayıda veri olmadığından, $b(j.\Delta t)$ sayısal değerlerinden oluşan $b_s(t)$ sayısal verisinin, eksi ve artı yatay eksen üzerindeki veri sayıları sırası ile *p* ve *r* ise

$$f(i.\Delta t)=\Delta t\sum_{j=-p}^{r} b(j.\Delta t)\; g((i-j).\Delta t) \qquad i=-(q+p),....,0,...,r+s \tag{7.2.2}$$

bağıntısı yazılabilir. Koordinat sisteminin merkezindeki değer de (*j*=0) düşünüldüğünde, $b_s(t)$ sayısal verisinin, *m=p+r+1* adet sayıdan oluşmakta olduğu anlaşılabilir. $g_s(t)$, sırası ile *q* ve *s* adet eksi ve artı yatay eksen değerli, *n=q+s+1* adet sayısal veriden oluşmakta ise çıkış verisi de sınırlı sayıda olacaktır. Çıkış verisinin ilk değeri $g_s(t)$ ve $b_s(t)$ sayısal verilerinin ilk değerlerinin çarpımından elde edilir. Bu durumda, $b_s(t)$ için *j=–p* ve dolayısı ile $g_s(t)$ için *–q=i–j* olmalıdır. Bu iki koşuldan, *i* sayacının ilk değerinin *i=–q–p=–(q+p)* olması gerektiği bulunabilir. Çıkış verisinin son değeri ise $g_s(t)$ ve $b_s(t)$ sayısal verilerinin son değerlerinin çarpımından elde edilir. Bu durumda, $b_s(t)$ için *j=r* olması gerektiğinden $g_s(t)$ için s=*i–j* ve olmalıdır. Bu iki koşuldan, *i* sayacının son değerinin *i=r+s* olması gerektiği bulunabilir. Buradan, çıkışın eksi ve artı yatay eksenli veri sayılarının sırası ile evrişim uygulanan verilerin eksi ve artı eksenli veri sayılarının toplamına eşit olduğu görülebilir. Çıkış verisinin toplam sayısı, merkezdeki veri ile birlikte *k=q+p+r+s+1* olarak hesaplanabilir. *p+r=m–1 ve q+s=n–1* olduğundan, evrişim uygulanan verilerin sayısı cinsinden, çıkış verisinin sayısı

$$k=n+m-1 \tag{7.2.3}$$

bağıntısından hesaplanabilir. Burada verilen sayısal işlemlerin yapılabilmesi için evrişim uygulanan sayısal verilerin aynı örnekleme aralığı ile örneklenmesi gerekir. Bu nedenle, çıkış verisi de aynı örnekleme aralıkları ile elde edilir. Bu özelliğin bilindiği düşünülerek, (7.2.2) bağıntısı daha yalın bir simgeleme ile

$$f_i = \Delta t \sum_{j=-p}^{r} b_j g_{i-j} \qquad\qquad i = -(q+p),....,0,...,r+s. \qquad (7.2.4)$$

olarak yazılabilir. Sonsuz adet toplama işlemi yerine sınırlı sayıda toplama gerçekleştirilmesi ile oluşacak yanılgı, *g(t)* ile *b(t)* fonksiyonlarının işlemin yapıldığı aralıkta, zaman-sınırlı fonksiyon özelliğine ne kadar yakın olduklarına bağlıdır.

7.2.2. Sayısal Evrişimin Uygulanışı

Yukarıda verilen (7.2.4) bağıntısındaki sıra numaraları negatif değerler alabilmekte ve bu değerler verinin yatay eksen değerlerini tanımlamaktadır. Örneğin, *j* sıra numaralı veri değerinin yatay ekseni değeri $t = j.\Delta t$ olacaktır ve gerçel bir sayıdır. Ancak bu tür bir betimleme bilgisayar uygulamalarında kullanışlı değildir. Sayısal veriler ile yatay eksen değerleri sıra numaraları ile ilişkilendirilerek ayrı diziler halinde belleğe yerleştirilmek zorundadır. Ayrıca, programlama dillerinin çoğunluğu negatif numaralı dizi üyesine izin vermezler. Bu nedenle (7.2.4) toplamının bilgisayar hesaplamaları için uygun bir biçime dönüştürülmesi gerekmektedir.

Δt aralıkları ile örneklenmiş, *m* adet sayısal değeri bulunan bir verinin bireyleri,

$b_1,\ b_2,\ b_3,...,b_m$

ve *n* adet veriden oluşan, aynı Δt aralığı ile örneklemiş diğer bir sayısal verinin bireyleri de,

$g_1,\ g_2,\ g_3,...,g_n$

simgeleri ile gösterilirsin. İki sayısal verinin evrişimi için bunlardan biri merkez etrafında ters çevrilmelidir ve verilerin sırası önemli değildir. Evrişim işlemi ikinci sayısal verinin ters çevrilmesinden sonra her iki fonksiyonun ilk değerlerinin çarpılmasıyla başlar. Aşağıda, *n=7* ve *m=4* için bir örnek verilmiştir:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ g_7 & g_6 & g_5 & g_4 & g_3 & g_2 & g_1 & & & \end{array}$$

veya

$$\begin{array}{cccccccccc} & & & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & g_6 & g_7 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & & & & & & \end{array}$$

Kolaylık amacı ile Δt çarpanı yazılmaz ise çıkışın ilk sayısal değeri,

$f_1 = g_1.b_1$.

olarak verilebilir. Çıkışın ikinci sayısal değerini hesaplamak için ikinci veri Δt kadar kaydırılır ve

$$\begin{array}{cccccccccc} & & & & & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ g_7 & g_6 & g_5 & g_4 & g_3 & g_2 & g_1 & & \end{array}$$

veya

$$\begin{array}{lllllllllll} & & & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & g_6 & g_7 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & & & & & & \end{array}$$

işlemi ile karşılıklı sayılar birbirleriyle çarpılır ve çarpım sonuçları toplanarak, çıkışın ikinci sayısal değeri

$$f_2 = g_2.b_1 + g_1.b_2$$

olarak hesaplanır. Daha uzun verinin sabit tutulması daha kolay olacağından, işleme bu şekilde devam edilmesi ile

$$\begin{array}{llllllllll} & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & g_6 & g_7 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & & & & \end{array}$$

$$f_3 = g_3.b_1 + g_2.b_2 + g_1.b_3$$

elde edilir. Kaydıma, çarpma ve toplama işlemlerinin yinelenmesi ile

$$f_4 = g_4.b_1 + g_3.b_2 + g_2.b_3 + g_1.b_4$$

$$f_5 = g_5.b_1 + g_4.b_2 + g_3.b_3 + g_2.b_4$$

$$f_6 = g_6.b_1 + g_5.b_2 + g_4.b_3 + g_3.b_4$$

$$f_7 = g_7.b_1 + g_6.b_2 + g_5.b_3 + g_4.b_4$$

çıkış değerleri hesaplanabilir. İkinci veri bir örnekleme aralığı kadar daha kaydırılır ise b_1 katsayısı ile çarpılacak birinci veriye ait sayısal değer bulunmadığında, evrişim

$$\begin{array}{llllllll} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & & & & \\ & g_7 & g_6 & g_5 & g_4 & g_3 & g_2 & g_1 \end{array}$$

veya

$$\begin{array}{lllllllllll} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & g_6 & g_7 & & & \\ & & & & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \end{array}$$

işlemi ile

$$f_8 = g_7.b_2 + g_6.b_3 + g_5.b_4$$

şeklinde ifade edilir. Sayısal veriler, sürekli verileri sınırlı bir yatay eksen aralığında temsil edebilirler. Bu örnekte, g_8 sayısal değeri örneklenmemiştir ve

$$f_9 = g_7.b_3 + g_6.b_4$$

olarak hesaplanır. Gerçekte $g_8.b_1$ çarpımı sıfır olmadığından, sayısal evrişim işleminde bu çarpım kadar belirsizlik oluşur. Benzer olarak, çıkışın son sayısal değeri

$$f_{10} = g_7.b_4$$

olarak bulunur. Bu örnek ile n ve m adet iki sayısal verinin evrişimi ile $k=n+m-1$ adet çıkış verisinin elde edilebileceği görülebilir. (7.2.2) bağıntısından, sonucun Δt ile çarpılması gerektiği açıktır. Yukarıdaki numaralandırma ile çıkışın değerlerinin

$$f_i = \Delta t \sum_{j=1}^{m} b_j g_{i-j+1} \qquad i=1,\ldots,k \tag{7.2.5}$$

toplamı ile verilebileceği kolaylıkla görülebilir. Sayısal verinin ilk değerinin birinci veya sıfırıncı veri olarak numaralandırılması isteğe bağlıdır. Bilgisayar programlama dillerinde, diziler farklı şekilde numaralandırılabilmektedir. Eğer, sayısal verilerin elemanları

$$b_0,\ b_2,\ b_3,\ldots,b_{m-1} \text{ ve } g_0,\ g_2,\ g_3,\ldots,g_{n-1}$$

şeklinde numaralandırılmış ise çıkışın sayısal değerleri

$$f_i = \Delta t \sum_{j=0}^{m-1} b_j g_{i-j} \qquad i=0,\ldots,k-1 \tag{7.2.6}$$

toplamı ile hesaplanabilir. Çizelge 7.2.1'de aynı aralık ile örneklenmiş iki sayısal veri kümesi verilmiştir. Bu iki verinin evrişimi sonucunda $k=5+2-1=6$ adet çıkış değeri elde edilecektir. Sayısal değerler, evrişim amacı ile alt alta yazılabildiği gibi düşey yönde de gösterilebilir. Çıkışın sayısal değerleri, aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\begin{array}{llll} & b_2 & & 2\\ g_1 & b_1 & 1 & 1\\ g_2 & & 2 & \\ f_1 = g_3 & & =-1 & = g_1 b_1 = 1x1 = 1\ ,\\ g_4 & & -1 & \\ g_5 & & 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} & 1 & 2\\ & 2 & 1\\ f_2 = & -1 & = 1x2 + 2x1 = 4\ ,\\ & -1 & \\ & 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} & 1 & \\ & 2 & 2\\ f_3 = & -1 & 1 = 2x2 + (-1)x1 = 3\\ & -1 & \\ & 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} & 1 & \\ & 2 & \\ f_4 = & -1 & 2 = (-1)x2 + (-1)x1 = -3\ ,\\ & -1 & 1\\ & 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} & 1 & \\ & 2 & \\ f_5 = & -1 & = (-1)x2 + 2x1 = 0\ ,\\ & -1 & 2\\ & 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} & 1 & \\ & 2 & \\ f_5 = & -1 & = 2x2 = 4\\ & -1 & \\ & 2 & 2\\ & & 1 \end{array}$$

(7.2.4) veya (7.2.5) bağıntıları sadece çıkışın sayısal değerlerinin hesaplanmasına yardım eder. Ancak, çıkış değerlerinin de görüntülenebilmesi için ait oldukları yatay eksen değerlerinin bilinmesi gerekir. Çizelge 7.2.1'de iki sayısal veri kümesi ve Şekil 7.2.1'de ise bunların çizimi görülmektedir. Şekil 7.2.2a'da, birinci sayısal veri kümesi yeniden çizilmiştir. t_{g1}, ilk sayısal verinin yatay eksen değerini göstermektedir. Şekil 7.2.2b'de ise ikinci veri düşey eksen etrafında ters döndürüldükten sonra görüntülenmiştir. t_{b1}, ilk sayısal verinin yatay eksen değeri olduğundan döndürme sonrası b_1 değerinin merkeze uzaklığı $-t_{b1}$ kadar olacaktır. Sayısal evrişim $f_1 = g_1.b_1$ işlemi ile başladığında, Şekil 7.2.2c'de görüldüğü gibi ikinci veri $t_{g1}+t_{b1}$ kadar sola kaydırılmış olacaktır. Çünkü ikinci verinin merkezi, b_1 katsayısına göre t_{b1} kadar solda olduğundan,

$$t_{f1}=t_{g1}-(-t_{b1})=t_{g1}+t_{b1} \tag{7.2.7}$$

değeri kadar sola kaymış olur. Evrişim kuramı gereği, merkezin bağıl kayması t değerine eşit olacağından, bu değer ilk çıkış verisinin yatay eksen değerinin verir. Buradan, çıkışın ilk değerinin ait olduğu yatay eksen değerinin, evrişim uygulanan iki verinin ilk yatay eksen değerlerinin toplamına eşit olduğu görülmektedir. Evrişim işleminde verilerin sırasının önemi olmadığından, (7.2.7) bağıntısının toplama ile ifade edilmesi de doğaldır. Aynı sonuca, (7.2.2) bağıntısı yardımı ile de ulaşılabilir. Çıkışın ilk değeri için $i=-q-p$ olduğundan,

$$t_{f1}=i.\Delta t=(-q-p).\Delta t=-q.\Delta t-p.\Delta t$$

yazılabilir. $t_{g1}=-q.\Delta t$ ve $t_{b1}=-p.\Delta t$ olduğundan, (7.2.7) sonucu elde edilir. Çıkış verisinin ikinci yatay eksen değeri, ilk yatay eksen değerine Δt eklenerek bulunabilir. İşleme devam edilerek, çıkışın tüm yatay eksen değerleri hesaplanabilir:

$$t_{fk}=t_{f(k-1)}+\Delta t\,. \tag{7.2.8}$$

Yukarıdaki örnek için $t_{g1}=-2$ ve $t_{b1}=-2$ olduğundan, $t_{f1}=-4$ olarak hesaplanabilir. Şekil 7.2.2d'de, çıkış verisi görüntülenmiştir.

7.2.3. Sayısal Evrişim için Bilgisayar Programları ve Örnekler

Verilerin okutulması ve diğer işlemlerin yerine getirildiği varsayılarak, (7.2.4) toplamı ile sayısal evrişimi hesaplayan program parçası iç içe iki döngü ile gerçekleştirilebilir. İç döngü iki sayısal verinin çarpımını toplayarak, bir adet çıkış değeri hesaplamaktadır. Dıştaki döngü ise i sayacını değiştirerek, k adet çıkış değerinin hesaplanmasını sağlamaktadır. Burada, FORTRAN programlama dili örnek verileceğinden, sıra numaraları birden başlatılmıştır. 'if' yapısı, $nn=i-j+1$ sayacının birden küçük ve n den büyük değer almasını engeller:

```
k=n+m-1
do i=1, k
toplam=0.
do j=1, m
nn=i-j+1
if (nn.ge.1.and.nn.le.n)    toplam=toplam+b(j)*g(nn)
end do
f(i)=dt*toplam
end do
```

Çıkış verisinin yatay eksen değerleri ise

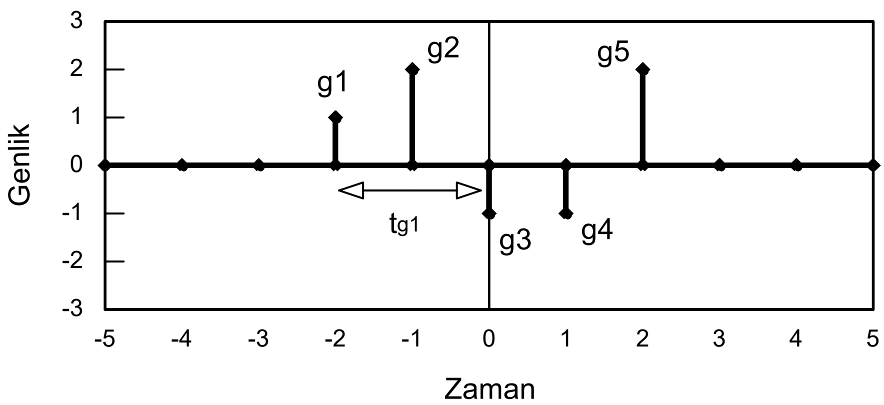
```
tf(1)=tb(1)+tg(1)
do j=2, k
tf(j)=tf(j-1)+dt
end do
```

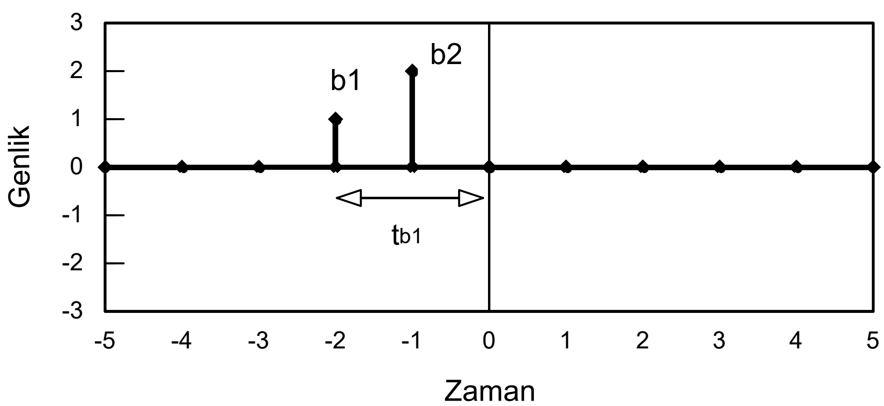
program parçası ile hesaplanabilir. Evrişim işleminde, verilerin sırasının bir önemi olmadığından, daha az sayıdan oluşan verinin *b()* dizisi olarak adlandırılması, cebirsel işlem miktarını değiştirmemekle birlikte, iç döngünün daha az sayıda icra edilmesinin sağlar.

Çizelge 7.2.1. Sayısal evrişim örneğinde kullanılan sayısal veri kümeleri.

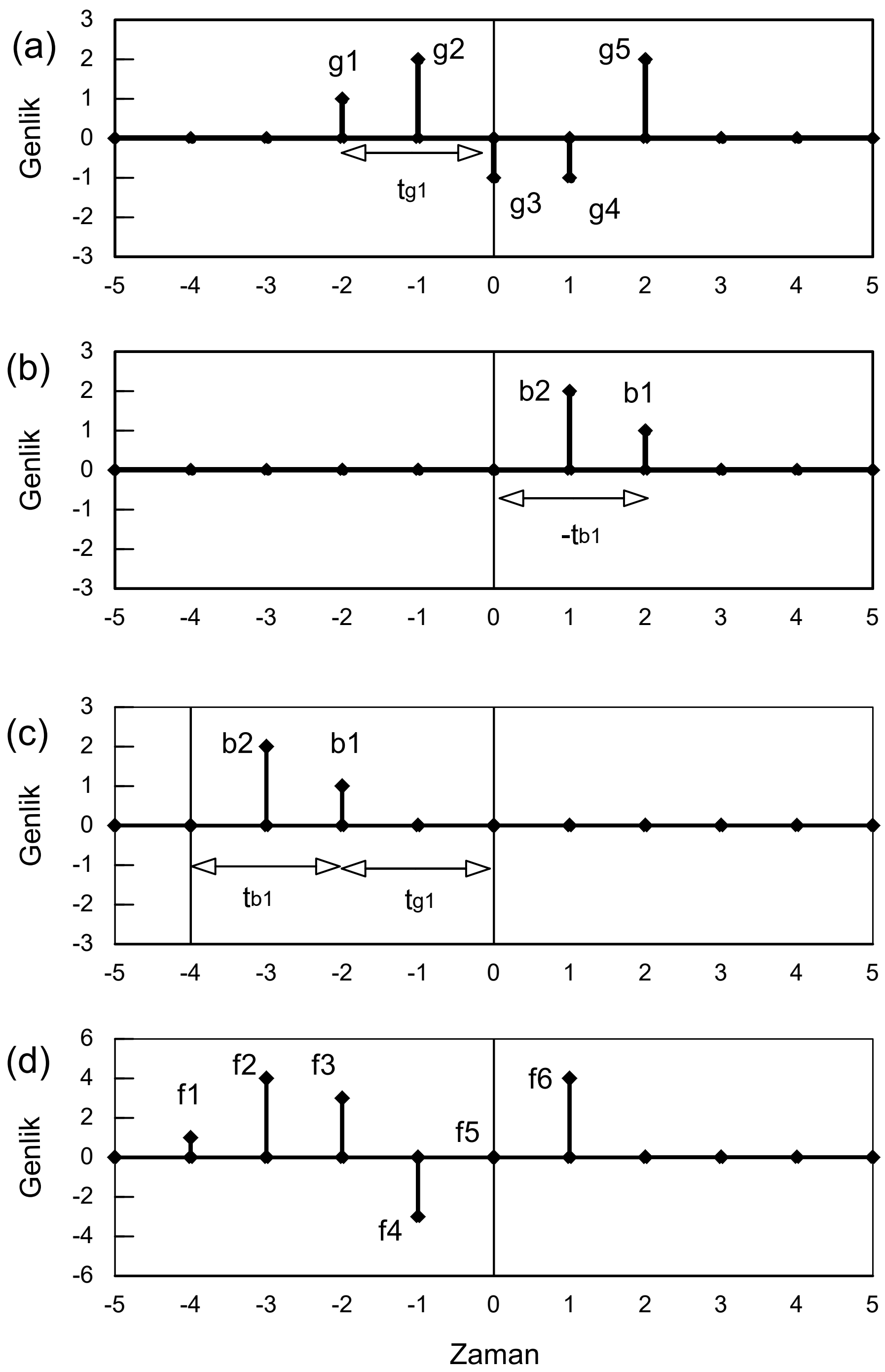
Sıra No	Yatay Eksen	Veri Değeri
1	–2	1
2	–1	2
3	0	–1
4	1	–1
5	2	2

Sıra No	Yatay Eksen	Veri Değeri
1	–2	1
2	–1	2





Şekil 7.2.1. Çizelge 7.2.1'deki sayısal verilerin çizimi.



Şekil 7.2.2. Birinci veri (a), ikinci verinin ters çevrilmesi (b), kaydırılması ve $f_1 = g_1.b_1$ çarpım sonucunun elde edilmesi (c), evrişim sonucunun görüntülenmesi (d).

Sayısal evrişim işleminin doğru sonuç verebilme koşullarını sınamak için aşağıda bazı fonksiyonlar sayısallaştırılarak evrişim uygulanmıştır. Buradaki amaç sayısal evrişimin nasıl davrandığını incelemek olduğundan, giriş verileri evrişimleri bilinen fonksiyonların örneklenmesi ile yaratılmıştır. İkinci adımda, sayısal evrişim ile hesaplanan değerler ile sürekli evrişim fonksiyonundan hesaplanan değerler karşılaştırılmıştır. İlk örnek iki Gaussian fonksiyonunun evrişimidir. Katsayıları α ve β sabitleri ile verilen iki Gaussian fonksiyonunun evrişimi,

$$exp(-\alpha t^2)*exp(-\beta t^2)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha+\beta}}\,exp\left[-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\,t^2\right] \tag{7.2.9}$$

bağıntısı ile verilir. Bu sonuca, zaman bölgesindeki fonksiyonların Fourier dönüşümlerinin frekans bölgesinde çarpılması ve çarpım sonucunun ters Fourier dönüşümünün alınması ile kolaylıkla erişilir. Şekil 7.2.3'de verilen örnekte, izleyen giriş değerleri kullanılmıştır:

en küçük zaman değeri= –2
en büyük zaman değeri= 2
veri sayısı =31
birinci Gaussian fonksiyonunun katsayısı =1
ikinci Gaussian fonksiyonunun katsayısı =3.

Her iki fonksiyonda zaman-sınırlı olduklarından, Şekil 7.2.3'de görüldüğü gibi sayısal evrişim sonucu, (7.2.9) bağıntısının sağ tarafında verilen sürekli fonksiyon ile uyum sağlamaktadır. Aynı evrişim işlemi daha kısa bir zaman aralığında (-0.5; 0.5) gerçekleştirildiğinde elde edilen sonuç Şekil 7.2.4'de verilmiştir. Örnekleme yapılan zaman kısa olduğundan, sayısal verinin sürekli Gaussian fonksiyonlarını temsil etme özelliği yitirilmiştir. Bu nedenle sayısal evrişim işlemi ile doğru sonuçlar elde edilememiştir.

İkinci örnek, dikdörtgen ve $exp(-\alpha|t|)$ fonksiyonlarının örneklenmesi ile elde edilen sayısal verilerin evrişimidir. Bu iki fonksiyonun evrişimi izleyen bağıntılar ile verilir:

$$f(t)=\frac{exp(\alpha(t+L))-exp(\alpha(t-L))}{\alpha} \qquad t\le -L\,, \tag{7.2.10}$$

$$f(t)=\frac{2-exp(-\alpha(t+L))-exp(\alpha(t-L))}{\alpha} \qquad -L\le t\le L\,, \tag{7.2.11}$$

$$f(t)=\frac{exp(-\alpha(t-L))-exp(-\alpha(t+L))}{\alpha} \qquad t\ge L\,. \tag{7.2.12}$$

Şekil 7.2.5'de görüntülenen sonuçlar, izleyen giriş değerleri ile elde edilmiştir:

en küçük zaman değeri =-2.5
en büyük zaman değeri =2.5
veri sayısı =11
dikdörtgenin yarı genişliği L=k.dt için k katsayısı =2
üstel fonksiyonun katsayısı =1.

Burada, dikdörtgen fonksiyonun yarı genişliği, örnekleme aralığının tam katı olan bir tamsayı ile tanımlanmaktadır. İkinci fonksiyon ise Şekil 7.2.5'de görüldüğü gibi sayısallaştırma işleminin gerçekleştirildiği aralıkta sıfıra ulaşmadığından eksik temsil edilmektedir. Bu nedenle eksi ve artı yönde yatay eksenin mutlak artması ile sayısal evrişim sonuçları gerçek değerlerden farklılaşmaktadır. Şekil 7.2.6'da ise evrişim daha kısa bir zaman aralığında gerçekleştirilmiştir. İkinci fonksiyonun temsil edilme özelliği daha da azaldığından, eksi ve artı yönde yatay eksenin mutlak değerinin artması ile sayısal evrişim sonuçları gerçek değerlerden bir miktar farklılaşmaktadır. Bu örnek, zaman-sınırlı fonksiyon veya süreçlerin, sıfıra yaklaştıkları yatay eksen değerlerine kadar örneklenmeleri gerektiğini göstermektedir. Aksi takdirde, sayısal veri sürekli veriyi temsil edemez. Fonksiyon zaman-sınırlı olmasına rağmen, ondan elde edilen sayısal veri zaman-sınırlı değildir ve sayısal evrişim ile ancak merkez civarında doğru sonuçlar elde edilmiştir.

Üçüncü örnekte, $exp(-\alpha|t|)$ ve $U(t)$ fonksiyonlarını sayısallaştırılarak, evrişim hesaplanmaktadır. Örneklenmiş fonksiyonların evrişimi hesaplandığında, sonuç

$$f(t) = exp(\alpha t)/\alpha \qquad t \le 0 \tag{7.2.13}$$

$$f(t) = (2 - exp(-\alpha t))/\alpha \qquad t \ge 0 \tag{7.2.14}$$

fonksiyonlarının sayısal değerine eşit olmalıdır. Sayısal evrişim için

en küçük zaman değeri =–2
en büyük zaman değeri =2
veri sayısı =11
üstel fonksiyonun katsayısı =2

değerleri kullanılmış ve örneklenen fonksiyonlar ve sayısal evrişim sonuçları Şekil 7.2.7'de görüntülenmiştir. Birinci veri zaman sınırlı olmasına rağmen ikinci verinin zaman-sınırlı olmaması nedeni ile sayısal evrişim sonuçları belirli bir örnekleme noktasından sonra sürekli veri ile uyum sağlamamaktadır. Çünkü ters çevrilen birim basamak fonksiyonu kaydırıldıkça belirli bir zaman değerinden sonra üstel fonksiyon ile tam olarak karşılıklı gelememektedir. Bu durumda üstel fonksiyon birim yerine sıfır ile çarpılır ve elde edilen değerler gerçek değerlerden gittikçe daha küçük olmaya başlar.

Şekil 7.2.8'de ise $U(t)\, exp(-\alpha t)$ ve $U(t)$ fonksiyonlarının sayısal evrişim sonucu görüntülenmiştir. Bu fonksiyonların evrişimi (5.1.6) bağıntısı ile verilmiştir:

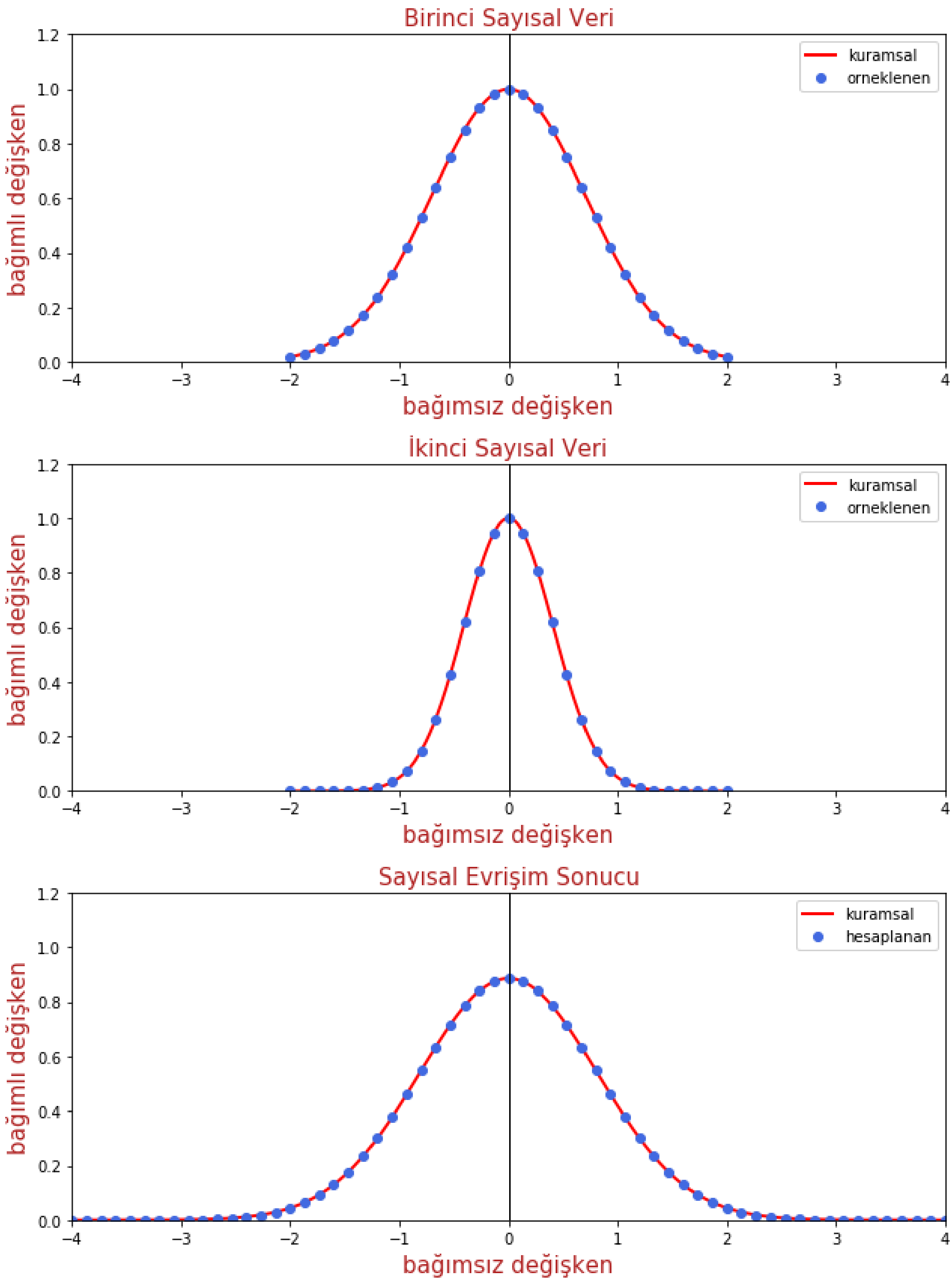
$$f(t) = (1 - exp(-\alpha t))/\alpha\,. \tag{5.1.6}$$

Sayısal evrişim, (–2; 2) zaman aralığında 11 veri ile gerçekleştirilmiştir. Üstel fonksiyonun katsayısı 0.5 olarak alınmıştır. Şekil 7.2.8'de, sayısal ve sürekli evrişim sonuçlarının t=2 yatay eksen değerine kadar uyumlu olduğu gözlenmektedir. Bu noktadan sonra sayısal evrişim doğru sonuç üretmemektedir. Bunun nedeni sınırlı sayıda veri kullanılması nedeni ile her iki sayısal verinin tam olarak birbirine karşılık gelememesidir. Bir verideki sayısal değerin diğerinde sayısal karşılığının bulunmaması, toplamın eksik hesaplanmasına yol açmaktadır. Bu tür yanılgılar verilerin sınırlı sayıda değer ile temsil edilmelerinden kaynaklanmaktadır.

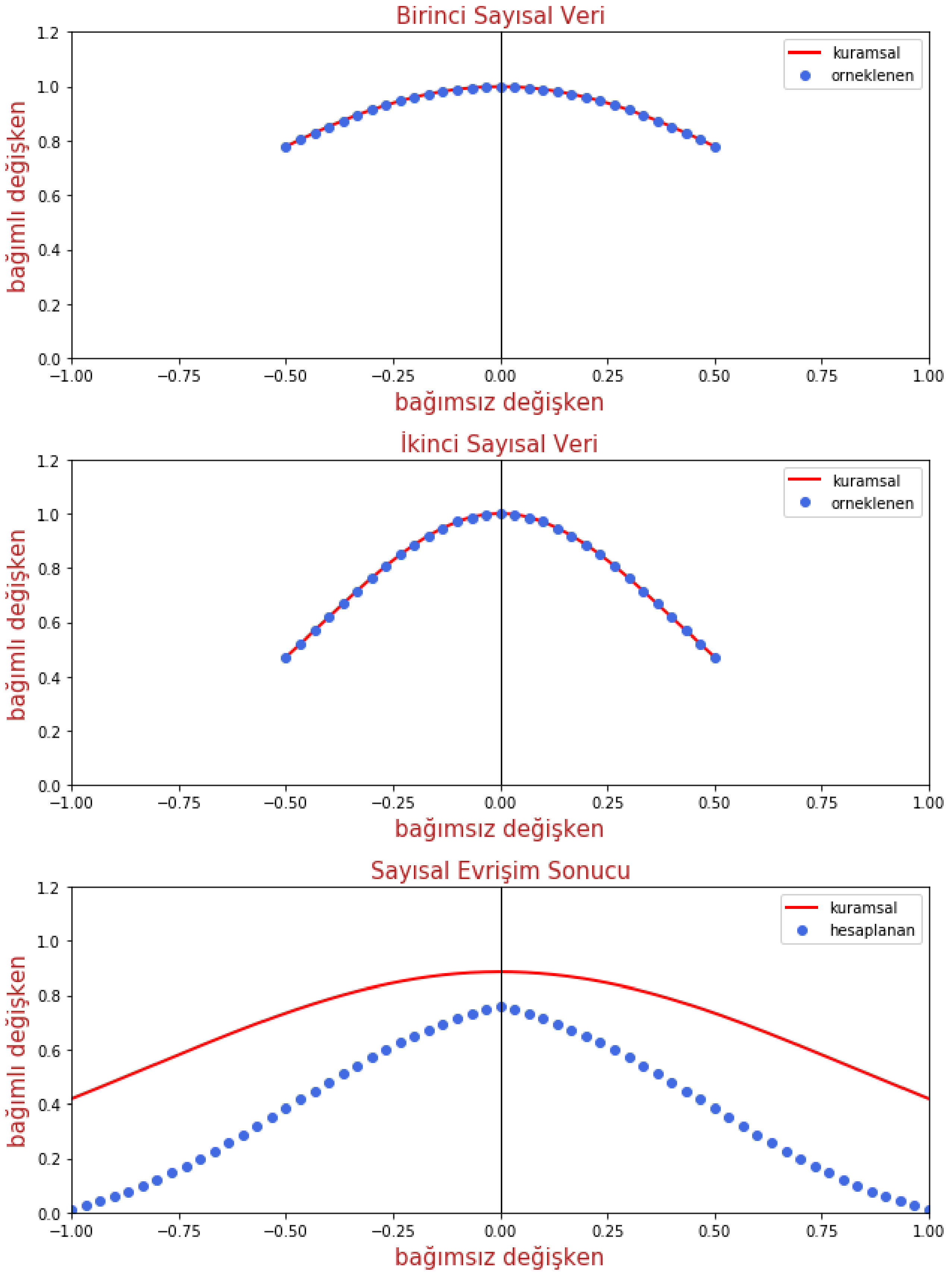
$U(t)\, exp(-\alpha t)$ ile işaret fonksiyonlarının sayısal evrişimi, Bölüm 5.4.1e'de,

$$f(f) = \begin{cases} -1/\alpha & t \le 0 \\ [1 - 2exp(-\alpha t)]/\alpha & t \ge 0 \end{cases}$$

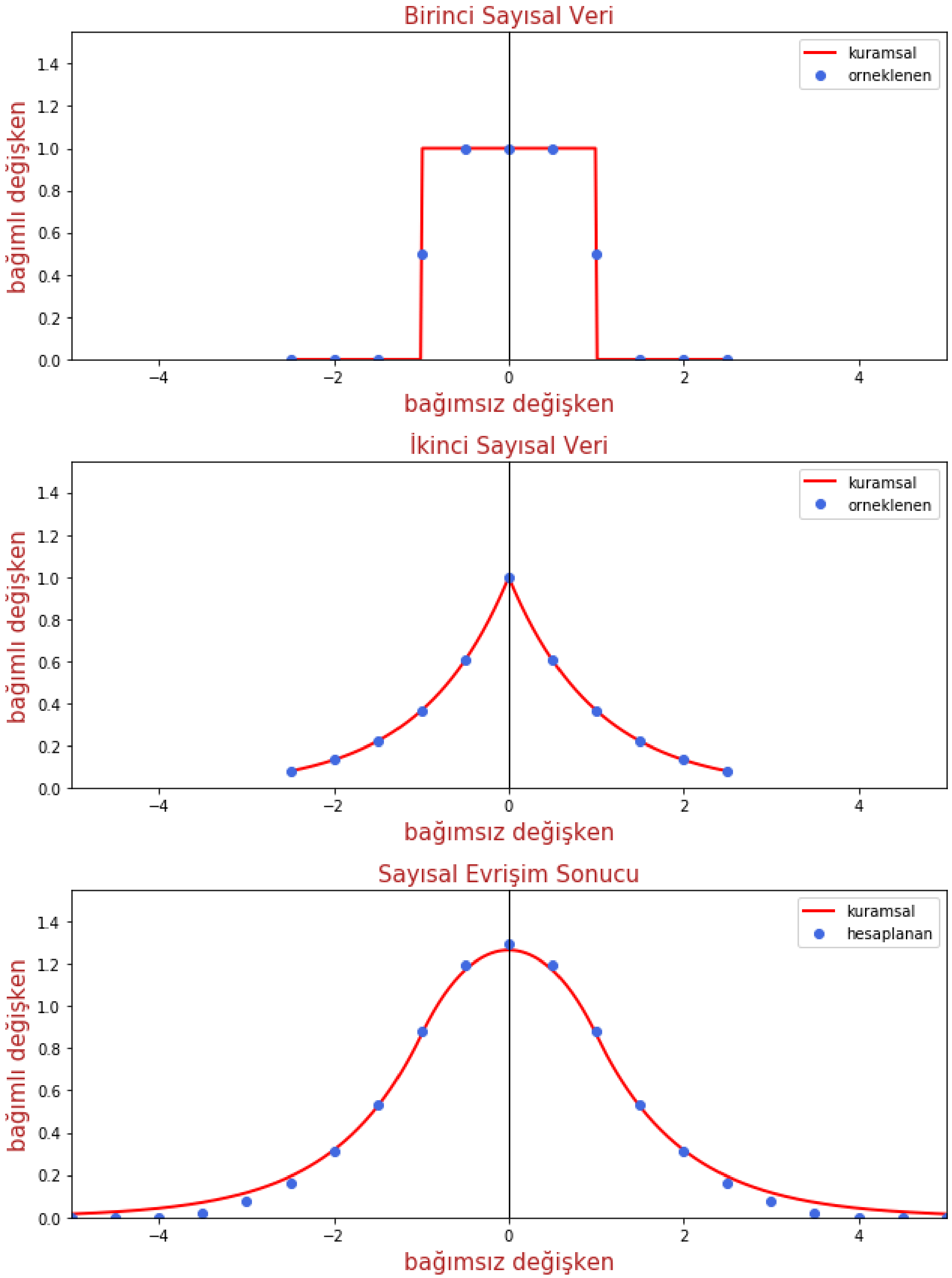
olarak verilmişti. Şekil 7.2.9'da α =2 için hesaplanan sayısal evrişim sonucu görülmektedir. İşaret fonksiyonu her iki eksen boyunca sonsuza uzanmakta olduğundan, bu tür veriler sınırlı sayıda veri ile doğru temsil edilemezler ve sayısal işlem sonucu gerçek değerlerden oldukça uzaktır. İki fonksiyonun doğru olarak temsil edilebildiği ve karşılıklı olarak doğru değerlerin birbiri ile çarpıldığı bölge bu örnekte koordinat merkezi civarıdır. Çıkışın diğer yatay eksen değerlerinde sayısal ve sürekli evrişimler arasındaki farklılık artmaktadır.



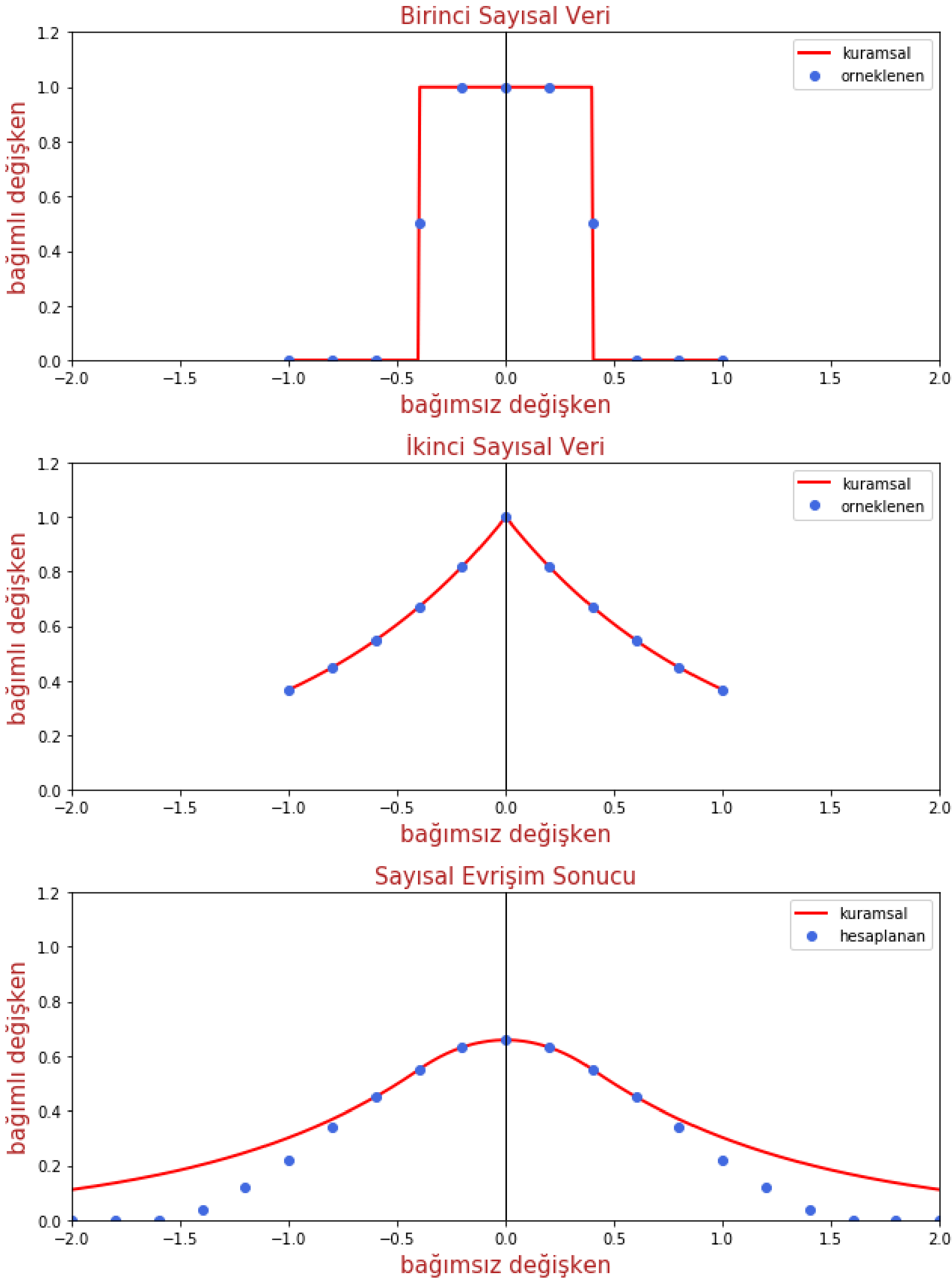
Şekil 7.2.3. Örneklenmiş iki Gaussian fonksiyonunun evrişimi. Birinci ve ikinci giriş verileri sırası ile α=1 ve β=3 sabitleri ile hesaplanmıştır. Devamlı çizgi sürekli veriyi, noktalar ise sayısal veriyi göstermektedir. En alttaki grafikte gösterilen sürekli veri (7.2.9) bağıntısının sağ tarafındaki Gaussian fonksiyonudur. Sayısal veri, sürekli fonksiyon ile uyuşum göstermektedir.



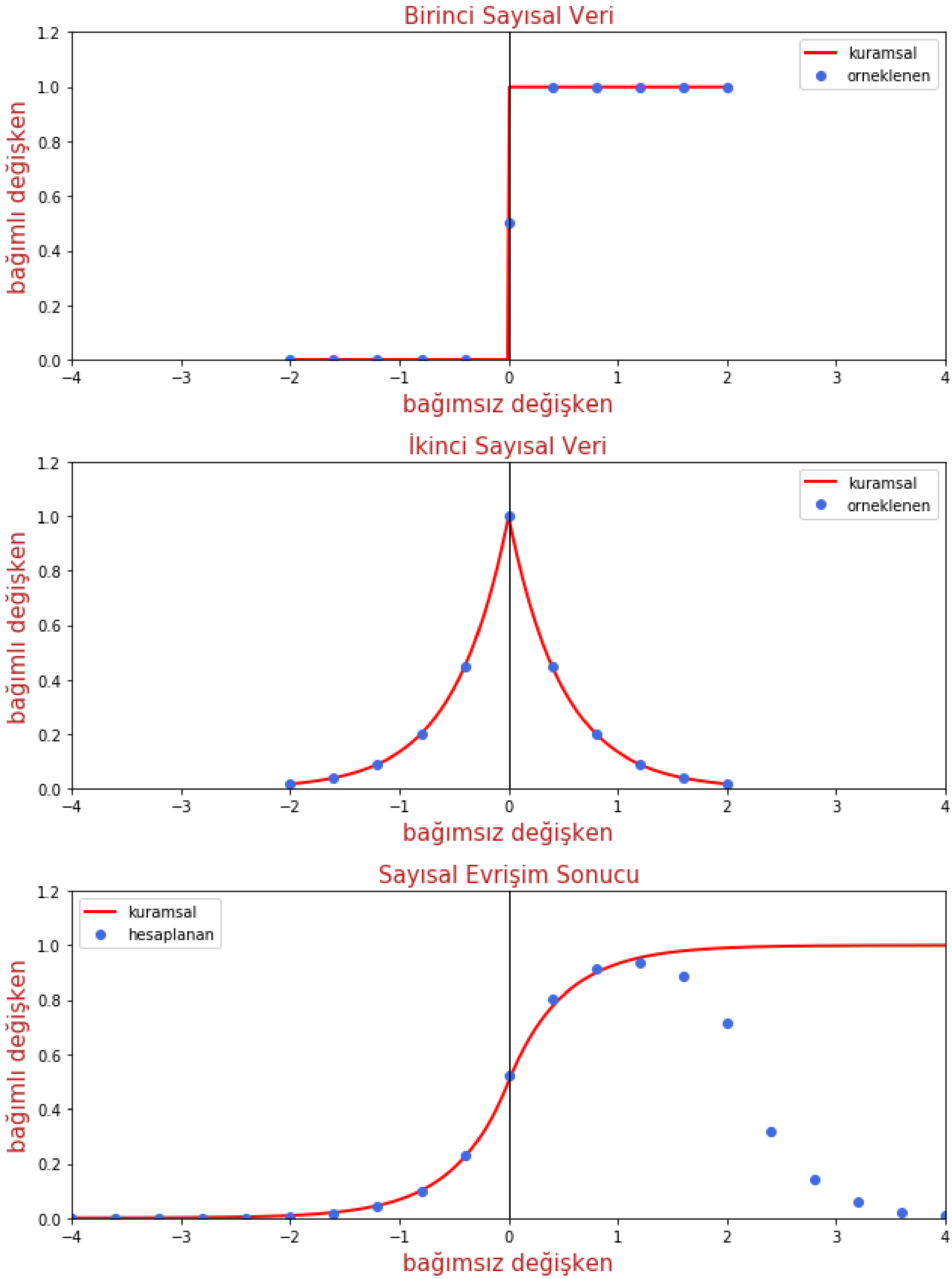
Şekil 7.2.4. Bir önceki şekilde verilen sayısal evrişim örneğinin daha kısa zaman aralığında gerçekleştirilmesi. Ölçü aralığı içerisinde kalan giriş verileri Gaussian fonksiyonunu temsil etmediğinden, sayısal evrişim sonucu sürekli çıkış fonksiyonu ile aynı değildir.



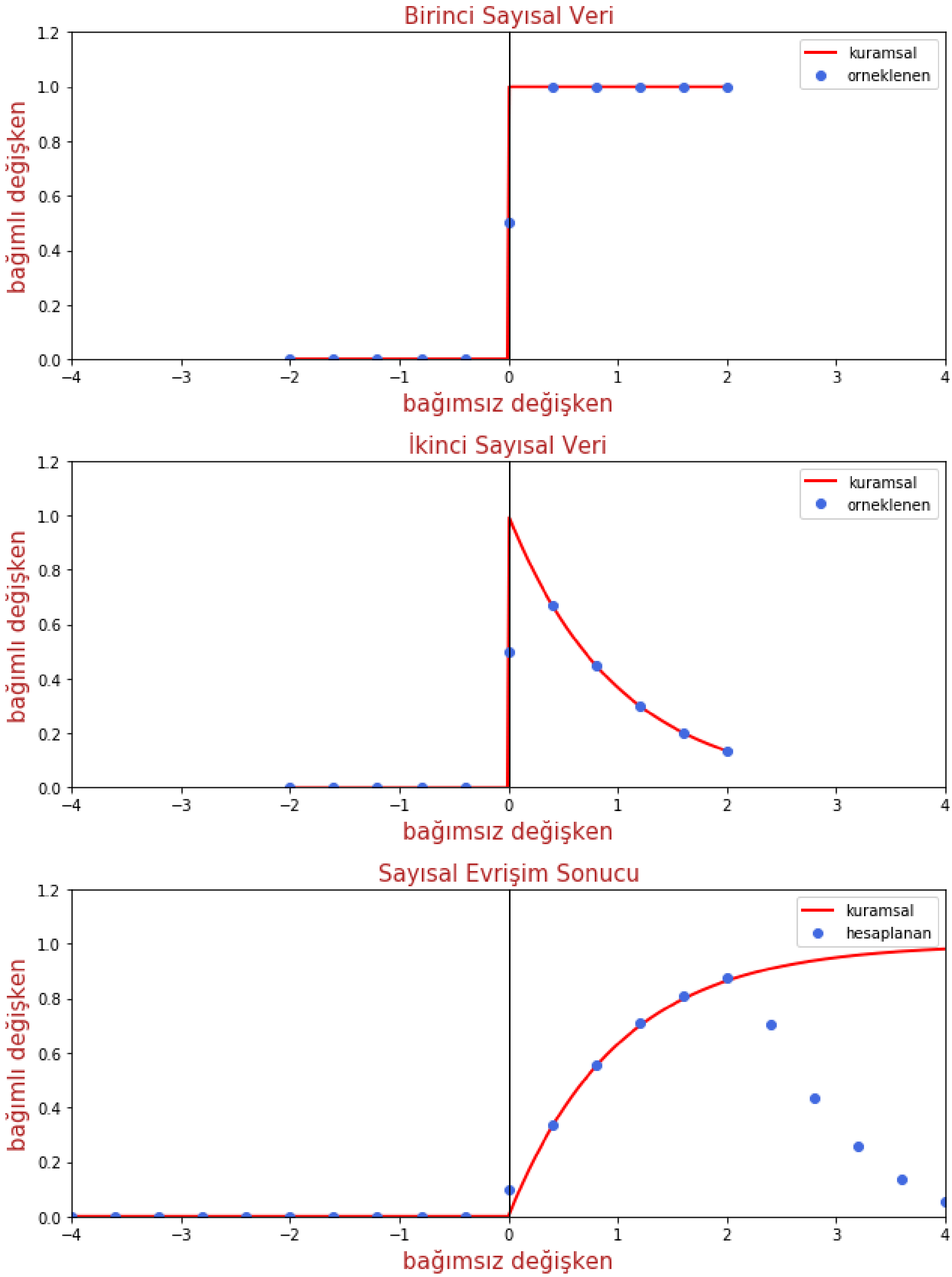
Şekil 7.2.5. Dikdörtgen (üstte) ve $exp(-\alpha|t|)$ *fonksiyonlarının (ortada) örneklenmesi ile elde edilen sayısal verilerin evrişimi. Devamlı çizgi sürekli veriyi, noktalar ise sayısal veriyi göstermektedir. En alttaki grafikte gösterilen sürekli veri (7.2.10), (7.2.11) ve (7.2.12) bağıntılarından hesaplanmıştır. Sayısal veri, sürekli fonksiyona merkez civarında iyi bir yaklaşım sağlamaktadır.*



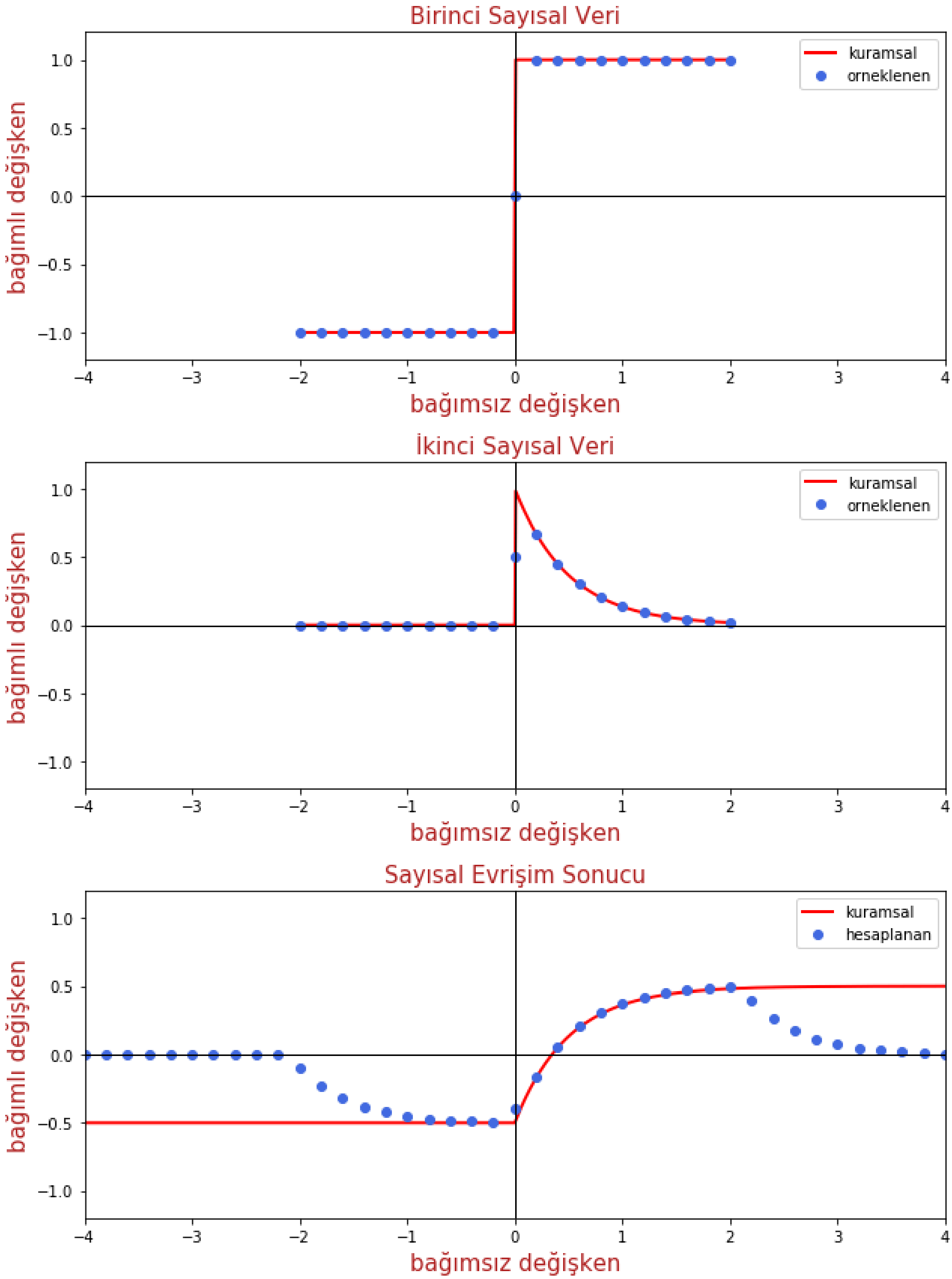
Şekil 7.2.6. Bir önceki evrişim işlemin daha kısa zaman aralığında örneklenmesi ile elde edilen sonuçlar.



Şekil 7.2.7. exp($-\alpha|t|$) ve birim basamak U(t) fonksiyonlarının örneklenmesi ile elde edilen sayısal verilerin evrişimi ($\alpha = 2$). Devamlı çizgi sürekli veriyi, noktalar ise sayısal veriyi göstermektedir. En alttaki grafikte gösterilen sürekli veri (7.2.13) ve (7.2.14) bağıntılarından hesaplanmıştır. Sayısal veri, sürekli fonksiyona belirli bir örnekleme noktasından sonra yaklaşma sağlayamamaktadır.



Şekil 7.2.8. $U(t)\exp(-\alpha t)$ ve birim basamak U(t) fonksiyonlarının örneklenmesi ile elde edilen sayısal verilerin evrişimi ($\alpha = 0.5$). Devamlı çizgi sürekli veriyi, noktalar ise sayısal veriyi göstermektedir. En alttaki grafikte gösterilen sürekli veri (5.1.6) bağıntısından hesaplanmıştır. Sayısal veri, sürekli fonksiyona belirli bir örnekleme noktasından sonra yaklaşma sağlayamamaktadır.



Şekil 7.2.9. $U(t)\ exp(-\alpha t)$ ve işaret fonksiyonlarının örneklenmesi ile elde edilen sayısal verilerin evrişimi ($\alpha = 2$). Devamlı çizgi sürekli veriyi, noktalar ise sayısal veriyi göstermektedir. En alttaki grafikte gösterilen sürekli veri Bölüm 5.4.1e'de verilen bağıntıdan hesaplanmıştır.