7.3. SAYISAL İLİŞKİ

7.3.1. Sayısal İlişki Bağıntısı

b(t) ve *g(t)* sürekli fonksiyonlarının ilişkisi (5.2.1) tanımı ile

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} b(\tau)\, g(\tau - t)\, d\tau \qquad (5.2.1)$$

olarak verilmişti. Yukarıdaki integral denklemini toplam şeklinde yazmak için Ek 1.3'de verilen dikdörtgenler yöntemi ile belirli integral hesaplama kuralı kullanılabilir (EK 1, sayfa 423). τ değişkeni Δt aralıklarında tanımlı ise

$$f(t) = \Delta t. \sum_{j=-\infty}^{\infty} b(j.\Delta t).g(j.\Delta t - t) \qquad (7.3.1)$$

yazılabilir. İlişki işleminin uygulandığı sayısal veriler, *t* değişkeninin sadece Δt aralıklarında tanımlı olduğundan, çıkış fonksiyonu da Δt aralıklarının katları olan yatay eksen değerlerinde hesaplanabilir. Yukarıdaki bağıntıda $t = i.\Delta t$ yazılarak,

$$f(i.\Delta t) = \Delta t. \sum_{j=-\infty}^{\infty} b(j.\Delta t).g((j-i).\Delta t)$$

sayısal (ayrık) ilişki bağıntısı elde edilir. Uygulamada sonsuz sayıda veri olmadığından, $b(j.\Delta t)$ sayısal değerlerinden oluşan $b_s(t)$ sayısal verisinin, eksi ve artı yatay eksen değerli veri sayıları sırası ile *p* ve *r* ise

$$f(i.\Delta t) = \Delta t \sum_{j=-p}^{r} b(j.\Delta t)\, g((j-i).\Delta t) \qquad i = -(p+s),....,0,...,q+r \qquad (7.3.2)$$

bağıntısı yazılabilir. Koordinat sisteminin merkezindeki değer de (*j*=0) düşünüldüğünde, $b_s(t)$ sayısal verisinin, *m=p+r+1* adet sayıdan oluşmakta olduğu anlaşılabilir. $g_s(t)$, sırası ile *q* ve *s* adet eksi ve artı yatay eksen değerli, toplam *n=q+s+1* adet sayısal veriden oluşmakta ise çıkış verisi de sınırlı sayıda olacaktır. $b_s(t)$ ve $g_s(t)$ sayısal verilerinin sırası ile ilk ve son değerlerinin çarpımından çıkış verisinin ilk değeri elde edilebilir. Bu durumda, ilk veri $b_s(t)$ için *j=–p* ve ikinci veri $g_s(t)$ için *s=j–i* olmalıdır. Bu iki koşuldan, *i* sayacının ilk değerinin *i=j–s=–(p+s)* olması gerektiği bulunabilir. Çıkış verisinin son değeri ise $b_s(t)$ ve $g_s(t)$ sayısal verilerinin son ve ilk değerlerinin çarpımından elde edilir. Bu durumda, $b_s(t)$ için *j=r* ve $g_s(t)$ için *–q=j–i* olmalıdır. Bu iki koşuldan, *i* sayacının son değerinin *i=r+q* olması gerektiği bulunabilir. Çıkış verisinin toplam sayısı, merkezdeki veri ile birlikte *k=p+s+q+r+1* olarak hesaplanabilir. *p+r=m–1 ve q+s=n–1* olduğundan, ilişki uygulanan verilerin sayısı cinsinden, çıkış verisinin sayısı

$$k = n + m - 1 \qquad (7.3.3)$$

bağıntısından hesaplanabilir. Burada verilen sayısal işlemlerin yapılabilmesi için ilişki uygulanan sayısal verilerin aynı örnekleme aralığı ile örneklenmesi gerekir. Bu nedenle, çıkış verisi de aynı örnekleme aralıkları ile elde edilir.

7.3.2. Sayısal İlişkinin Uygulanışı

Yukarıda verilen matematiksel gösterimlerin bilgisayar hesaplamaları için uygun bir biçime dönüştürülmesi gerekmektedir. Bu nedenle sayısal veriler ve yatay eksen değerleri ayrı dizilerde saklanır. Her ikisi de Δt aralıkları ile örneklenmiş, m adet sayısal değeri bulunan bir verinin elemanları $b_1, b_2, b_3, ..., b_m$ simgeleri ve n adet veriden oluşan diğer bir sayısal verinin elemanları da $g_1, g_2, g_3, ..., g_n$ simgeleriyle gösterilir ise bu iki sayısal verinin ilişkisi, sırası ile m=4 ve n=7 adet veriden oluşan bir örnek için,

$$\begin{array}{cccccccccc} & & & & & & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & g_6 & g_7 & & & \end{array}$$

$$f_1 = b_1.g_7$$

çarpımı ile başlar. Burada, kolaylık amacı ile Δt çarpanı yazılmamıştır. Çıkışın ikinci sayısal değerini hesaplamak için ikinci veri Δt kadar kaydırılır ve

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & g_6 & g_7 & & \end{array}$$

işlemi ile karşılıklı sayılar birbirleriyle çarpılır ve çarpım sonuçları toplanarak, çıkışın ikinci sayısal değeri $f_2 = b_1.g_6 + b_2.g_7$ olarak hesaplanır. İkinci verinin bir örnekleme aralığı kaydırılması ile

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & g_6 & g_7 & \end{array}$$

$$f_3 = b_1.g_5 + b_2.g_6 + b_3.g_7$$

elde edilir. Kaydırma, çarpma ve toplama işlemlerinin yinelenmesi ile çıkışın diğer değerleri izleyen şekilde hesaplanabilir:

$$f_4 = b_1.g_4 + b_2.g_5 + b_3.g_6 + b_4.g_7$$
$$f_5 = b_1.g_3 + b_2.g_4 + b_3.g_5 + b_4.g_6$$
$$f_6 = b_1.g_2 + b_2.g_3 + b_3.g_4 + b_4.g_5$$
$$f_7 = b_1.g_1 + b_2.g_2 + b_3.g_3 + b_4.g_4$$

İşleme devam edilerek, ikinci veri bir örnekleme aralığı kadar kaydırılır ise b_1 katsayısı ile çarpılacak birinci veriye ait sayısal değer bulunmadığında, ilişki izleyen şekilde ifade edilir:

$$\begin{array}{cccccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & & & & \\ & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & g_6 & g_7 \end{array}$$

$$f_8 = b_2.g_1 + b_3.g_2 + b_4.g_3 .$$

Sayısal veriler, sürekli verileri sınırlı bir yatay eksen aralığında temsil edebilirler. g_0 sayısal değeri örneklenmediğinden, $b_1.g_0$ çarpımı gerçekte sıfır değildir ve sayısal ilişki işleminde bu çarpım kadar belirsizlik oluşur. Benzer olarak, çıkışın son iki sayısal değeri, izleyen şekilde elde edilir:

$$f_9 = b_3.g_1 + b_4.g_2$$
$$f_{10} = b_4.g_1 .$$

Yukarıda verilen numaralandırma ile işlemlerin,

$$f_i = \Delta t.\sum_{j=1}^{m} b_j \; g_{n+j-i} \qquad i=1,..,k \tag{7.3.4}$$

toplamı ile elde edilebileceği kolaylıkla görülebilir. Toplam (7.3.2) bağıntısı gereğince Δt ile çarpılır. Burada, $k=n+m-1$ olarak verilir ve çıkış verisinin sayısını göstermektedir. Numaralandırma sıfırdan başlayarak yapılır ise

$$f_i = \Delta t.\sum_{j=0}^{m-1} b_j \; g_{(n-1)+j-i} \qquad i=0,..,k-1 \tag{7.3.5}$$

toplamı yazılabilir. Çizelge 7.2.1 ve Şekil 7.2.1'de verilen iki veri kümesi kullanılarak, $b_s(t)$ ve $g_s(t)$ sayısal verilerinin ilişkisi Şekil 7.3.1'de görüntülenmiştir. Sayısal ilişki işlemi, ilk verinin birinci ve ikinci verinin sonuncu değerlerinin çarpılması ile başlar ($f_1 = b_1.g_5$). Bu işlem sırasında, ikinci verinin merkezi, ilk sayısal verinin yatay eksen değerinden (t_{b1}), ikinci verinin son sayısal değerinin yatay ekseni kadar sola kaymış olur. Çıkış fonksiyonunun ilk sayısal değerinin (f_1), ilk verinin ilk yatay eksen değeri ile ikinci verinin son yatay eksen değerinin farkına eşit olduğu anlaşılabilir:

$$t_{f1} = t_{b1} - t_{gn} \, . \tag{7.3.6}$$

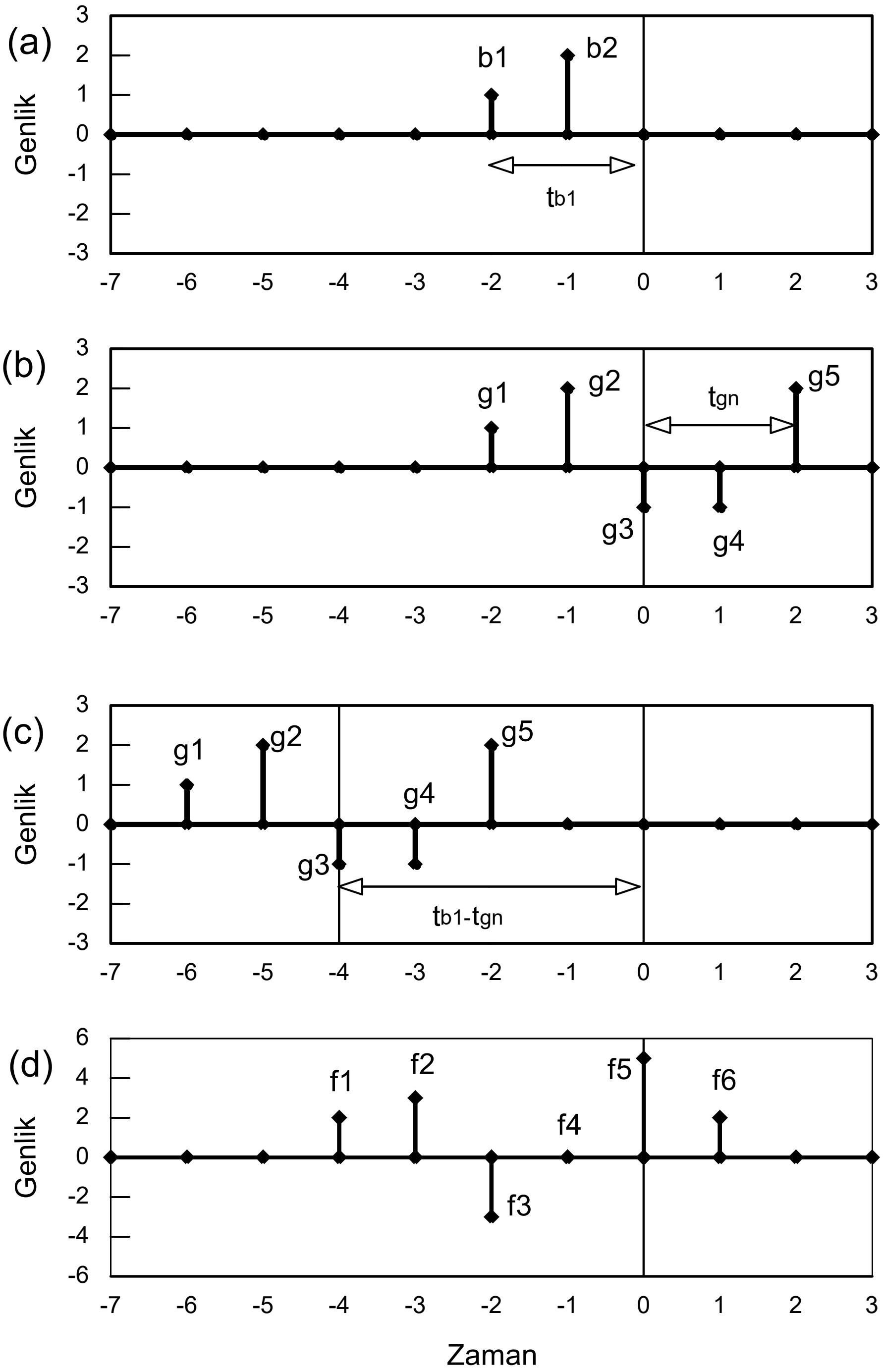
Şekil 7.3.1'deki örnekte, ilk verinin ilk değerinin yatay ekseni (–2) değerindedir. İkinci verinin son değerinin yatay ekseni ise (2) birimdir. Birinci yatay eksen değerinden, ikincisi çıkarılır ise çıkışın ilk yatay eksen değeri (–4) olarak elde edilir. $t_{b1} = -p.\Delta t$, $t_{gn} = s.\Delta t$ ve çıkışın ilk değeri için $i=-(p+s)$ olduğundan,

$$t_{f1} = i.\Delta t = -(p+s).\Delta t = -p.\Delta t - s.\Delta t$$

yazılabilir ve (7.3.6) bağıntısının doğruluğu kanıtlanmış olur. Çıkış verisinin ikinci yatay eksen değeri, ilk yatay eksen değerine Δt eklenerek bulunabilir. İşleme devam edilerek, çıkışın tüm yatay eksen değerleri hesaplanabilir. Sayısal ilişki hesaplayan FORTRAN program parçası için evrişim programında sadece ikinci verinin sayacını değiştirmek yeterlidir:

```
k=n+m-1
do i=1, k
top=0.
do j=1, m
nn=n+j-i
if (nn.ge.1.and.nn.le.n)    top=top+b(j)*g(nn)
end do
f(i)=dt*top
end do

tf(1)=tb(1)-tg(n)
do j=2, k
tf(j)=tf(j-1)+dt
end do
```



Şekil 7.3.1. Birinci veri (a), ikinci veri (b), ikinci verinin son değerinin, birinci verinin ilk değerinin hizasına getirilmesi ve toplam kayma $t_{f1} = t_{b1} - t_{gn}$ *değerinin elde edilmesi (c), ilişki sonucunun görüntülenmesi (d).*

İlişki işleminin sonucu, birinci ve ikinci olarak adlandırılan verilerin sırasının değişmesi ile değişmektedir. Bu nedenle, yukarıda verilen program parçasında, ilk olan veri her zaman *b()* dizisi olarak adlandırılmalıdır. Ancak, ilk veri ikinciden sayıca fazla ise işlem yapılmadan sadece koşulun denetlendiği durumlar için de iç döngü icra edilir. İkinci veri sayısının daha az olduğu bir duruma örnek vermek için Δt aralıkları ile örneklenmiş, *n=7* adet g_1, g_2, g_3,...,g_n birinci giriş verisi ile *m=4* adet b_1, b_2, b_3,...,b_m ikinci giriş verisinin ilişkisinin ilk değeri,

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & g_6 & g_7 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & & & & & & \end{array}$$

çarpımı ile başlar:

$f_1 = g_1.b_4$.

Çıkışın ikinci sayısal değerini hesaplamak için ikinci veri Δt kadar kaydırılır ve

$$\begin{array}{cccccccccc} & & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & g_6 & g_7 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & & & & & \end{array}$$

işlemi ile karşılıklı sayılar birbirleriyle çarpılır ve çarpım sonuçları toplanarak, çıkışın ikinci sayısal değeri

$$f_2 = g_1.b_3 + g_2.b_4$$

olarak hesaplanır. İşleme devam edilmesi ile

$$f_3 = g_1.b_2 + g_2.b_3 + g_3.b_4$$

$$f_4 = g_1.b_1 + g_2.b_2 + g_3.b_3 + g_4.b_4$$

$$f_5 = g_2.b_1 + g_3.b_2 + g_4.b_3 + g_5.b_4$$

$$f_6 = g_3.b_1 + g_4.b_2 + g_5.b_3 + g_6.b_4$$

$$f_7 = g_4.b_1 + g_5.b_2 + g_6.b_3 + g_7.b_4$$

$$f_8 = g_5.b_1 + g_6.b_2 + g_7.b_3$$

$$f_9 = g_6.b_1 + g_7.b_2$$

$$f_{10} = g_7.b_1$$

çıkış değerleri bulunabilir. Bu çıkış değerlerinin daha önce $g_s(t)$ ve $b_s(t)$ sayısal verilerinin ilişkisi için verilen ve (7.3.4) toplamı ile ifade edilen örnek ile ters sırada elde edildiği görülmektedir. Bunun nedeni birinci ve ikinci verilerin yer değiştirmiş olmasıdır. Bu durumda, çıkışın sıra numaraları değiştirilerek, (7.3.4) yeniden yazılabilir:

$$f_{k-i+1} = \sum_{j=1}^{m} b_j \; g_{n+j-i} \qquad i=k,\, k-1, ..., 1. \tag{7.3.7}$$

Numaralandırma sıfırdan başlayarak yapılır ise

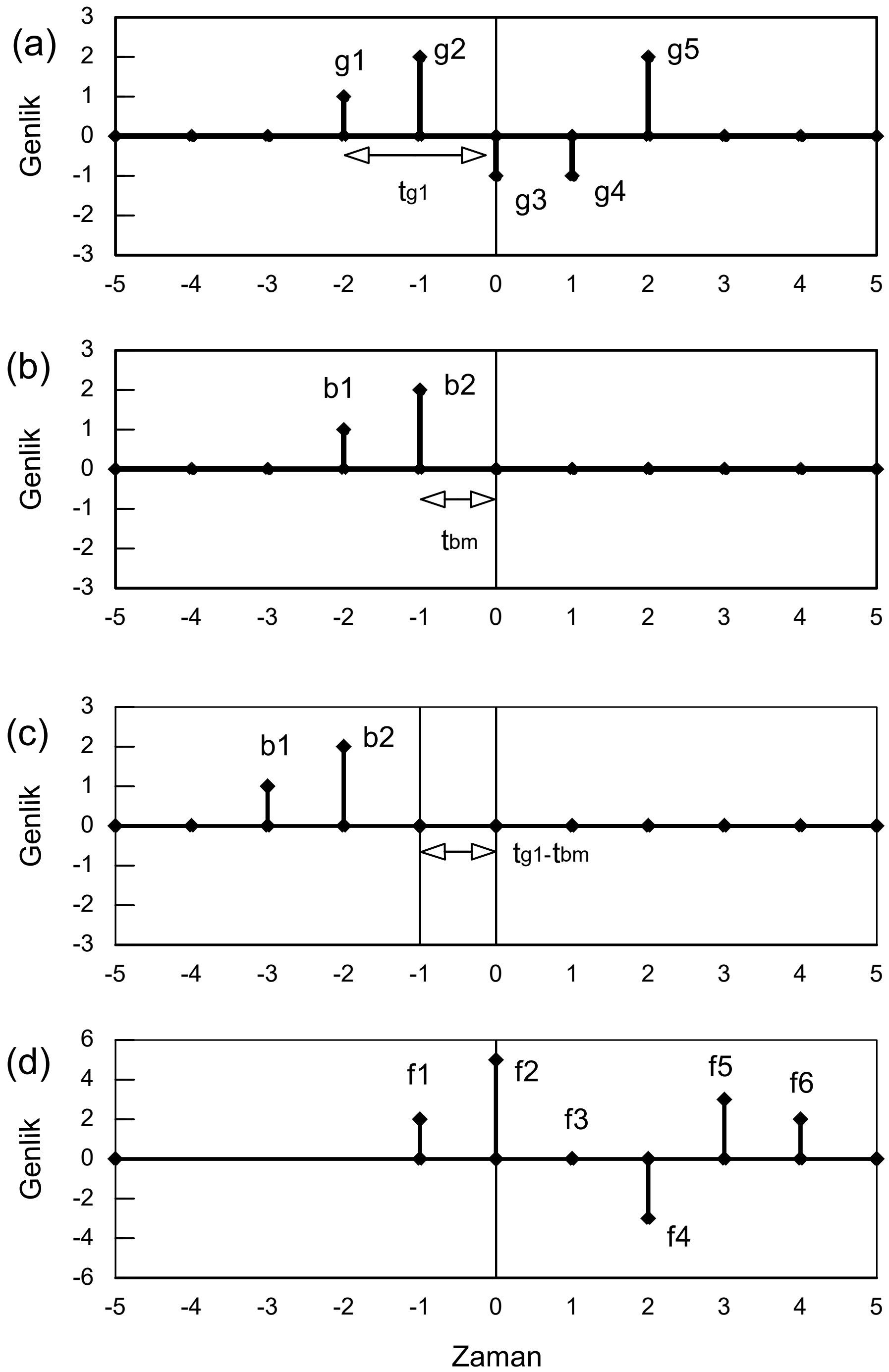
$$f_{k-i} = \sum_{j=0}^{m-1} b_j \; g_{(n-1)+j-i} \qquad i=k-1, .., 1,\, 0. \tag{7.3.5}$$

toplamı elde edilir.

Çıkış fonksiyonunun ilk sayısal değeri ise ilk verinin ilk yatay eksen değeri ile ikinci verinin son yatay eksen değerinin farkından hesaplanabilir:

$$t_{f1} = t_{g1} - t_{bm} . \tag{7.3.8}$$

Çizelge 7.2.1 ve Şekil 7.2.1'de verilen iki veri kümesi kullanılarak $g_s(t)$ ve $b_s(t)$ sayısal verilerinin, (7.3.7) toplamı ile hesaplanan ilişkisi Şekil 7.3.2'de görüntülenmiştir.



Şekil 7.3.2. Birinci veri (a), ikinci veri (b), ikinci verinin son değerinin, birinci verinin ilk değerinin hizasına getirilmesi ve toplam kayma $t_{f1} = t_{g1} - t_{bm}$ değerinin elde edilmesi (c), ilişki sonucunun görüntülenmesi (d).