

BÖLÜM 8

Doğrusal Süzgeç Kuramı

8.1. DOĞRUSAL SÜZGEÇİN TANIMI

İnsan yapımı aygıtlar, doğal veya üretilmiş malzemeler fiziksel süreçlerin etkisi altında kaldıklarında bunları bir başka biçime dönüştürerek, bu süreçlere yanıt üretirler. Örneğin, bir elektrik devresi kendisine uygulanan gerilimi farklı bir biçime dönüştürür. Bir bina etkisinde kaldığı deprem veya taşıt trafiği kaynaklı dalgalara bir tepki üreterek salınımında bulunur. Süreçleri başlatan girdiler, **giriş verisi** veya kısaca **giriş** olarak adlandırılır. **Sistem** ise kendisini etkileyen bir girişi, bir **çıkış verisine (çıkışa)** dönüştürür. Giriş ve çıkışın değişken olabilmelerine karşılık, sistemin kendisi değişmeyen birimlerden oluşur. Sistem, birlikte davranış gösteren parçaların bir araya gelmesi ile oluşan bütüne verilen bir adlandırmadır. Sistemin nasıl bir çıkış üreteceği, hem sistemin kendisine hem de girişe bağlıdır.

Doğrusal sistemler, giriş ve çıkışı arasında aşağıdaki koşulları sağlayan sistemlerdir:

1. $g_1(t)$, $g_2(t)$, $g_3(t)$ ayrı ayrı sisteme giriş olarak uygulandığında, sırası ile $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ çıkışları elde edilir. Eğer, $g_1(t) + g_2(t) + g_3(t)$ süzgece giriş olarak uygulanırsa, çıkışın da $f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$ toplamına eşit olması gerekir.
2. Süzgece $g(t)$ yerine, kendisinin bir katsayı ile çarpımı giriş olarak uygulanmışsa, çıkış da aynı katsayıyla çarpılmış olarak elde edilir. Bu özellik katsayının bütün değerleri için geçerlidir.
3. Doğrusal bir sistemin girişi gerçel bir katsayı kadar kayar ise çıkışı da aynı değer kadar kayar. Yani, $g(t-a)$ girişine $f(t-a)$ yanıtı verilir.

Bir sistem yukarıdaki üç özellikten herhangi birini sağlamaz ise doğrusal olmayan bir sistem olarak sınıflandırılır. Evrişim integrali bu özelliklerin tümünü sağladığından bir doğrusal sistemin davranışı da evrişim integrali ile modellenebilir:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (8.1.1)$$

veya simgesel olarak,

$$f(t) = g(t) * h(t) \quad (8.1.2)$$

yazılabilir. Burada * simgesi evrişim işlemini belirtir. Doğrusal sistemlerin evrişim ile ifade edilmesi **süzgeçleme** olarak anılır. Bu işlemi gerçekleştiren işleç ise **doğrusal süzgeç** olarak adlandırılır. $g(t)$ ve $f(t)$ sırası ile giriş ve çıkış fonksiyonlarını gösterir. $h(t)$ ise sistemin özelliklerine bağlı bir fonksiyondur ve **süzgeç fonksiyonu** olarak adlandırılır. Süzgeç yapımında ana sorun $g(t)$ girişini, istenen $f(t)$ çıkışına dönüştüren süzgeç fonksiyonunu saptamaktır. Eğer, sadece süzgecin işlevine bağımlı olan $h(t)$ fonksiyonu bilinir ise herhangi bir $g(t)$ girişine verilen $f(t)$ yanıtı da hesaplanabilir. (8.1.2) bağıntısında giriş fonksiyonu olarak birim impuls uygulanır ise birim impuls ile evrişim özelliğinden, çıkışın süzgeç fonksiyonuna eşit olduğu görülür:

$$f(t) = \delta(t) * h(t) = h(t). \quad (8.1.3)$$

Süzgeç fonksiyonu, bu nedenle **birim impuls yanıtı** olarak da adlandırılır. Birim impuls ile evrişimden süzgeç fonksiyonu için bir bağıntının türetilmesi giriş ve çıkış arasındaki ilişkiye bağlıdır. Ancak birçok problem için bu yol ile süzgeç fonksiyonu tanımlanamayabilir.

8.1.1. sinc Yanıt

Sayısal veri olarak kayıt edilen ölçü değerleri üzerinde gerçekleştirilecek matematik işlemlerde, sürekli veriler için geliştirilen bağıntılar aynen kullanılamaz. Örneğin, (8.1.1) bağıntısı sürekli veriler için geçerlidir. Sürekli bir fonksiyon ile onun sayısallaştırılmışı arasındaki ilişki (7.1.15) bağıntısı ile verilmiştir. Sürekli veriyi, sayısal veri cinsinden veren (7.1.15) eşitliği, (8.1.1) süzgeç bağıntısında yerine yazılır ise

$$f(t) = g_s(t) * \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} * h(t) \quad (8.1.4)$$

elde edilir. Sinc ve süzgeç fonksiyonları önceden evriştirilerek, Δt aralıkları ile örneklenebilir ve izleyen eşitlik ile örnekleme aralığına bağımlı sayısal veri tanımlanabilir:

$$b(k.\Delta t) = \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} * h(t) = \frac{\sin(\pi t / \Delta t)}{\pi t / \Delta t} * h(t). \quad (8.1.5)$$

Burada, $b(k.\Delta t)$ sayısal bir veridir ve **süzgeç katsayıları** olarak adlandırılır. Süzgeç fonksiyonu sadece süzgecin özelliklerine bağımlı bir fonksiyon iken süzgeç katsayıları hem süzgecin özelliklerine hem de örnekleme aralığına bağımlıdır. Böylelikle, belirli bir örnekleme aralığı için belirli bir işlevi yerine getiren süzgeç katsayıları önceden hesaplanarak, gerektiğinde kullanılabilir. Buradaki çıkarımda, süzgeç katsayıları, sinc fonksiyonu ile evrişimden elde edildiğinden, (8.1.5) bağıntısı ile hesaplanan süzgeç katsayıları, **sinc yanıt** olarak adlandırılır. Böylelikle, (8.1.4) bağıntısı iki sayısal verinin evrişimi durumuna getirilmiş olur:

$$f(t) = g_s(t) * b(k.\Delta t). \quad (8.1.6)$$

Hesaplama kısıtlı sayıda veri değeri ile yürütüleceğinden, (8.1.6) bağıntısı ile hesaplanan çıkış fonksiyonu, sürekli fonksiyonlar için verilen (8.1.2) bağıntısındaki çıkış fonksiyonuna eşit olmayacaktır. (8.1.6) bağıntısının çıkışı, $f^*(t)$ sürekli fonksiyonuna bir yaklaşım üretir ve $f^*(t)$ simgesi ile gösterilir ise

$$f^*(t) = g_s(t) * b(k.\Delta t). \quad (8.1.7)$$

yazılabilir. (8.1.2) ve (8.1.6) denklemlerinin sağ yanları farklı olduğundan, çıkışın sürekli fonksiyonlar veya sayısal verilerden hangisi için tanımlandığı belirlidir. Bu nedenle, kavram karışıklığı yaratmadığı sürece (8.1.7) yerine (8.1.6) gösterimi de kullanılacaktır.

Süzgeç katsayılarının bulunmasında izlenecek yöntemlere bir örnek vermek için giriş ve çıkışı arasında,

$$f(t) = g(t) + 0.5 g(t + c)$$

bağıntısı bulunan süzgeç ele alınabilir. Bu süzgeçte çıkış, giriş ve girişin c kadar kaymışın ağırlıklı toplamına eşittir. Bu süzgecin birim impuls yanıtı,

$$f(t) = [g(t) + 0.5 g(t + c)] * \delta(t),$$

$$f(t) = g(t) * \delta(t) + 0.5 g(t + c) * \delta(t) = g(t) * [\delta(t) + 0.5 \delta(t + c)],$$

olarak elde edilir. Buradan, süzgeç fonksiyonu

$$h(t) = \delta(t) + 0.5 \delta(t + c)$$

olarak tanımlanabilir. Şekil 8.1.1'a'da süzgeç fonksiyonu görüntülenmiştir. Süzgeç katsayıları, süzgeç fonksiyonu ile sinc fonksiyonunun evrişimine eşit olduğundan

$$b(k.\Delta t) = [\delta(t) + 0.5 \delta(t + c)] * \text{sinc}$$

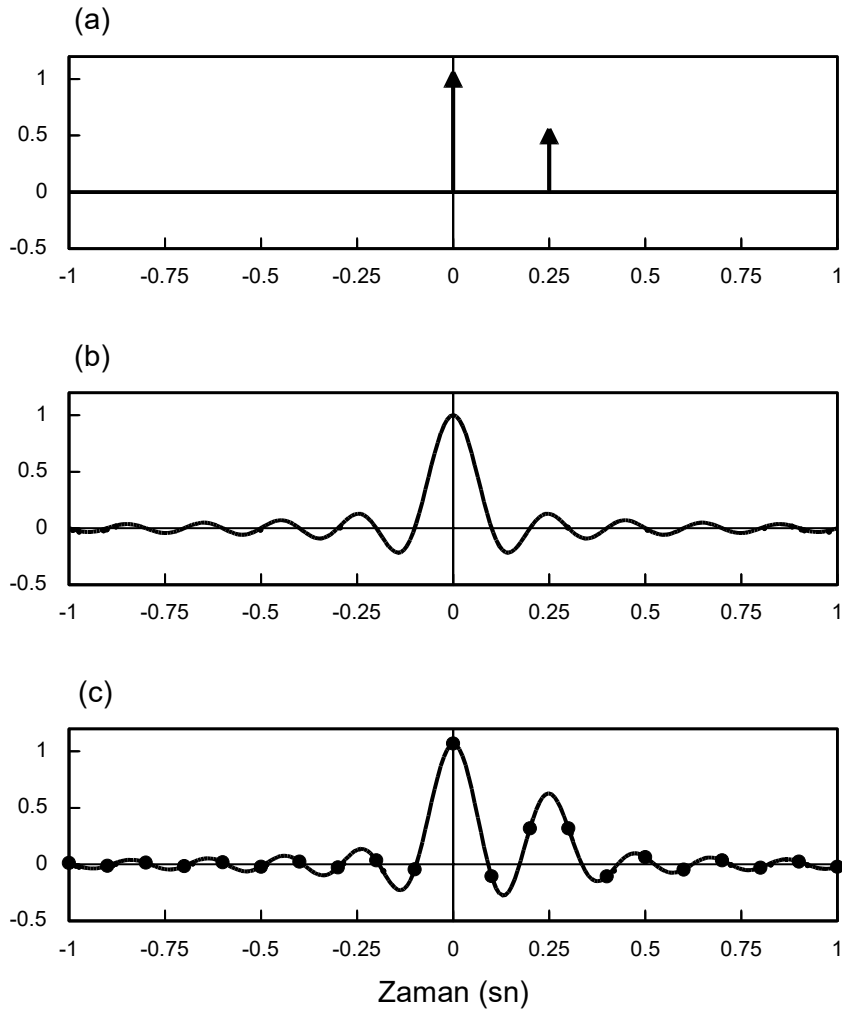
yazılabilir ve evrişimin dağılım özelliğinden

$$b(k.\Delta t) = \delta(t) * \text{sinc} + 0.5 \delta(t + c) * \text{sinc},$$

elde edilir. Birim impuls ile sinc fonksiyonunun evrişiminden,

$$b(k.\Delta t) = \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} + 0.5 \frac{\sin(2\pi f_N (t + c))}{2\pi f_N (t + c)}$$

sonucu bulunabilir. Şekil 8.1.1'de sinc ile evrişim ve süzgeç katsayılarının elde edilmesi görüntülenmiştir.



Şekil 8.1.1. İki birim impulsun toplamından oluşan süzgeç fonksiyonu (a), $\Delta t = 0.1$ saniye; $f_N = 5$ Hz için sinc fonksiyonu (b), süzgeç fonksiyonu ile sinc fonksiyonunun evrişimi ile elde edilen süzgeç katsayıları (dolu daireler) (c). c katsayısı -0.25 olarak alınmıştır.

Süzgeç fonksiyonları, birim impuls içeren yukarıdaki örneklerden farklı fonksiyonlar ile de tanımlanmış olabilir. (8.1.5) bağıntısının açık yazılımı ile elde edilen,

$$b(k \cdot \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot \frac{\sin[2\pi f_N(t - \tau)]}{2\pi f_N(t - \tau)} \cdot d\tau \quad (8.1.8)$$

integralinin çözülebildiği koşullarda, sinc yanıt ve dolayısıyla süzgeç katsayılarını veren bağıntılar bulunabilir. Aksi takdirde süzgeç katsayıları (8.1.8) bağıntısından sayısal integrasyon yöntemleri ile hesap edilir. Ancak, süzgeç fonksiyonu salınımlı ise (8.1.8) denkleminin sayısal integral alma yöntemleri ile hesaplanmasında yeterli doğruluk sağlanamayabilir. Bu durumda izleyen bölümde açıklanacak olan Fourier dönüşüm yöntemi kullanılabilir.

8.1.2. Fourier Dönüşümü ile sinc Yanıtın Saptanması

Fourier dönüşümü yönteminde ilk adım olarak çıkış ve giriş fonksiyonlarının Fourier dönüşümlerinin oranı saptanır. İzleyen Fourier dönüşüm çiftlerinden,

$$f(t) \leftrightarrow F(f),$$

$$g(t) \leftrightarrow G(f),$$

$$h(t) \leftrightarrow H(f)$$

ve evrişimin frekans bölgesinde çarpmaya dönüşmesinden, (8.1.2) bağıntısının Fourier dönüşümü

$$F(f) = H(f) \cdot G(f) \quad (8.1.9)$$

olarak verilebilir. Frekans bölgesinde giriş ve çıkış fonksiyonlarının Fourier dönüşümleri arasındaki ilişkinin bölme işlemine karşılık geldiği, (8.1.9) bağıntısından görülebilir:

$$H(f) = F(f) / G(f). \quad (8.1.10)$$

Burada, $H(f)$; **süzgeç belirtkeni** olarak adlandırılır. Süzgeç fonksiyonu $h(t)$, sadece süzgecin özelliklerine bağlı olduğundan, onun Fourier dönüşümü olan süzgeç belirtkeni de sadece süzgecin özelliklerine bağlıdır. (8.1.9) bağıntısından görüldüğü gibi süzgeç belirtkeni, frekans bölgesinde çarpma işlemi ile girişi, çıkışa dönüştürmektedir. Bu nedenle, **transfer fonksiyonu** olarak da adlandırılır.

sinc ve $h(t)$ fonksiyonlarının evrişiminin birleştirilmesine benzer olarak,

$$b(k \cdot \Delta t) = \text{sinc} * h(t) \leftrightarrow B(f) = \Delta t \text{ rect}(f_N) H(f) \quad (8.1.11)$$

yazılabilir ve dikdörtgen fonksiyon ile süzgeç belirtkeninin çarpımı, süzgeç katsayılarının Fourier dönüşümüne eşittir (Ghosh, 1971). $B(f)$ ile gösterilen bu çarpım, **süzgeç izgesi** olarak adlandırılır. Frekans bölgesinde dikdörtgen fonksiyon ile çarpım, süzgeç belirtkeninin Nyquist frekansından büyük frekanslara karşılık gelen değerlerini sıfır yapar ve süzgeç izgesi bant sınırlı bir fonksiyonun Fourier dönüşümü olarak düşünülebilir. Böylece, (8.1.7) bağıntısının frekans bölgesindeki karşılığı aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$f^*(t) = g_s(t) * b(k \cdot \Delta t) \leftrightarrow F^*(f) = G_s(f) B(f). \quad (8.1.12)$$

Süzgeç katsayılarının hesaplanmasını sağlayan bir bağıntı, (8.1.11) eşitliğinden,

$$b(k \cdot \Delta t) = \Delta t \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}(f_N) H(f) \exp(i2\pi ft) df \quad (8.1.13)$$

olarak elde edilir. Bu integral, dikdörtgen fonksiyon ile çarpıldığından integral sınırları $(-f_N, f_N)$ aralığına indirgenir:

$$b(k \cdot \Delta t) = \Delta t \cdot \int_{-f_N}^{f_N} H(f) \cdot \exp(i2\pi ft) \cdot df . \quad (8.1.14)$$

Süzgeç belirtkeni karmaşık bir fonksiyon olduğundan genliği ve fazı kullanılarak,

$$H(f) = A(f) \exp[i\phi(f)] \quad (8.1.15)$$

biçiminde yazılabilir. (8.1.15) eşitliği, (8.1.14) bağıntısında yerine yazılır ise

$$b(k \cdot \Delta t) = \Delta t \cdot \int_{-f_N}^{f_N} A(f) \cdot \exp[i(2\pi ft + \phi(f))] \cdot df$$

elde edilir. Euler bağıntısı ile

$$b(k \cdot \Delta t) = \Delta t \int_{-f_N}^{f_N} A(f) \{ \cos[2\pi ft + \phi(f)] + i \sin[2\pi ft + \phi(f)] \} df$$

bulunabilir. *sinc* yanıt gerçel bir fonksiyon olduğundan, integralin sinüs kapsayan bölümü sıfıra eşit olur. Ayrıca, genlik izgesi ve kosinüs fonksiyonu çift olduğundan integral sıfır ile Nyquist frekansı arasında alınarak, iki ile çarpılabilir:

$$b(k \cdot \Delta t) = 2 \Delta t \int_0^{f_N} A(f) \cos[2\pi ft + \phi(f)] df . \quad (8.1.16)$$

Süzgeç katsayılarını veren bağıntılar, süzgeç fonksiyonu bilinmekte ise (8.1.8) bağıntısından veya süzgeç belirtkeni bilinmekte ise (8.1.13) veya (8.1.16) bağıntısından elde edilebilir. Ancak, her fonksiyonun integrali alınamayacağından, süzgeç katsayılarının doğrudan hesabını sağlayan bir fonksiyon belirlenemeyebilir. Bu durumda, genlik ve faz izgeleri hesaplanarak, sayısal integral alma yöntemleri uygulanabilir.

Genlik ve faz cinsinden yazılmış iki karmaşık fonksiyonun çarpımında, çarpım sonucu elde edilen genlik, genliklerin çarpımına faz ise fazların toplamına eşittir. Çünkü iki karmaşık fonksiyonun genlik ve fazı

$$X_1(f) = A_1(f) \cdot \exp[i\phi_1(f)]$$

$$X_2(f) = A_2(f) \cdot \exp[i\phi_2(f)]$$

ise bu iki fonksiyonun çarpımı ile

$$Y(f) = X_1(f) \cdot X_2(f) = A_1(f) \cdot A_2(f) \cdot \exp\{i[\phi_1(f) + \phi_2(f)]\}$$

elde edilir. Süzgeç izgesinin genliği $(A_b(f))$, süzgeç belirtkeninin genliği $(A(f))$ ile dikdörtgen fonksiyonun genliğinin çarpımına eşittir ve aşağıdaki bağıntılar ile verilebilir:

$$A_b(f) = A(f) \cdot \Delta t \quad f < f_N$$

$$A_b(f) = A(f) \cdot \Delta t / 2 \quad f = f_N$$

$$A_b(f) = 0 \quad f > f_N$$

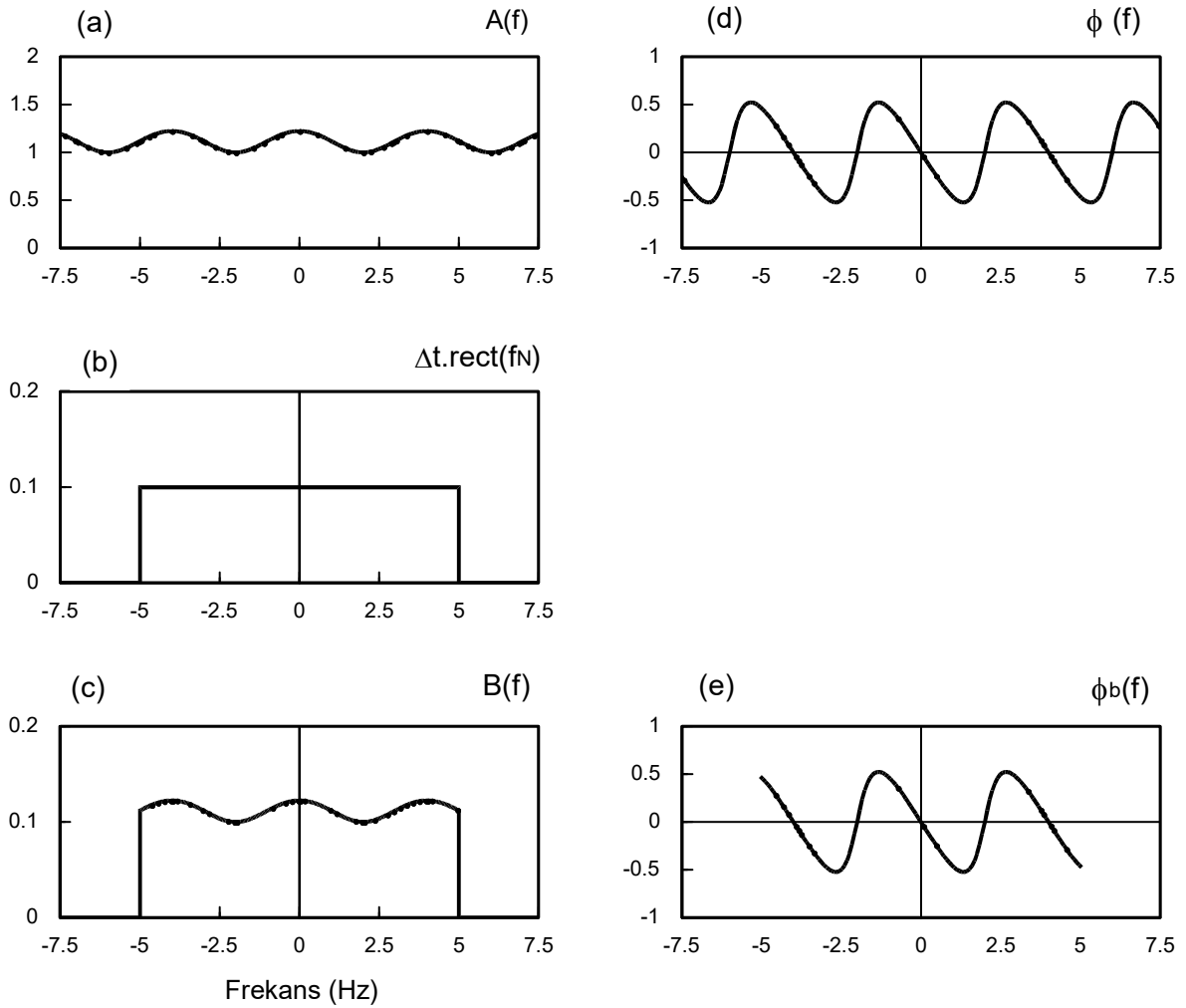
Süzgeç izgesinin fazı ise dikdörtgen fonksiyonu fazsız olduğundan süzgeç belirtkeninin fazına eşittir, ancak bu faz Nyquist frekansından büyük frekanslar için sıfırdır.

Daha önce giriş ve çıkışı arasındaki bağıntı, zaman bölgesinde

$$f(t) = g(t) + 0.5 g(t + c)$$

olarak verilen örnek, Fourier dönüşümü yöntemi ile yeniden ele alınır ise her iki tarafın Fourier dönüşümünden izleyen bağıntı elde edilir:

$$F(f) = G(f) + 0.5 G(f) \exp(i2\pi cf) = G(f) [1 + 0.5 \exp(i2\pi cf)].$$



Şekil 8.1.2. Şekil 8.1.1'de verilen süzgecin, süzgeç belirtkeninin genlik (a) ve faz (d) izgeleri. Süzgeç belirtkeni ile dikdörtgen fonksiyonunun (b) çarpımı ile süzgeç izgesinin genliği (c) ve fazının (e) elde edilmesi.

Çıkışın Fourier dönüşümü ($F(f)$), (8.1.10) ile verilen süzgeç belirtkeni bağıntısında yerine yazılır ise izleyen sonuç elde edilir:

$$H(f) = \frac{F(f)}{G(f)} = \frac{G(f)[1 + 0.5 \exp(i2\pi cf)]}{G(f)} = 1 + 0.5 \exp(i2\pi cf).$$

Süzgeç belirtkeni, Euler bağıntısı kullanılarak, gerçel ve sanal bölümlerine izleyen şekilde ayrılabilir:

$$H(f) = 1 + 0.5 [\cos(2\pi cf) + i \sin(2\pi cf)] = [1 + 0.5 \cos(2\pi cf)] + i [0.5 \sin(2\pi cf)].$$

Buradan, genlik ve faz izgeleri sırası ile

$$A(f) = \sqrt{[1 + 0.5 \cos(2\pi cf)]^2 + 0.25 \sin^2(2\pi cf)} = \sqrt{1.25 + \cos(2\pi cf)},$$

$$\phi(f) = \arctan \left[\frac{0.5 \sin(2\pi cf)}{1 + 0.5 \cos(2\pi cf)} \right]$$

şeklinde tanımlanabilir. Şekil 8.1.2'de süzgeç belirtkeninin dikdörtgen fonksiyon ile çarpılarak, süzgeç izgesinin genlik ve faz değerlerinin elde edilmesi görüntülenmiştir.

Süzgeç katsayılarının (8.1.8) bağıntısı ile zaman bölgesinde belirlendiği durumlarda da, bir süzgecin genlik ve fazının incelenmesi süzgecin hangi frekanslardaki olayları büyütmede veya bastırmakta olduğunun anlaşılması açısından önemlidir. Çünkü giriş fonksiyonunun Fourier dönüşümü ile süzgeç izgesi çarpıldığından, çıkışa da süzgeç izgesinin özellikleri aktarılır. Örneğin, süzgeç izgesinin genlikleri frekans ile artmakta ise giriş verisindeki yüksek frekanslı olaylar abartılarak çıkış verisine aktarılır.

8.1.3. Sayısallaştırılmış Giriş ve Çıkış Verileri ile sinc Yanıtın Saptanması

Süzgeç fonksiyonunun veya süzgeç belirtkeninin bir fonksiyon olarak bilinmemesi durumunda, bir süzgecin katsayılarının hesaplanabilmesi için bir süzgecin en az bir giriş ve ona karşılık gelen bir çıkış fonksiyonunun bilinmesi gerekir. Bu durumda, sinc yanıtı izleyen yol ile saptanabilir:

1. Kuramsal giriş ve çıkış fonksiyonları Δt aralıkları ile örneklenir.
2. Giriş ve çıkış fonksiyonlarının sayısal Fourier dönüşümü alınır ve (8.1.10) bağıntısından süzgeç belirtkeni bulunur.
3. Süzgeç belirtkeni ile dikdörtgen fonksiyon çarpılır ve süzgeç izgesi bulunur.
4. Süzgeç izgesinin sayısal ters Fourier dönüşümü ile sinc yanıt yani süzgeç katsayıları saptanır.

8.2. SAYISAL İŞLEMLER İÇİN SÜZGEÇ UYGULAMA ÖRNEKLERİ

8.2.1. Birinci Türev Süzgeci

Çıkışın, girişin türevine eşit olduğu süzgeçlerdir:

$$f(t) = \partial g(t) / \partial t. \quad (8.2.1)$$

Bir fonksiyonun, birim impuls ile evrişimi yine kendisi olduğundan, yukarıdaki bağıntı izleyen şekilde yazılabilir:

$$f(t) = \frac{\partial g(t)}{\partial t} * \delta(t). \quad (8.2.2)$$

Evrişim işleminde türevin yerdeğiştirme özelliğinden,

$$f(t) = g(t) * \frac{\partial \delta(t)}{\partial t}. \quad (8.2.3)$$

yazılabilir. Çıkış fonksiyonu, doğrusal süzgeç kuramı gereğince, giriş ile süzgeç fonksiyonunun evrişimine eşit olduğundan,

$$f(t) = g(t) * \partial \delta(t) / \partial t = g(t) * h(t) \quad (8.2.4)$$

elde edilebilir. Buradan, süzgeç fonksiyonunun birim impuls fonksiyonunun türevine eşit olduğu görülebilir:

$$h(t) = \partial \delta(t) / \partial t. \quad (8.2.5)$$

Süzgeç belirtkeni, süzgeç fonksiyonunun Fourier dönüşümünden,

$$h(t) = \frac{\partial \delta(t)}{\partial t} \leftrightarrow H(f) = i2\pi f \quad (8.2.6)$$

olarak bulunabilir. Diğer seçenek ise giriş ve çıkışı zaman bölgesinde birbirine bağlayan (8.2.1) bağıntısının Fourier dönüşümü,

$$F(f) = i2\pi f.G(f)$$

eşitliğinden yararlanmaktadır. Çıkışın Fourier dönüşümünün girişin Fourier dönüşümüne oranı, süzgeç belirtkenine eşittir:

$$H(f) = \frac{F(f)}{G(f)} = \frac{i2\pi f.G(f)}{G(f)} = i2\pi f.$$

Genlik belirtkeni, süzgeç belirtkeninin gerçel ve sanal bölümlerinin kareleri toplamının karekökünden,

$$A(f) = \sqrt{0^2 + (2\pi f)^2} = |2\pi f| \quad (8.2.7)$$

olarak bulunabilir. Şekil 8.2.1a'da, türev süzgecinin genlik belirtkeni görülmektedir. Sabitlerin türevi sıfır olduğundan, sıfır frekansında genlik belirtkeninin değeri sıfırdır. (8.1.9) bağıntısı genlik belirtkeni için yazılır ise

$$A_f(f) = A_g(f).A(f)$$

elde edilir. Burada $A_g(f)$ ve $A_f(f)$ sırası ile giriş ve çıkışın genlik izgeleridir. Girişin sıfır frekansındaki değeri yani sabit bölümü, süzgeç tarafından sıfır ile çarpılmaktadır. Öte yandan, frekans büyüdükçe genlik arttığından, yüksek frekanslı olaylar süzgeç tarafından büyütülmektedir. Faz belirtkeni ise

$$\phi(f) = \arctan\left(\frac{2\pi f}{0}\right) = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2} \quad f > 0 \quad (8.2.8)$$

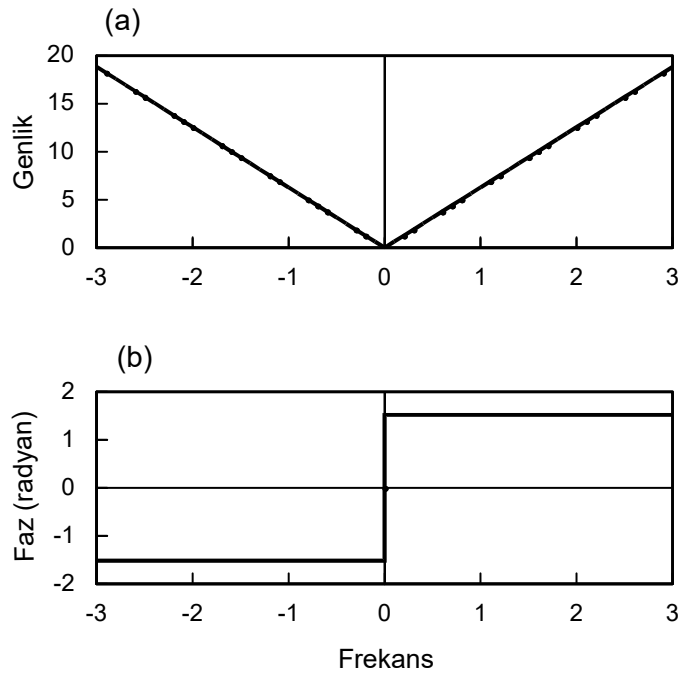
$$\phi(f) = 0 \quad f = 0$$

$$\phi(f) = -\frac{\pi}{2} \quad f < 0$$

olarak bulunabilir. Şekil 8.2.1a'da, faz belirtkeni gösterilmiştir. (8.1.9) bağıntısı faz belirtkeni için yazılır ise

$$\phi_F(f) = \phi_G(f) + \phi(f)$$

elde edilir. Burada, sırası ile $\phi_F(f)$ çıkışın, $\phi_G(f)$ girişin faz izgeleridir. Çıkışın fazı, girişin fazının $\pi/2$ eklenmişine eşittir. Bu nedenle, birinci türev işlemi ile giriş verisindeki maksimum ve minimumlar zamanda yerdeğiştirilir.



Şekil 8.2.1. Birinci türev süzgecinin genlik (a) ve faz (b) belirtkenleri.

Süzgeç fonksiyonu ile *sinc* fonksiyonunun evrişiminden, sinc yanıt için

$$b(k.\Delta t) = h(t) * \text{sin } c = \frac{\partial \delta(t)}{\partial t} * \text{sin } c \quad (8.2.9)$$

yazılabilir. Evrişimin türev özelliğinden,

$$b(k.\Delta t) = \frac{\partial \delta(t)}{\partial t} * \text{sin } c = \delta(t) * \frac{\partial \text{sin } c}{\partial t}$$

elde edilir. Birim impuls ile evrişimden,

$$b(k.\Delta t) = \delta(t) * \frac{\partial \text{sin } c}{\partial t} = \frac{\partial \text{sin } c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\text{sin}(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} \right)$$

bağıntısı bulunabilir. Türev işleminin gerçekleştirilmesi ile izleyen sonuç elde edilir (Başokur, 1983):

$$b(k.\Delta t) = \frac{\cos(2\pi f_N t)}{t} - \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t^2} . \quad (8.2.10)$$

8.2.2. İkinci Türev Süzgeci

Çıkışın, girişin ikinci türevine eşit olduğu süzgeçlerdir:

$$f(t) = \frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2} . \quad (8.2.11)$$

Birim impuls ile evrişim ve evrişimin türev özelliğinden izleyen eşitlik bulunabilir:

$$f(t) = g(t) * \frac{\partial^2 \delta(t)}{\partial t^2} . \quad (8.2.12)$$

Buradan, süzgeç fonksiyonunun birim impuls fonksiyonunun ikinci türevine eşit olduğu görülebilir:

$$h(t) = \frac{\partial^2 \delta(t)}{\partial t^2} . \quad (8.2.13)$$

Süzgeç belirtkeni, süzgeç fonksiyonunun Fourier dönüşümünden,

$$h(t) = \frac{\partial^2 \delta(t)}{\partial t^2} \leftrightarrow H(f) = (i2\pi f)^2 = -4\pi^2 f^2 \quad (8.2.14)$$

olarak elde edilebilir. Aynı bağıntılar, Fourier dönüşümü yöntemi ile de türetilebilir. Genlik belirtkeni, süzgeç belirtkeninin gerçel ve sanal bölümlerinin kareleri toplamının, karekökünden,

$$A(f) = \sqrt{(-4\pi^2 f^2)^2 + 0^2} = 4\pi^2 f^2 \quad (8.2.15)$$

olarak yazılabilir. Şekil 8.2.2'de, ikinci türev süzgecinin genlik belirtkeni görülmektedir. Sabitlerin ikinci türevi sıfır olduğundan, sıfır frekansında genlik belirtkeninin değeri sıfırdır. Öte yandan, frekans büyüdükçe genlik belirtkeni frekansın karesi ile artmaktadır ve frekansa bağlı büyültme, birinci türev süzgecine göre daha hızlıdır. Faz belirtkeni ise sanal bileşenin, gerçel bileşene oranının arktanjanından izleyen şekilde bulunur:

$$\phi(f) = \arctan\left(\frac{0}{-4\pi^2 f^2}\right) = \arctan\left(\frac{0}{-4\pi^2 f^2}\right) - \frac{\pi}{2} ,$$

$$\phi(f) = \arctan(-\infty) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi \quad f > 0 ,$$

$$\phi(f) = 0 \quad f = 0 ,$$

$$\phi(f) = \pi \quad f < 0 . \quad (8.2.16)$$

Bu sonuçlar, ikinci türev işlemi ile girişin maksimumlarının, minimumlara ve minimumlarının maksimumlara dönüştürüleceğini gösterir. Örneğin, zaman değişkeninin π kadar değişmesi ile kosinüs fonksiyonunun işareti değişir. Bu nedenle, ikinci türev olayların zamandaki yerlerini

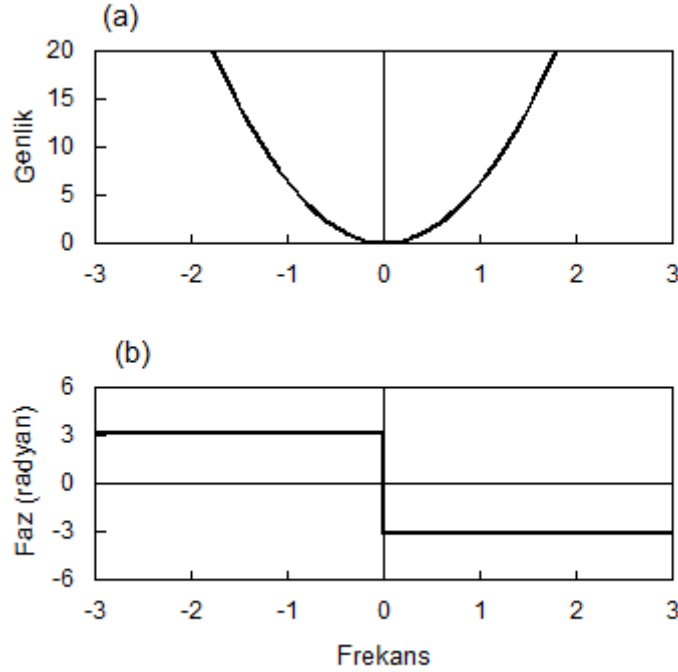
değiştirmez. Sadece niceliklerin değeri ve işareti değiştirilir. Süzgeç fonksiyonu ile *sinc* fonksiyonunun evrişiminden, *sinc* yanıt

$$b(k.\Delta t) = h(t) * \text{sinc} = \frac{\partial^2 \delta(t)}{\partial t^2} * \text{sinc} = \frac{\partial^2 \text{sinc}}{\partial t^2} \quad (8.2.17)$$

olarak bulunabilir. Türev işleminin gerçekleştirilmesi ile

$$b(k.\Delta t) = \frac{\sin(2\pi f_N t)}{\pi f_N t^3} - 2 \frac{\cos(2\pi f_N t)}{t^2} - 2\pi f_N \frac{\sin(2\pi f_N t)}{t} \quad (8.2.18)$$

sonucu elde edilir (Başokur, 1983).



Şekil 8.2.2. İkinci türev süzgecinin genlik (a) ve faz (b) belirtkenleri.

8.2.3. Çıkışın, Giriş ve Türevinin Toplamına Eşit Olduğu Süzgeçler

Çıkış, giriş ve girişin birinci türevinin toplamına eşit ise

$$f(t) = a g(t) + b \frac{\partial g(t)}{\partial t} \quad (8.2.19)$$

yazılabilir. Burada, *a* ve *b* birer gerçel katsayıdır. Bir fonksiyonun birim impuls ile evrişiminden,

$$f(t) = \left[a g(t) + b \frac{\partial g(t)}{\partial t} \right] * \delta(t) \quad (8.2.20)$$

ve evrişimin türev özelliğinden,

$$f(t) = a.g(t) * \delta(t) + b.g(t) * \frac{\partial \delta(t)}{\partial t} \quad (8.2.21)$$

elde edilebilir. Çıkış fonksiyonu, doğrusal süzgeç kuramı gereğince, giriş ile süzgeç fonksiyonunun evrişimine eşit olduğundan,

$$f(t) = g(t) * \left[a.\delta(t) + b.\frac{\partial\delta(t)}{\partial t} \right] = g(t) * h(t) \quad (8.2.22)$$

yazılabilir. Buradan, süzgeç fonksiyonunun birim impuls ile birim impuls fonksiyonunun türevinin ağırlıklı toplamına eşit olduğu görülebilir:

$$h(t) = a \delta(t) + b \frac{\partial\delta(t)}{\partial t} . \quad (8.2.23)$$

Süzgeç belirtkeni, süzgeç fonksiyonunun Fourier dönüşümünden,

$$h(t) = a.\delta(t) + b.\frac{\partial\delta(t)}{\partial t} \leftrightarrow H(f) = a + b.i 2\pi f \quad (8.2.24)$$

olarak elde edilir. Aynı bağıntılar, Fourier dönüşümü yöntemi ile de türetilebilir. (8.2.19) bağıntısının Fourier dönüşümü ile

$$F(f) = (a + bi2\pi f).G(f)$$

yazılabilir. Süzgeç belirtkeni, çıkışın Fourier dönüşümünün, girişin Fourier dönüşümüne oranına eşit olduğundan,

$$H(f) = \frac{F(f)}{G(f)} = a + b.i2\pi f$$

elde edilir. Süzgeç belirtkeninin ters Fourier dönüşümü ile (8.2.23) ile verilen süzgeç fonksiyonu bulunur. Genlik belirtkeni, süzgeç belirtkeninin gerçel ve sanal bölümlerinin kareleri toplamının karekökünden, izleyen şekilde yazılabilir:

$$A(f) = \sqrt{a^2 + b^2 4\pi^2 f^2} . \quad (8.2.25)$$

Şekil 8.2.3a'da, genlik belirtkeni görülmektedir. Sıfır frekansı için genlik belirtkeni a katsayısına eşittir ve giriş fonksiyonunun sabit bölümünün süzgeçten değişmeden geçirileceğini gösterir. Giriş fonksiyonunun yüksek frekanslı bileşenlerinin ise genlikleri büyütülür. Faz belirtkeni ise

$$\phi(f) = \arctan(b2\pi f / a) \quad (8.2.26)$$

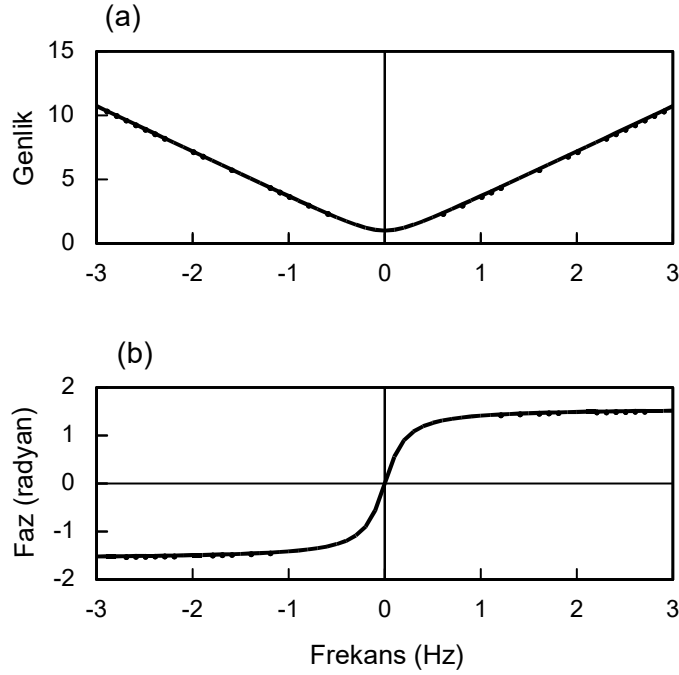
olarak yazılabilir ve Şekil 8.2.3b'de gösterilmiştir.

Süzgeç fonksiyonu ile sinc fonksiyonunun evrişiminden, sinc yanıt

$$b(k.\Delta t) = \left[a.\delta(t) + b.\frac{\partial\delta(t)}{\partial t} \right] * \sin c = a.\sin c + b.\frac{\partial \sin c}{\partial t}$$

olarak bulunabilir. Türevin alınması ile izleyen sonuç elde edilir:

$$b(k.\Delta t) = a \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} + b \frac{\cos(2\pi f_N t)}{t} - b \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t^2} . \quad (8.2.27)$$



Şekil 8.2.3. Çıkışın, giriş ve türevinin toplamına eşit olan süzgecin, genlik (a) ve faz (b) belirtkenleri ($a=1$ ve $b=1$).

8.2.4. Girişin, Çıkış ve Türevinin Toplamına Eşit Olduğu Süzgeçler

Bu süzgecin giriş ve çıkışı arasındaki ilişki,

$$g(t) = a f(t) + b \frac{\partial f(t)}{\partial t} \quad (8.2.28)$$

bağıntısı ile verilir. Her iki yanın Fourier dönüşümü ile

$$G(f) = a F(f) + b i 2\pi f F(f)$$

yazılabilir. Çıkış ve giriş fonksiyonlarının Fourier dönüşümlerinin oranından, süzgeç belirtkeni

$$H(f) = \frac{F(f)}{G(f)} = \frac{1}{a + b i 2\pi f} \quad (8.2.29)$$

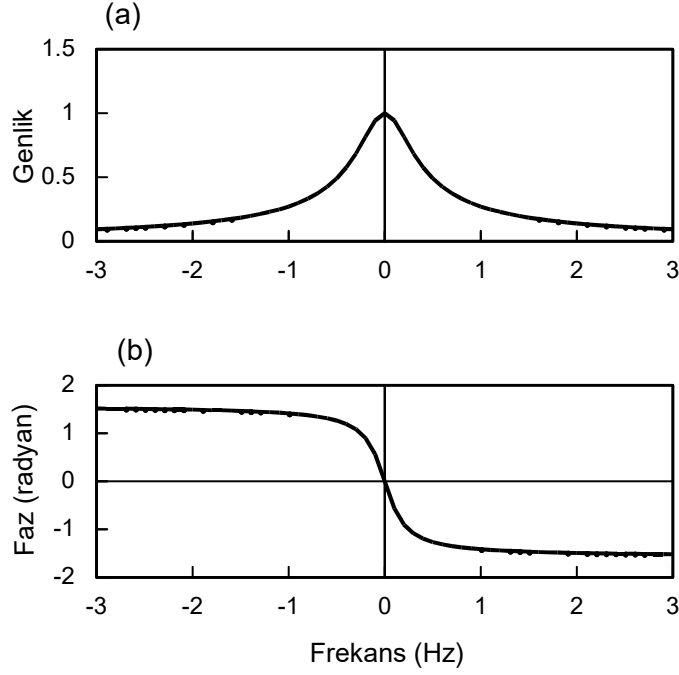
olarak bulunabilir. Burada ele alınan süzgeç, bir önceki süzgecin giriş ve çıkışının yer değiştirmesi ile elde edilmiştir. Süzgeç belirtkenlerinin karşılaştırılması, giriş ve çıkışın yer değiştirmesi durumunda, süzgeç belirtkenlerinden birinin, diğerinin bire bölünmüşüne eşit olduğunu göstermektedir. Bu durumda, bir karmaşık sayının bire bölünmesi kuralına uygun olarak, genlik izgelerinden birinin, diğerinin bire bölünmüşüne, faz izgelerinin ise birinin diğerinin ters işaretlisine eşit olduğu gösterilebilir. Böylece, genlik ve faz izgeleri için

$$A(f) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 4\pi^2 f^2}} \quad (8.2.30)$$

$$\phi(f) = -\arctan \left[\frac{b2\pi f}{a} \right] \quad (8.2.31)$$

yazılabilir. Şekil 8.2.4a ve 8.2.4b'de, genlik ve faz belirtkenleri görülmektedir.

Sıfır frekansı için genlik belirtkeni $1/a$ değerine eşittir. Frekansın artmasıyla genlik belirtkeninin sıfıra yaklaştığı ve faz belirtkeninin ise değerinin arttığı ve frekansın mutlak değerinin artması ile artı ve eksi frekanslar için sırası ile $-\pi/2$ ve $\pi/2$ değerlerine eriştiği gözlenebilir.



Şekil 8.2.4. Genlik (a) ve faz (b) belirtkenleri ($a=1$ ve $b=1$).

Süzgeç fonksiyonu, süzgeç belirtkeninin ters Fourier dönüşümünden bulunabilir. (8.2.29) bağıntısı,

$$H(f) = \frac{1/b}{(a/b) + i2\pi f}$$

biçiminde yazılabilir ve Bölüm 4.3.2'de zaman tersleme özelliğinden türetilen aşağıdaki dönüşüm çiftinden

$$\beta U(t) \exp(-at) \leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha + i2\pi f}$$

yararlanılabilir. Böylece, süzgeç fonksiyonu

$$h(t) = \frac{1}{b} U(t) \exp\left(-\frac{a}{b} t\right) \leftrightarrow \frac{1/b}{(a/b) + i2\pi f}$$

olarak bulunabilir. Kısalık için $\alpha = a/b$ yazılır ise, sinc yanıt izleyen denklem ile verilebilir (Başokur, 1983):

$$b(k.\Delta t) = (1/b) U(t) \exp(-at) * \text{sinc}. \quad (8.2.32)$$

Evrişim bağıntısının açık yazılımı ile

$$b(k.\Delta t) = \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{+\infty} U(t-\tau) \exp(-\alpha(t-\tau)) \frac{\sin(\omega_N \tau)}{\omega_N \tau} d\tau \quad (8.2.33)$$

elde edilir. Burada, ω_N ; Nyquist frekansına karşılık gelen açısal frekans ve τ integral değişkenidir. Kaymış negatif birim basamak fonksiyonu ile çarpım, integralin $(-\infty; t)$ aralığında sınırlanmasına neden olur:

$$b(k.\Delta t) = \frac{1}{b} \frac{\exp(-\alpha t)}{\omega_N} \int_{-\infty}^t \exp(\alpha \tau) \frac{\sin(\omega_N \tau)}{\tau} d\tau.$$

$u = -\tau$ değişken dönüşümünü ile

$$b(k.\Delta t) = \frac{1}{b} \frac{\exp(-\alpha t)}{\omega_N} \int_t^{\infty} \exp(-\alpha u) \frac{\sin(\omega_N u)}{u} du \quad (8.2.34)$$

yazılabilir. Sinüs salınımlı bir fonksiyon olduğundan bu integralin sayısal hesaplanmasında sorunlar ile karşılaşılabilir. (8.2.30) ve (8.2.31) ile verilen genlik ve faz izgeleri bağıntıları yardımı ile (8.1.16) integralinin sayısal hesabı ile de süzgeç katsayıları elde edilebilir.

8.2.5. Çıkışın, Giriş ve Girişin Ötelenmişinin Toplamına Eşit Olduğu Süzgeçler

Bu süzgecin giriş ve çıkışı arasındaki ilişki,

$$f(t) = a.g(t) + b.g(t+c) \quad (8.2.35)$$

bağıntısı ile verilebilir. Burada, a , b ve c gerçel sabitlerdir. Bu bağıntının sağ yanına birim impuls fonksiyonu ile evrişim uygulanır ise

$$f(t) = [a g(t) + b g(t+c)] * \delta(t) = a g(t) * \delta(t) + b g(t+c) * \delta(t),$$

$$f(t) = g(t) * [a \delta(t) + b \delta(t+c)]$$

elde edilir. Buradan, süzgeç fonksiyonu

$$h(t) = [a \delta(t) + b \delta(t+c)] \quad (8.2.36)$$

olarak belirlenir. Süzgeç katsayıları, süzgeç fonksiyonu ile *sinc* fonksiyonunun evrişimine eşit olduğundan

$$b(k.\Delta t) = [a \delta(t) + b \delta(t+c)] * \text{sinc} \quad (8.2.37)$$

yazılabilir ve evrişimin dağılım özelliğinden

$$b(k.\Delta t) = a \delta(t) * \text{sinc} + b \delta(t+c) * \text{sinc}$$

elde edilir. Birim impuls ile evrişimin özelliklerinden izleyen sonuç bulunur:

$$b(k.\Delta t) = a \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} + b \frac{\sin(2\pi f_N (t+c))}{2\pi f_N (t+c)}. \quad (8.2.38)$$

Süzgeç belirtkeni ise (8.2.35) veya (8.2.36) bağıntısının Fourier dönüşümünden

$$H(f) = a + b \cdot \exp(i2\pi cf) = a + b \cdot \cos(2\pi cf) + i b \cdot \sin(2\pi cf) \quad (8.2.39)$$

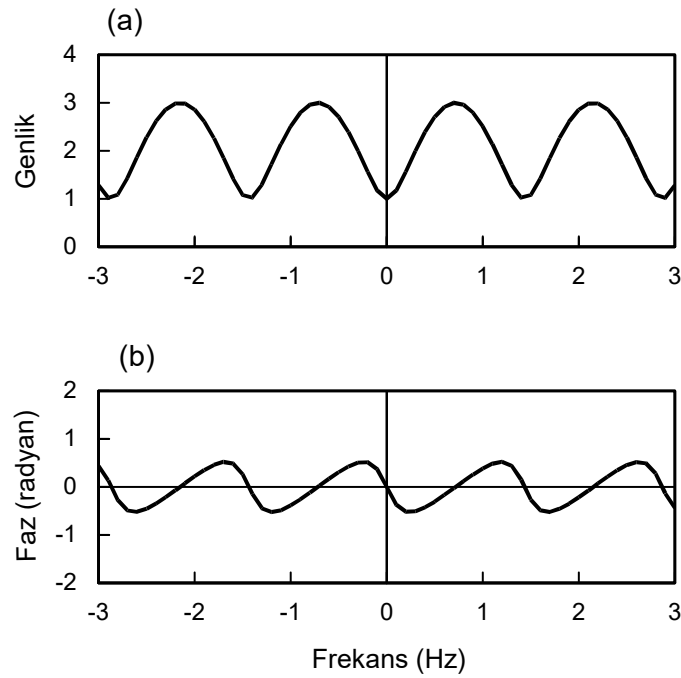
olarak verilir. Genlik ve faz izgeleri sırası ile

$$A(f) = \sqrt{a^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(2\pi cf) + b^2 \cos^2(2\pi cf) + b^2 \sin^2(2\pi cf)}$$

$$A(f) = \sqrt{a^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(2\pi cf) + b^2} \quad (8.2.40)$$

$$\phi(f) = \arctan\left(\frac{b \cdot \sin(2\pi cf)}{a + b \cdot \cos(2\pi cf)}\right) \quad (8.2.41)$$

şeklinde tanımlanabilir. Şekil 8.2.5'de, genlik ve faz izgeleri verilmiştir. Genlik ve fazın dönemsel olduğu görülmektedir. Çıkış verisi, giriş verisi ile onun c kadar kaymışının toplamına eşit olduğundan, bu doğal bir davranıştır.



Şekil 8.2.5. Genlik (a) ve faz (b) belirtkenleri ($a=2$, $b=-1$).

8.2.6. Girişin, Çıkış ve Çıkışın Ötelenmişinin Toplamına Eşit Olduğu Süzgeçler

Bu süzgecin giriş ve çıkışı arasındaki ilişki izleyen bağıntı ile verilebilir:

$$g(t) = a \cdot f(t) + b \cdot f(t + c). \quad (8.2.42)$$

Bu süzgeç, bir önceki örneğin giriş ve çıkış verisinin yer değiştirmişine eşittir. Bu nedenle, süzgeç belirtkeni, genlik ve faz doğrudan yazılabilir:

$$H(f) = \frac{1}{a + b \cdot \exp(i2\pi cf)}, \quad (8.2.43)$$

$$A(f) = 1 / \sqrt{a^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(2\pi cf) + b^2} \quad (8.2.44)$$

$$\phi(f) = -\arctan\left(\frac{b \cdot \sin(2\pi cf)}{a + b \cdot \cos(2\pi cf)}\right). \quad (8.2.45)$$

Diziye açabilmek için (8.2.43) bağıntısı izleyen eşdeğer biçimde de yazılabilir:

$$H(f) = \frac{1}{a} \frac{1}{1 + (b/a) \exp(i2\pi cf)}. \quad (8.2.46)$$

Abromowitz ve Stegun(1964) tarafından verilen seri bağıntısının, karmaşık sayılar ile yazılması ile

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + \dots \quad 0 < |z| < 1. \quad (8.2.47)$$

dizisi elde edilir. Burada, z karmaşık bir değişken olup, izleyen

$$z = r \exp(i\theta), \quad (8.2.48)$$

$$z^n = r^n \exp(in\theta) \quad (8.2.49)$$

özelliklerini gösterir. (8.2.46) bağıntısı ile (8.2.47) bağıntısının karşılaştırılması sonucunda

$$r = b/a,$$

$$\theta = 2\pi cf$$

yazılabilir. (8.2.47) bağıntısı, z karmaşık sayısının genliğinin birden küçük olduğu durumlar için geçerlidir. $r=b/a$ birden küçük olur ise (8.2.46) ile verilen süzgeç belirtkeni bağıntısı, izleyen denkleme dönüşür:

$$H(f) = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (b/a)^n \exp(i2\pi ncf). \quad (8.2.50)$$

Süzgeç fonksiyonu, süzgeç belirtkeninin ters Fourier dönüşümü olduğundan,

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (b/a)^n \exp(i2\pi ncf) \right] \exp(i2\pi ft) df$$

ile verilebilir. İntegral ile toplamın sırası değiştirilerek,

$$h(t) = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (b/a)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i2\pi f(t + n c)] df$$

yazılabilir. Fourier dönüşümünün kayma özelliği (4.1.6) bağıntısından izleyen sonuç bulunabilir:

$$h(t) = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (b/a)^n \delta(t + n c) \quad (8.2.51)$$

Süzgeç katsayıları için *sinc* ile evrişimden

$$b(k.\Delta t) = h(t) * \text{sinc } c = \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} * \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (b/a)^n \delta(t + n c) \quad (8.2.52)$$

yazılabilir ve kaymış birim impuls ile evrişimi ifade eden

$$f(t) * \delta(t + t_0) = f(t + t_0)$$

bağıntısı kullanılarak,

$$b(k.\Delta t) = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (b/a)^n \frac{\sin[2\pi f_N(t + nc)]}{2\pi f_N(t + nc)} \quad (8.2.53)$$

elde edilir. $\Delta t = 1 / 2f_N$ olduğundan, bu denklemin düzenlenmesi ile

$$b(k.\Delta t) = \frac{\Delta t}{a\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (b/a)^n \frac{\sin[2\pi f_N(t + nc)]}{(t + nc)} \quad (8.2.54)$$

yazılabilir. Bu dizinin yakınsaması (b/a) oranının birden küçük olması ile olasıdır. Bu değer ne kadar küçük ise dizi de o oranda çabuk yakınsayacaktır. Aksi takdirde kurulacak süzgeç durağan olamaz.

8.3. sinsh YANIT

Uzaklık veya frekans bölgesinde bir fonksiyonun kesilmesi diğer bölgede salınımlara yol açar. Sayısal verinin Fourier dönüşümündeki yinelenmeleri yok etmek için için gerçekleştirilen kesme işlemi, dikdörtgen fonksiyonu ile yapıldığında, zaman bölgesinde kesilen fonksiyonun ters Fourier dönüşümü ile *sinc* fonksiyonunun evriştirilmesi gerekir. *sinc* salınımlı bir fonksiyon olduğundan, *sinc* ile evrişim de salınımlara yol açar. Bu salınımları en aza indirmek için Nyquist frekansında keskin bir süreksizlik yaratan dikdörtgen fonksiyon yerine, Nyquist frekansı civarında Δt yüksekliğinden, yumuşak bir inişle sifıra yaklaşan başka bir fonksiyon kullanılabilir. Şekil 8.3.1'de, Johansen ve Sorensen (1979) tarafından önerilen bu tür bir pencerenin iki adet tanjant hiperbolik fonksiyonundan elde edilmesi gösterilmiştir. Şekil 8.3.1a ve 8.3.1b'de verilen fonksiyonların bağıntısı, sırası ile izleyen şekildedir:

$$P_1(f + f_N) = \frac{\Delta t}{2} \tanh\left[\frac{\pi\Delta t}{a}(f + f_N)\right], \quad (8.3.1)$$

$$-P_2(f + f_N) = -\frac{\Delta t}{2} \tanh\left[\frac{\pi\Delta t}{a}(f - f_N)\right]. \quad (8.3.2)$$

Bunların toplamı ile Şekil 8.3.1c'de gösterilen fonksiyon elde edilir:

$$P(f) = \frac{\Delta t}{2} \left[\tanh\left[\frac{\pi\Delta t}{a}(f + f_N)\right] - \tanh\left[\frac{\pi\Delta t}{a}(f - f_N)\right] \right] . \quad (8.3.3)$$

Bu fonksiyon, **tanjant hiperbolik penceresi** olarak adlandırılacak ve simgesel olarak $P(f)$ şeklinde gösterilecektir. (8.3.3) bağıntısında, a küçük bir sabit olup, pencerenin Nyquist frekansı civarındaki eğimini denetler. Şekil 8.3.2'de, a katsayısının değişimi ile pencerenin kanatlarındaki eğimin değişimi görülmektedir. a sıfıra yaklaştığında, $\tanh(\infty) = 1$ ve $P(f)$ penceresi dikdörtgen fonksiyona eşit olur. Böylece, dikdörtgen fonksiyonunun \tanh penceresinin özel bir hali olduğu görülür. Ancak, $P(f)$ fonksiyonu, eksi sonsuzdan artı sonsuza kadar tanımlıdır ve süreksizliği yoktur.

Zaman bölgesinde süzgeç katsayılarını bulmak için, süzgeç fonksiyonu tanjant hiperbolik pencerenin ters Fourier dönüşümü ile evriştirilmelidir. Tanjant hiperbolik pencerenin ters Fourier dönüşümü izleyen dönüşüm çiftinden bulunabilir:

$$i / \sinh(\pi t) \leftrightarrow \tanh(\pi f). \quad (8.3.4)$$

Bu bağıntı, Fourier dönüşümünün ölçekleme özelliğinin kullanılması ve her iki yanı $\Delta t / 2$ sabiti ile çarpılması ile izleyen şekilde yazılabilir:

$$\frac{\Delta t}{2} \frac{i a}{\Delta t \sinh(\pi a t / \Delta t)} \leftrightarrow \frac{\Delta t}{2} \tanh\left[\frac{\pi \Delta t}{a} f\right].$$

Δt yerine $1 / 2f_N$ yazılarak,

$$\frac{i a}{2 \sinh(2\pi a f_N t)} \leftrightarrow \frac{\Delta t}{2} \tanh\left[\frac{\pi \Delta t}{a} f\right]$$

elde edilir ve Fourier dönüşümünün kayma özelliğinden,

$$\frac{i a \exp(-i2\pi f_N t)}{2 \sinh(2\pi a f_N t)} \leftrightarrow \frac{\Delta t}{2} \tanh\left[\frac{\pi \Delta t}{a} (f + f_N)\right] \quad (8.3.5)$$

bulunabilir. Benzer olarak, (8.3.2) bağıntısının da ters Fourier dönüşümü türetilebilir:

$$-\frac{i a \exp(i2\pi f_N t)}{2 \sinh(2\pi a f_N t)} \leftrightarrow -\frac{\Delta t}{2} \tanh\left[\frac{\pi \Delta t}{a} (f - f_N)\right]. \quad (8.3.6)$$

(8.3.5) ve (8.3.6) denklemlerinin taraf tarafa toplanması, sol yanın alt ve üstünün $i = \sqrt{-1}$ ile çarpılarak gerekli yalınlaştırmaların yapılması ile

$$\frac{a}{\sinh(2\pi a f_N t)} \frac{\exp(i2\pi f_N t) - \exp(-2\pi f_N t)}{2i} \leftrightarrow P(f) \quad (8.3.7)$$

bağıntısı elde edilir. Sağ yan, tanjant hiperbolik penceresine eşit olduğundan, $P(f)$ olarak gösterilmiştir. Euler bağıntısının kullanılması tanjant hiperbolik pencerenin zaman bölgesindeki karşılığını verir:

$$a \frac{\sin(2\pi f_N t)}{\sinh(2\pi a f_N t)} \leftrightarrow P(f). \quad (8.3.8)$$

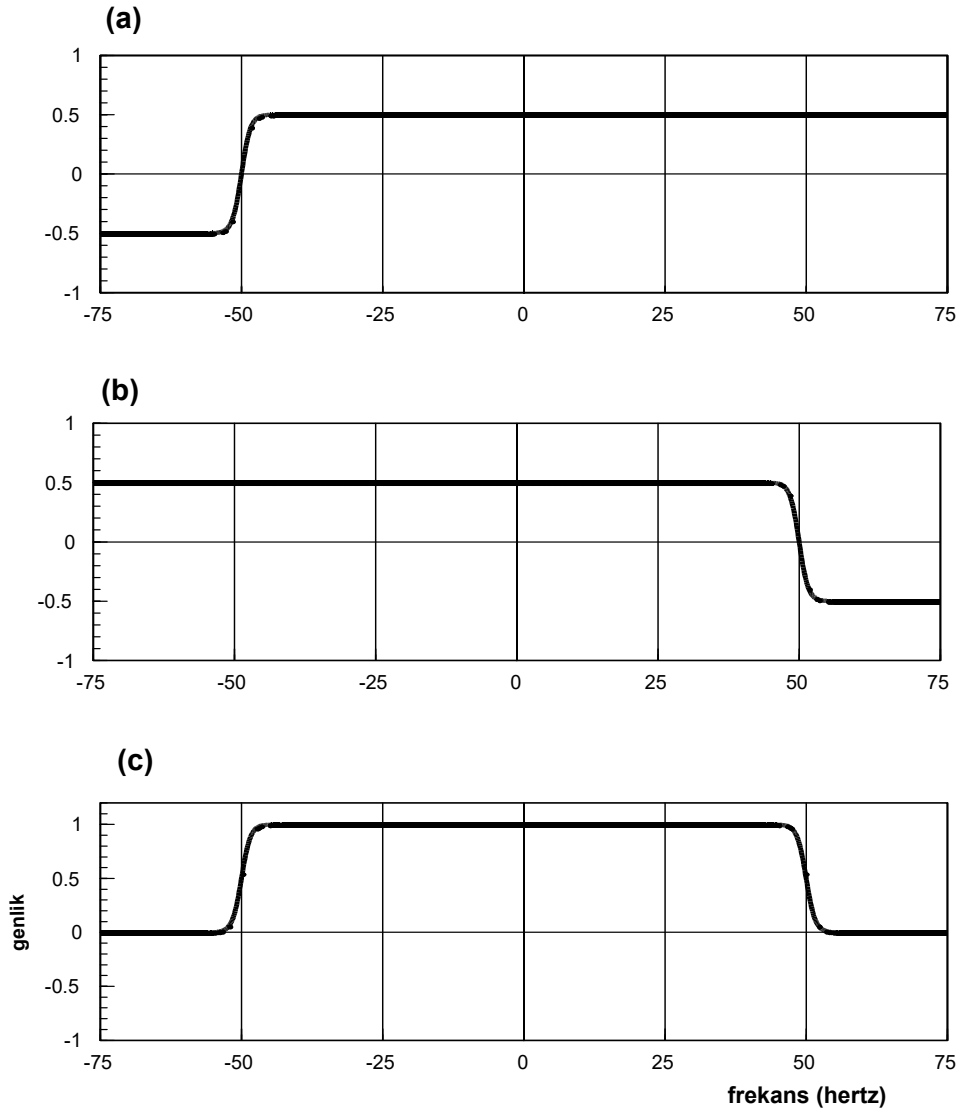
Bu fonksiyon, **sinsh fonksiyonu** olarak adlandırılır:

$$\text{sinsh} = a \cdot \frac{\sin(2\pi f_N t)}{\sinh(2\pi a f_N t)}. \quad (8.3.9)$$

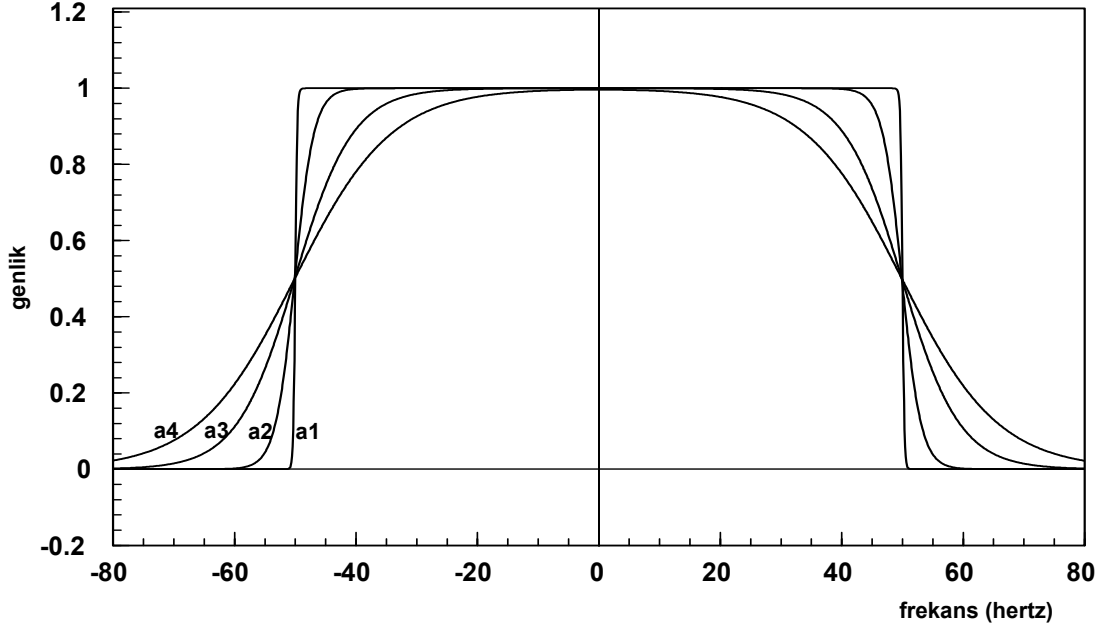
Süzgeç katsayıları, süzgeç fonksiyonu ile sinsh fonksiyonunun evrişiminden elde edilir. Bu yol ile hesaplanan süzgeç katsayılarına, **sinsh yanıt** adı verilir. sinc yanıt bağıntısına benzer olarak, sinsh yanıt bağıntısı izleyen şekilde verilir:

$$b(n \cdot \Delta t) = h(t) * \text{sinsh} .$$

(8.3.10)



Şekil 8.3.1. Frekans bölgesinde, iki adet kaymış tanjant hiperbolik fonksiyonundan, bir pencerenin elde edilmesi. $P_1(f + f_N)$ (a) ve $-P_2(f - f_N)$ (b) fonksiyonlarının toplamı istenen pencerenin üretilmesini sağlar. Nyquist frekansı 50 hertz ve $\Delta t = 0.01$ saniyedir. Gösterim amacı ile pencere örnekleme aralığı ile çarpılmamıştır.



Şekil 8.3.2. Frekans bölgesinde çeşitli a katsayıları için tanjant hiperbolik penceresinin eğiminin değişimi. $a_1=0.01$, $a_2=0.05$, $a_3=0.3$ ve $a_4=0.5$. Nyquist frekansı 50 hertz ve $\Delta t=0.01$ saniyedir. Gösterim amacı ile pencere örnekleme aralığı ile çarpılmamıştır.

Şekil 8.3.3'de, a katsayısının değişimi ile sinsh yanıtın salınımlarının değişimi görülmektedir. Katsayı büyüdükçe sinsh fonksiyonu zamanın büyük değerleri için daha çabuk sönmektedir. Eğer a katsayısı çok küçük seçilir ise, $\text{sinh}(2\pi a f_N t) \cong 2\pi a f_N t$ olacağından sinsh ve sinc fonksiyonları birbirine eşit olur ve sinc fonksiyonu, sinsh fonksiyonunun özel bir hali olarak düşünülebilir. a katsayısının ayarlanması ile zamanın büyük değerleri için sinsh fonksiyonunun daha çabuk sönmesinden yararlanılarak, daha kısa süreli süzgeçler elde edilebilir.

Şekil 8.3.4'de frekans bölgesindeki dikdörtgen veya $P(f)$ fonksiyonu ile kesme arasındaki farklar görüntülenmiştir. Bu amaç için (8.2.19) bağıntısı ile verilen çıkışın, giriş ve girişin türevinin toplamına eşit olduğu süzgeç örnek olarak verilmiştir. a ve b katsayıları birim olduğunda süzgeç belirtkeni için

$$H(f) = 1 + i2\pi f$$

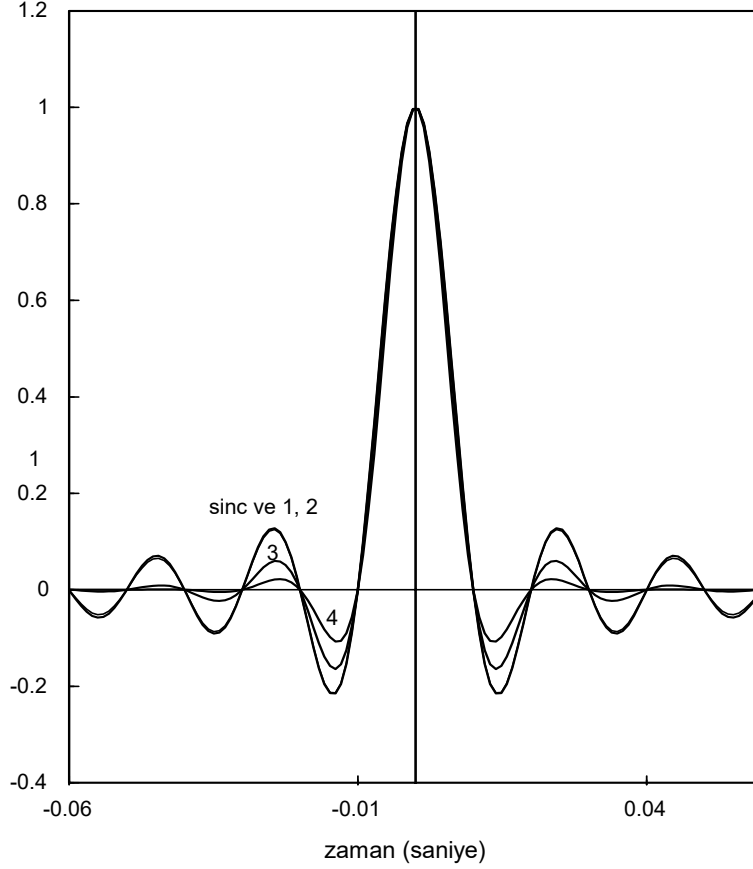
elde edilir. Genlik ise (8.2.25) bağıntısından

$$A(f) = \sqrt{1 + 4\pi^2 f^2}$$

olarak yazılabilir ve Şekil 8.3.4a ve Şekil 8.3.4e'de gösterilmiştir. Hem dikdörtgen hem de $P(f)$ penceresinin fazları sıfır olduğundan her ikisi de $H(f)$ fonksiyonunun fazını Nyquist frekansında keser ve kesim işlemi arasında fark yoktur. Bu yüzden süzgecin fazı Şekil 8.3.4'de gösterilmemiştir.

Şekil 8.3.4b'de sol yanda dikdörtgen ve sağ yanda $P(f)$ penceresi gösterilmiştir. $\Delta t = 0.1$ ve $f_N = 5$ seçilmiştir. Şekil 8.3.4c de ise, sol yanda genlik belirtkeninin dikdörtgen fonksiyonu ile çarpımı çizilmiştir. Dikdörtgen fonksiyon ile elde edilen süzgeç izgesi,

$$A(f) = \sqrt{1 + 4\pi^2 f^2} \quad f \leq f_N \quad \text{için} \quad (8.3.11)$$



Şekli 8.3.3. *sinc* fonksiyonunun davranışı. Aynı a katsayıları kullanıldığından Şekil 8.3.2'de verilen frekans bölgesi fonksiyonlarına karşılık gelmektedirler.

ve $P(f)$ penceresi ile elde edilen süzgeç izgesi,

$$A_t(f) = \sqrt{1 + 4\pi^2 f^2} \frac{\Delta t}{2} \left\{ \tanh \left[\frac{\pi \Delta t}{a} (f + f_N) \right] - \tanh \left[\frac{\pi \Delta t}{a} (f - f_N) \right] \right\} \quad (8.3.12)$$

olarak verilebilir. Böylece süzgeç izgesi (8.3.11) bağıntısında $(-f_N, f_N)$ aralığında sürekli iken, (8.3.12) bağıntısında frekansın her değeri için sürekli dir. (8.2.23) bağıntısından, süzgeç fonksiyonunun birim impuls ile birim impuls fonksiyonunun türevinin toplamına eşit olduğu görülebilir:

$$h(t) = \delta(t) + \partial \delta(t) / \partial t .$$

Süzgeç katsayıları, süzgeç fonksiyonu ile *sinc* fonksiyonunun evrişiminden,

$$b(k.\Delta t) = [\delta(t) + \partial \delta(t) / \partial t] * \text{sinc} = \text{sinc} + \partial \text{sinc} / \partial t \quad (8.3.13)$$

bulunarak, (8.2.27) bağıntısı ile verilmişti. $a=1$ ve $b=1$ için

$$b(k.\Delta t) = \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} + \frac{\cos(2\pi f_N t)}{t} - \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t^2}$$

$$b(0)=1$$

yazılabilir ve sinc yanıt Şekil 8.3.4d'de görüntülenmiştir. sinsh yanıtın hesaplanması için süzgeç fonksiyonu ile sinsh fonksiyonunun evrişimi bulunmalıdır. (8.3.13) bağıntısında sinc yerine sinsh fonksiyonu yazılır ise izleyenbağıntı elde edilir:

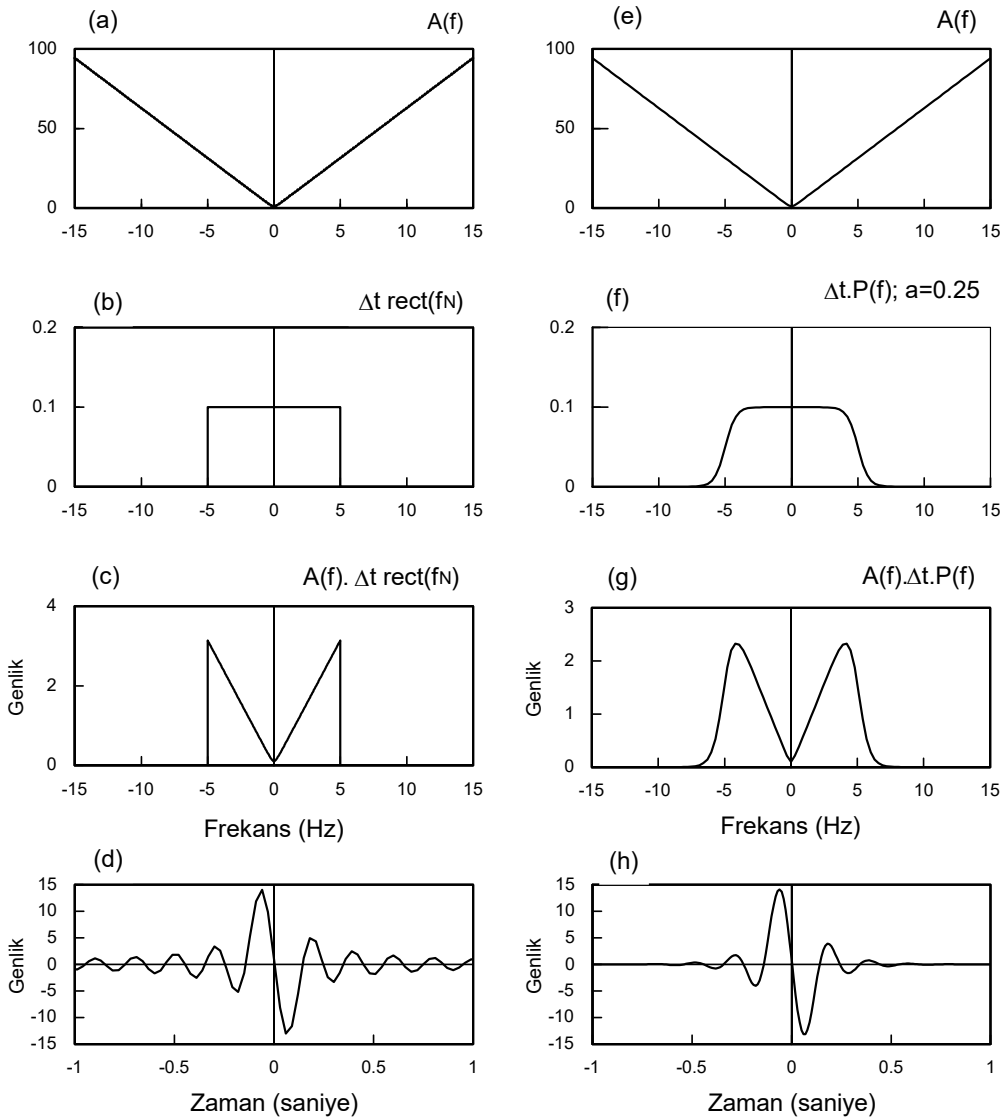
$$b(k.\Delta t) = \left[\delta(t) + \frac{\partial \delta(t)}{\partial t} \right] * \text{sinsh} = \text{sinsh} + \frac{\partial \text{sinsh}}{\partial t} = a \frac{\sin(2\pi f_N t)}{\sinh(2\pi a f_N t)} + \frac{\partial}{\partial t} \left[a \frac{\sin(2\pi f_N t)}{\sinh(2\pi a f_N t)} \right].$$

Türev işleminin gerçekleştirilmesi ile

$$b(k.\Delta t) = a \frac{\sin(2\pi f_N t)}{\sinh(2\pi a f_N t)} + \frac{a 2\pi f_N}{\sinh(2\pi a f_N t)} \left[\cos(2\pi f_N t) - a \frac{\sin(2\pi f_N t)}{\tanh(2\pi a f_N t)} \right] \quad (8.3.14)$$

$$b(0)=1$$

sonucu bulunabilir. sinsh yanıt Şekil 8.3.4h'de görüntülenmiş olup, frekans bölgesinde daha yumuşak bir kesim ile zaman bölgesindeki dalgalanmaların azaldığı görülmektedir.



Şekil 8.3.4. Dikdörtgen (sol panel) ve tanjant hiperbolik (sağ panel) pencereler ile süzgeç belirtkeninin Nyquist frekansı civarında kesilmesi.