

BÖLÜM 9

Frekans Seçici İdeal Süzgeçler

Birçok mühendislik uygulamasında önceden belirlenen bir veya birkaç frekans aralığında giriş verisinin içeriğinin korunması ve bu frekans aralıkları dışında ise içeriğin değiştirilmesi amaçlanır. Böylece, giriş verisinde önceden seçilmiş frekans aralıklarındaki olayların genlikleri korunur iken diğer frekanslardaki olaylar bastırılır veya yok edilir. Bu tür süzgeçler, **frekans seçici süzgeçler** olarak adlandırılır.

9.1. İDEAL SÜZGEÇLERİN TANIMI

İdeal süzgeçler, frekans seçici süzgeçlerin sadece bir türünü oluşturmakla birlikte diğer frekans seçici süzgeçler ideal süzgeç kuramından hareketle türetilir. İdeal süzgeçlerde, seçilen frekans aralığındaki olayların aynı kalması istenir ise bu frekanslardaki genlikler birim ile diğer frekanslardaki genlikler ise sıfır ile çarpılır. Bunun tersi olarak seçilen frekans aralığındaki olaylar yok edilmek istenir ise bu frekanslardaki olayların genlikleri sıfır, diğer frekanslardaki genlikler birim ile çarpılır. Genlikler frekans bölgesinde bir veya sıfır ile çarpıldığından, süzgeç belirtkenleri bir veya birkaç dikdörtgen pencerenin toplamı ile tanımlanabilir.

Bölüm 8'de ayrıntıları ile açıklanan süzgeç kuramı izleyen şekilde özetlenebilir. $g_s(t)$ sayısal verisinin *sinc* fonksiyonu ile evrişiminden, $g(t)$ sürekli verisinin kurulabileceği daha önce gösterilmişti. Bu işlemin frekans bölgesindeki karşılığı, genişliği Nyquist frekansının iki katı ve yüksekliği Δt örnekleme aralığına eşit olan bir dikdörtgen fonksiyon ile $G_s(f)$ verisinin çarpılmasıdır. Her iki bölgedeki işlemler,

$$g(t) = g_s(t) * \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} \leftrightarrow G(f) = \Delta t \cdot \text{rect}(f_N) \cdot G_s(f) \quad (9.1.1)$$

dönüşüm çifti ile gösterilebilir. Zaman ve frekans bölgesinde, giriş ve çıkış fonksiyonları arasındaki bağıntılar,

$$f(t) = g(t) * h(t) \leftrightarrow F(f) = G(f) \cdot H(f) \quad (9.1.2)$$

olarak verildiğinden, (9.1.1) sonucunun bu denklemde yerine yazılması ile

$$f(t) = g_s(t) * \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} * h(t) \leftrightarrow F(f) = G_s(f) \cdot \Delta t \cdot \text{rect}(f_N) \cdot H(f) \quad (9.1.3)$$

elde edilir. Zaman ve frekans bölgelerinde sırası ile

$$b(n \cdot \Delta t) = \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} * h(t) \quad (9.1.4)$$

$$B(f) = \Delta t \cdot \text{rect}(f_N) \cdot H(f) \quad (9.1.5)$$

tanımları ile izleyen sayısal süzgeçleme bağıntıları yazılabilir:

$$f(t) = g_s(t) * b(n \cdot \Delta t), \quad (9.1.6)$$

$$F(f) = G_s(f) B(f). \quad (9.1.7)$$

Frekans seçici süzgeçleri tanıtmak ve örnek vermek amacı ile üç sinüzoidalın toplamından oluşan aşağıdaki zaman serisi giriş verisi olarak kullanılacaktır. Giriş verisinin frekans içeriğinin değişmesi çeşitli örnekler ile gösterilecektir. Örnek giriş verisi, frekansları sırası ile 0.5, 5 ve 20 Hz ve genlikleri ise 1.5, 1 ve 0.4 birim olan üç adet sinüzoidalın toplamından oluşmaktadır (Şekil 9.2.1a). Bu örnek, Bölüm 7'de kullanılan fonksiyonlar ile aynıdır (Şekil 7.6.1d):

$$g(t) = 1.5 \cos(\pi t) + \cos(10\pi t) + 0.4 \cos(40\pi t). \quad (9.1.8)$$

$g(t)$ zaman fonksiyonunun Fourier dönüşümü için

$$G(f) = 0.75 \delta(f + 0.5) + 0.75 \delta(f - 0.5) + 0.5 \delta(f + 5) + 0.5 \delta(f - 5) + 0.2 \delta(f + 20) + 0.2 \delta(f - 20) \quad (9.1.9)$$

yazılabilir (Şekil 9.2.1d).

9.2. ALÇAK-GEÇİŞLİ İDEAL SÜZGEÇ

Frekansları, sıfır frekansından belirli bir frekansa kadar olan olayları değiştirmeyen, diğerlerini ise yok eden süzgeçler **alçak-geçişli süzgeç** olarak adlandırılır. Bir ideal alçak-geçişli süzgeç, **kesme frekansı** (f_L) adı verilen bir frekanstan daha büyük frekanslı hiç bir olayın zaman verisinde bulunmasına izin vermemelidir. Bu işlem sürekli fonksiyonlar için Şekil 9.2.1'de gösterilmiştir. Şekil 9.2.1a ve 9.2.1d'de, sırası ile $g(t)$ ve onun Fourier dönüşümü $G(f)$ verilmiştir. Süzgeçleme işlemi frekans bölgesinde gerçekleştirmek için $G(f)$ ile birim yüksekliğinde ve genişliği kesme frekansının iki katı olan bir dikdörtgen fonksiyonunun çarpılması gerekir. Şekil 9.2.1e'de dikdörtgen fonksiyonu ve Şekil 9.2.1f'de ise çarpım sonucu görülmektedir. Örneğin, kesme frekansı 2 Hz olarak alınır ise çarpım sonucunda da bu frekanstan daha büyük frekanslardaki olayların genliği sıfır olur ve onun ters Fourier dönüşümü olan zaman fonksiyonunda da bu frekanslardaki olaylar bulunmaz (Şekil 9.2.1c). Bu işlem zaman bölgesinde, giriş fonksiyonu ile süzgeç fonksiyonunun evrişimine karşılık gelir. Bu bilgiler ışığında, süzgeç belirtkeni

$$H_L(f) = \text{rect}(f_L) \quad (9.2.1)$$

olarak yazılabilir ve bu bağıntının ters Fourier dönüşümü süzgeç fonksiyonuna eşittir (Şekil 9.2.1b):

$$h_L(t) = \frac{\sin(2\pi f_L t)}{\pi t}. \quad (9.2.2)$$

Sürekli fonksiyonlar için alçak-geçişli süzgeçleme işlemi izleyen bağıntılar ile yürütülür:

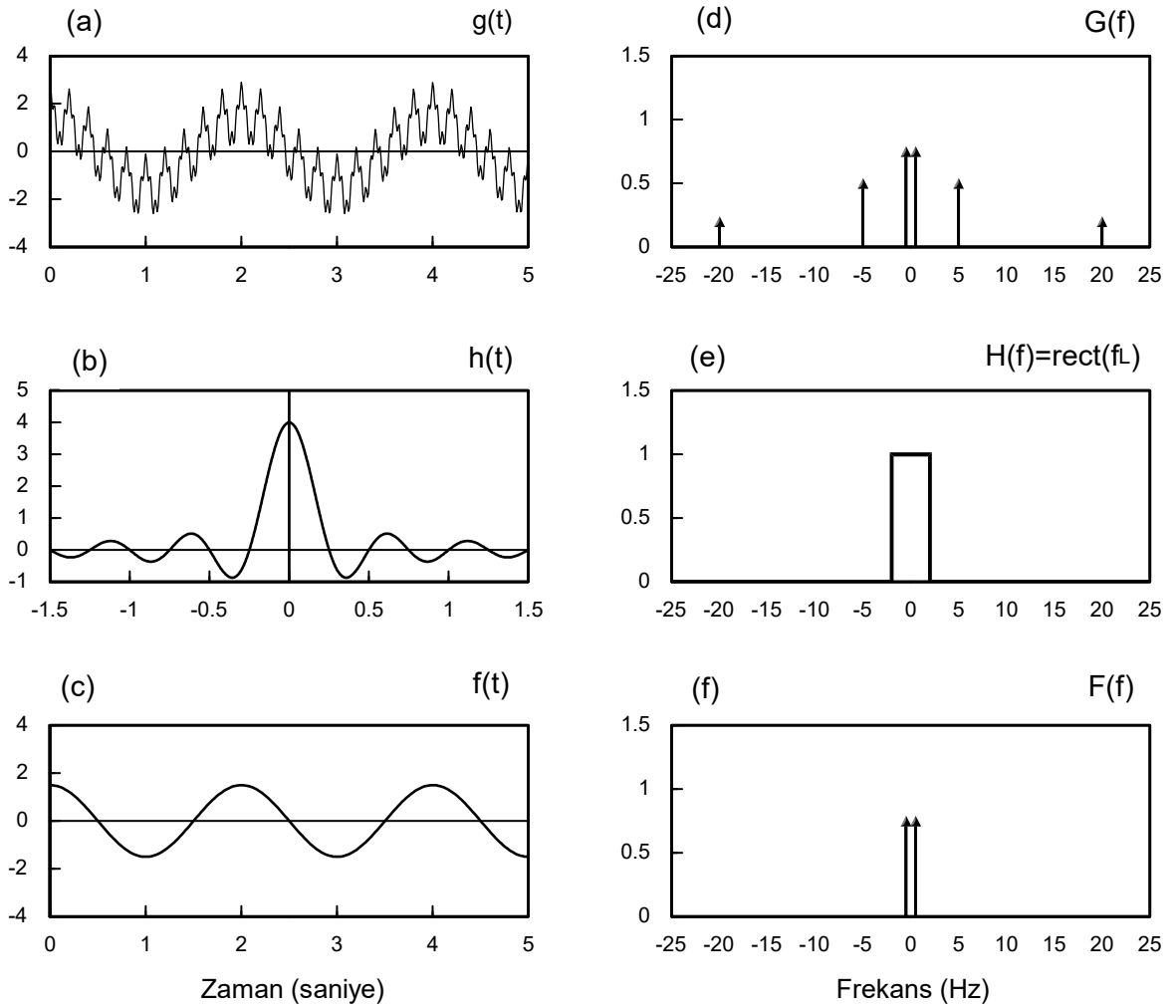
$$f(t) = g(t) * \sin(2\pi f_L t) / \pi t \leftrightarrow F(f) = G(f) \cdot \text{rect}(f_L) \quad (9.2.3)$$

Şekil 9.2.2'de ise işlemin sayısal veri ile gerçekleştirilmesi gösterilmiştir. Sayısal veride, Nyquist frekansının ötesindeki olaylar temsil edilemediğinden, kesme frekansının Nyquist frekansından küçük olması gerektiği açıktır. Şekil 9.2.2a'da, sayısal veri $g_s(t)$ ve Şekil 9.2.2f'de onun Fourier dönüşümü olan $G_s(f)$ fonksiyonu gösterilmiştir. Sayısal veri, (9.1.1) bağıntısı ile verilen üç sinüzoidalın toplamının, $\Delta t = 0.01$ saniye aralığında örneklenmesi ile elde edilmiştir. $G_s(f)$ verisinden, $G(f)$ fonksiyonuna bir yaklaşım sağlamak için Şekil 9.2.2g'de görüntülenen Nyquist frekansının iki katı genişliğindeki dikdörtgen fonksiyon ile $G_s(f)$ çarpılır. Genlikleri doğru elde etmek için dikdörtgenin yüksekliği Δt kadar olmalıdır. Bu işlemin zaman bölgesindeki karşılığı, Şekil 9.2.2b'de görülen sinc fonksiyonu ile evrişimdir. Böylece, zaman ve frekans bölgesinde

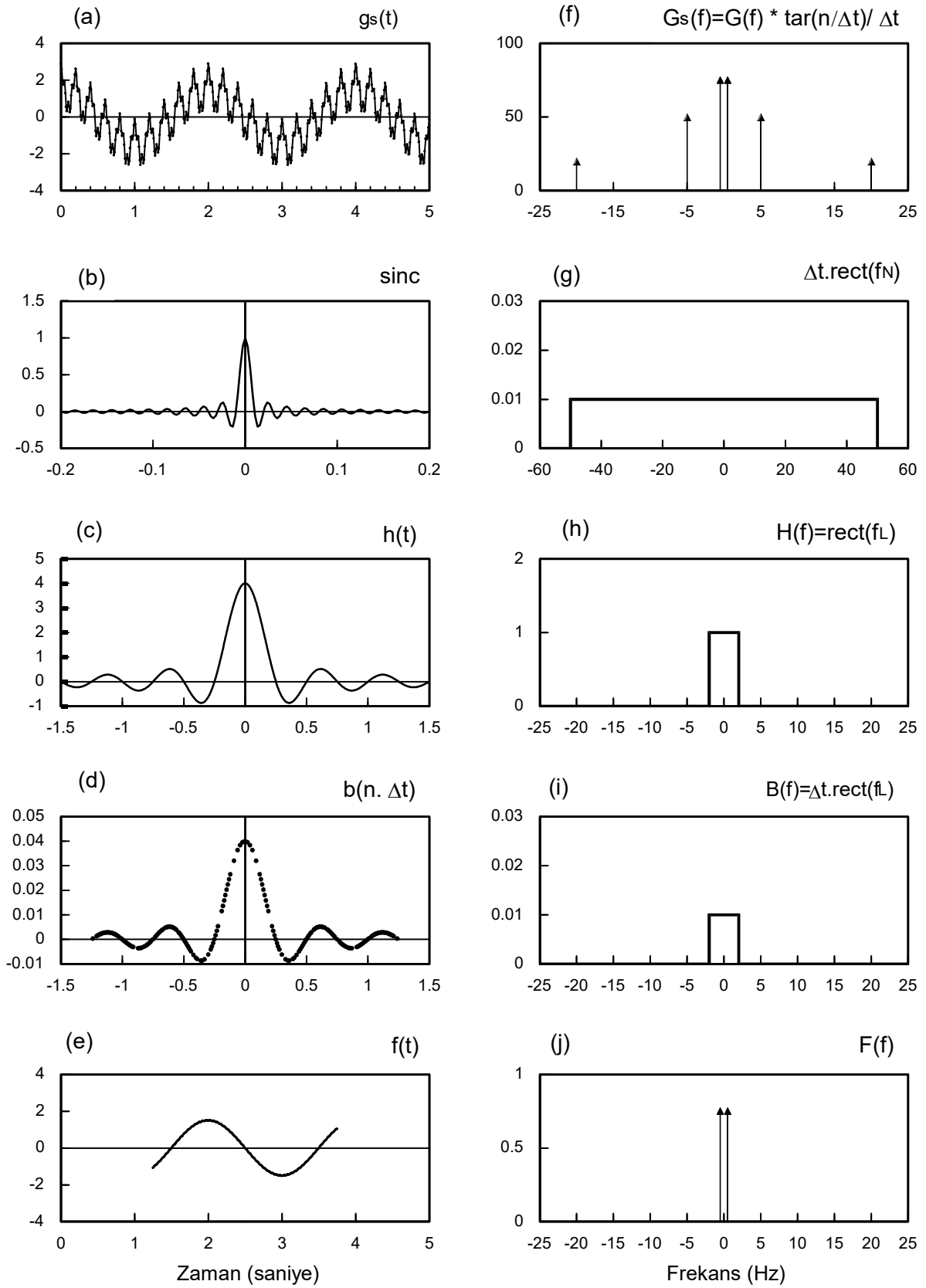
sürekli fonksiyonlar yeniden elde edilir. Ancak, işlemin sonucu şekil içerisinde gösterilmemiştir. Bunun nedeni, örnekleme kuramı ile süzgeçleme kuramının burada birleştirilerek verilecek olmasıdır. Birleştirme, örnekleme kuramının gereği olan $\Delta t \cdot \text{rect}(f_N)$ ile çarpım ve ardından süzgeçleme kuramının gereği olan $\text{rect}(f_L)$ ile çarpım sonucunun süzgeç izgesi olarak adlandırılması ile gerçekleştirilir. Şekil 9.2.2h'de alçak-geçişli süzgecin belirtkeni ve Şekil 9.2.2c'de onun ters Fourier dönüşümü olan süzgeç fonksiyonu verilmiştir. (9.1.7), (9.2.1) ve (9.2.2) bağıntılarından, izleyen sonuç yazılabilir:

$$f(t) = g_s(t) * \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} * \frac{\sin(2\pi f_L t)}{\pi t} \leftrightarrow F(f) = G_s(f) \Delta t \text{rect}(f_N) \cdot \text{rect}(f_L) . \quad (9.2.4)$$

(9.2.2) denklemleri ile tanımlanan alçak geçişli süzgeç fonksiyonunun bir sinc fonksiyonu olduğu görülmektedir. Örnekleme kuramında sayısal veriden, sürekli veriyi kestirmemizi sağlayan $\sin(2\pi f_N t) / (2\pi f_N t)$ fonksiyonu da kesme frekansı Nyquist frekansı olan bir alçak geçişli süzgeçtir.



Şekil 9.2.1. Sürekli fonksiyonlar için alçak-geçişli süzgeç düzenlenmesi ($f_L = 2$ Hz).



Şekil 9.2.2. Sayısal veri ile alçak-geçişli süzgeçleme işleminin gerçekleştirilmesi ($\Delta t = 0.01$, $f_N = 50$ Hz, $f_L = 2$ Hz, 251 katsayı).

Süzgeç izgesi, (9.1.5) bağıntısından, izleyen şekilde elde edilir:

$$B_L(f) = \Delta t \cdot \text{rect}(f_N) \cdot H(f) = \Delta t \cdot \text{rect}(f_N) \cdot \text{rect}(f_L). \quad (9.2.5)$$

Kesme frekansı, Nyquist frekansından küçük olduğundan,

$$B(f) = \Delta t \cdot \text{rect}(f_N) \cdot H(f) = \Delta t \cdot H(f) \quad (9.2.6a)$$

ve zaman bölgesindeki karşılığı için

$$b(n \cdot \Delta t) = \Delta t \frac{\sin(2\pi f_N t)}{\pi t} * h(t) = \Delta t \cdot h(t) \quad (9.2.6b)$$

yazılabilir. Buradan bir fonksiyonun Nyquist frekansından daha küçük frekansları içermesi koşulu ile *sinc* fonksiyonu ile evrişiminin yine kendisine eşit olduğu, yalnızca örnekleme aralığı kadar ölçeklendiği anlaşılabilir. (9.2.6) sonucunun alçak-geçişli süzgece uygulanması ile

$$B_L(f) = \Delta t \cdot \text{rect}(f_L) \quad (9.2.7)$$

ve süzgeç izgesinin ters Fourier dönüşümü ile süzgeç katsayılarını veren bağıntı türetilir:

$$b_L(n \cdot \Delta t) = \Delta t \frac{\sin(2\pi f_L t)}{\pi t} = \frac{\sin(2\pi f_L t)}{2\pi f_N t}. \quad (9.2.8)$$

Sıfır zamanına ait katsayının değerini bulabilmek için süzgeç katsayıları denklemi,

$$b_L(n \cdot \Delta t) = \frac{f_L}{f_N} \frac{\sin(2\pi f_L t)}{2\pi f_L t} \quad (9.2.9)$$

şeklinde yazılarak, sıfır zaman değeri için *sinc* fonksiyonunun limitinden,

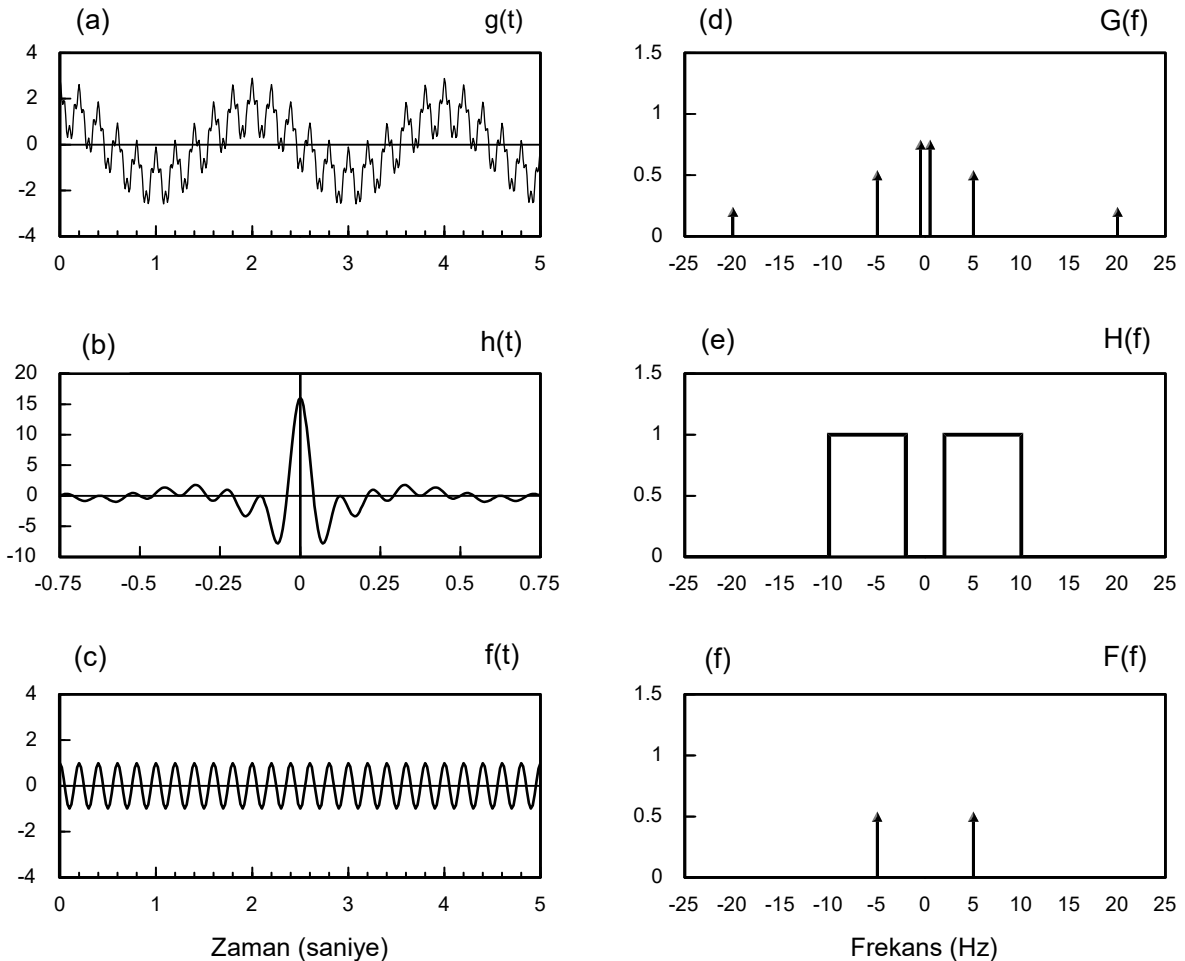
$$b_L(0) = f_L / f_N \quad (9.2.10)$$

eşitliği elde edilebilir. Şekil 9.2.2'i'de süzgeç izgesi ve Şekil 9.2.2'd'de onun ters Fourier dönüşümü olan süzgeç katsayıları görülmektedir. Alçak-geçişli süzgecin katsayılar toplamı bir olmalıdır yani süzgeç kendisine giriş olarak verilen bir sabit sayı dizisini değiştirmeden çıkışa çevirmelidir. Çünkü sıfır frekanslı olaylar, alçak-geçişli süzgeç tarafından değiştirilmeden geçirilmelidir. Ayrıca, süzgeç belirtkeni ve izgesi gerçel ve çift olduğundan faz izgesi de sıfırdır. Bu nedenle süzgeç katsayıları da, çift bir fonksiyon olmalı ve evrişim sonucunda faz kayması oluşturmamalıdır. Bu koşulu sağlamak için süzgeç katsayıları merkeze göre bakışimli seçilir. Katsayıların merkezdeki katsayıya göre bakışimli olabilmesi için katsayı sayısının tek sayı olması gerekir. Verilen örnek için kesme frekansı 2 Hz ve Nyquist frekansı 50 Hz olduğundan, alçak-geçişli süzgecin merkezdeki en büyük değeri (9.2.10) bağıntısından 0.04 olarak hesaplanmıştır. Daha sonra, -1.25 saniye ile 1.25 saniye arasında, 0.01 saniye örnekleme aralığı ile merkezin solunda ve sağında 125 şer adet ve merkezdeki katsayıyı da içermek üzere toplam 251 katsayılı bir alçak-geçişli süzgeç düzenlenmiştir. Bu süzgece, Şekil 9.2.2a'da verilen sayısal veri ile evrişim uygulanır ise Şekil 9.2.2e'de verilen çıkış elde edilir. Şekilden de görüldüğü gibi frekansı 2 Hz değerinden daha büyük olan olaylar sayısal veriden süzölmüştür. Toplam 501 değerden oluşan giriş verisinde, soldan ve sağdan 125 veri yitirilerek, 1.25 saniyede başlayan ve 3.75 saniyede biten 251 değerden oluşan çıkış verisi elde edilmiştir.

9.3. BANT-GEÇİŞLİ İDEAL SÜZGEÇ

Verilen iki frekans arasındaki olayları değiştirmeden geçiren süzgeçler, **bant-geçişli süzgeç** olarak adlandırılır. Küçük kesme frekansı (f_L) ve büyük kesme frekansı (f_H) simgeleri ile gösterilir. Bir ideal bant-geçişli süzgeç, f_L frekansından küçük ve f_H frekansından büyük frekanslı olayların zaman verisinde bulunmasına izin vermemelidir. Bu işlem sürekli fonksiyonlar için Şekil 9.3.1'de gösterilmiştir. Şekil 9.3.1a ve 9.3.1d'de, sırası ile $g(t)$ ve onun Fourier dönüşümü $G(f)$ verilmiştir. Süzgeçleme işlemini frekans bölgesinde gerçekleştirmek için $G(f)$ ile yüksekliği f_L ve f_H arasında birim ve genişliği $f_H - f_L$ kadar olan bir dikdörtgen fonksiyon çarpılmalıdır. Aynı çarpma işlemi negatif frekanslar için de yinelenmelidir. Şekil 9.3.1e'de iki adet dikdörtgen fonksiyon ve Şekil 9.3.1f'de ise çarpım sonucu görülmektedir. Örneğin, kesme frekansları 2 ve 10 Hz olarak alınır ise çarpım sonucunda da 2 Hz frekansından küçük ve 10 Hz frekansından büyük frekanslar izgede ve onun ters Fourier dönüşümü olan zaman fonksiyonunda da bulunmayacaktır (Şekil 9.3.1c). Süzgeçleme işlemi, zaman bölgesinde giriş fonksiyonu ile süzgeç fonksiyonunun evrişimine eşittir. Şekil 9.3.1e'de verilen bant-geçişli süzgeç belirtkeni, kesme frekansları f_L ve f_H olan iki adet alçak-geçişli süzgeçten elde edilebilir. Şekil 9.3.2a'da kesme frekansı f_H ve Şekil 9.3.2b'de ise kesme frekansı f_L olan iki adet alçak-geçişli süzgeç görülmektedir. Bu süzgeçlerin farkı alınır ise Şekil 9.3.2c'de verilen bant-geçişli süzgeç elde edilir ve Şekil 9.3.1e'de görüntülenen süzgece eşittir. Yukarıdaki bilgiler ışığında, bant-geçişli süzgeç belirtkeni iki adet dikdörtgen fonksiyonunun farkı olarak yazılabilir:

$$H_B(f) = \text{rect}(f_H) - \text{rect}(f_L). \quad (9.3.1)$$



Şekil 9.3.1. Sürekli fonksiyonlar için bant-geçişli süzgeç düzenlenmesi ($f_L = 2$ Hz, $f_H = 10$ Hz).

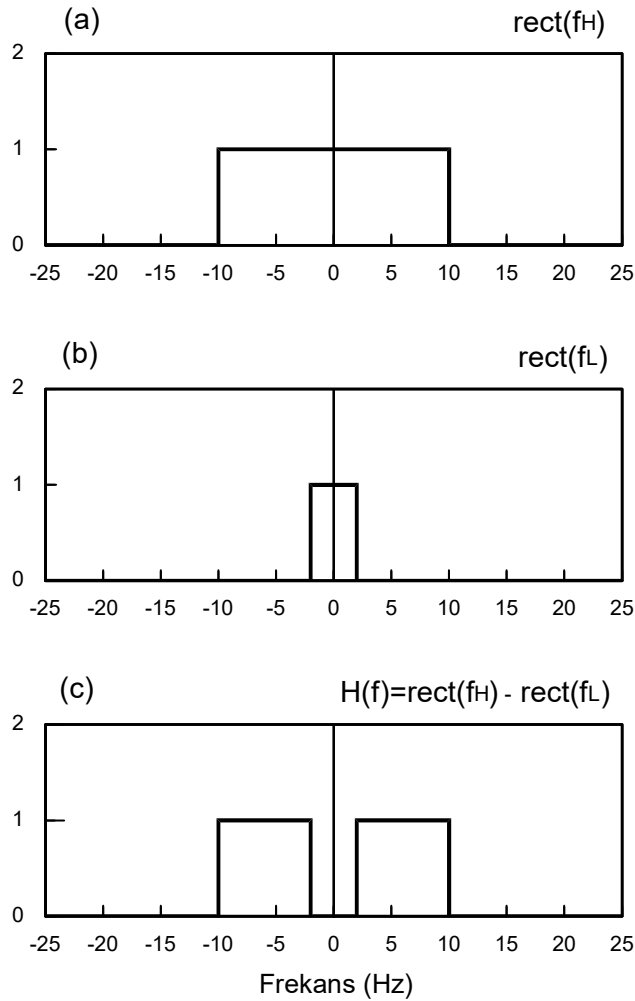
(9.3.1) bağıntısının ters Fourier dönüşümü ise süzgeç fonksiyonuna eşittir (Şekil 9.3.1b):

$$h_B(t) = \frac{\sin(2\pi f_H t)}{\pi t} - \frac{\sin(2\pi f_L t)}{\pi t}. \quad (9.3.2)$$

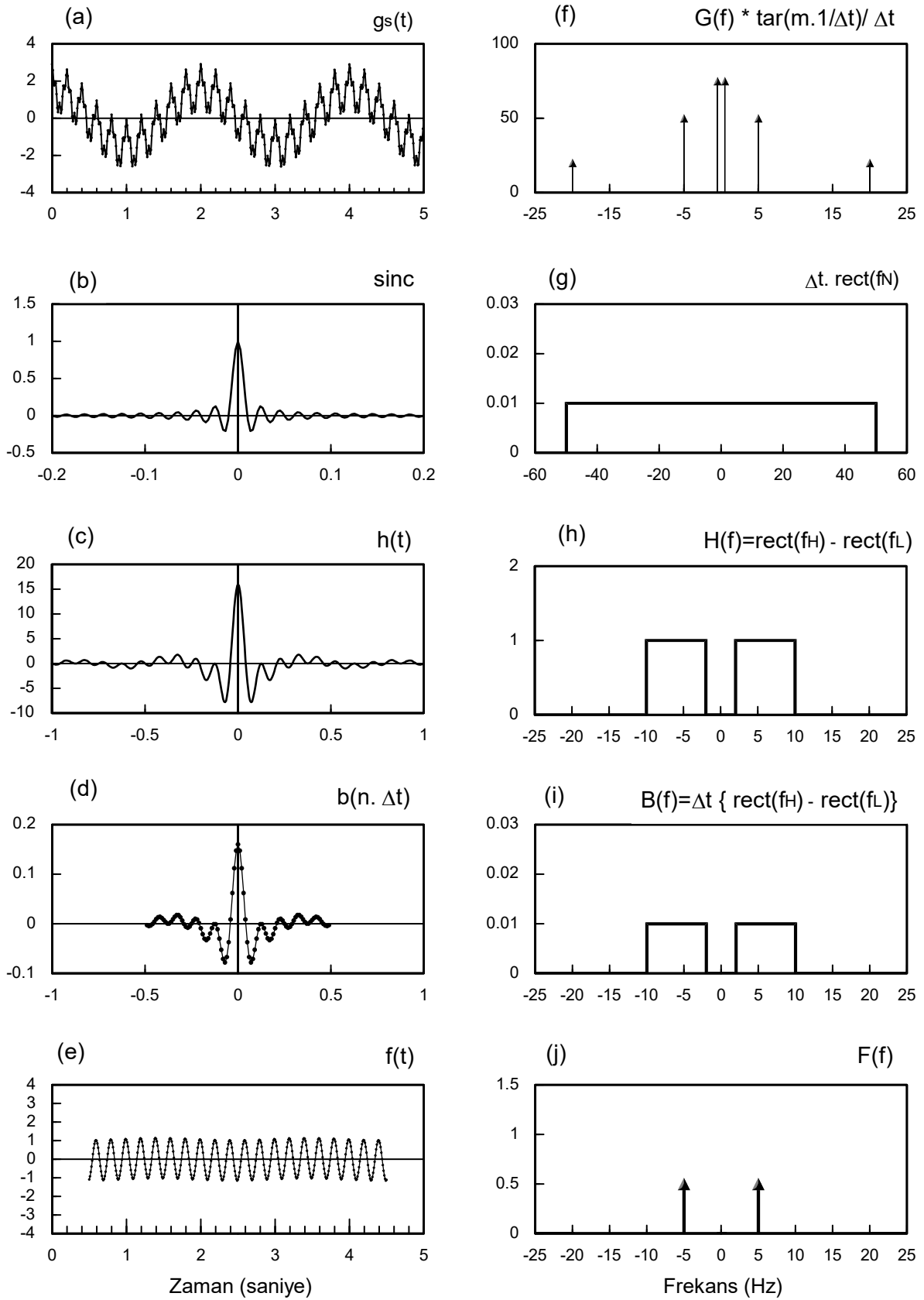
Böylece, sürekli fonksiyonlar için bant-geçişli süzgeçleme işlemi

$$f(t) = g(t) * \left[\frac{\sin(2\pi f_H t)}{\pi t} - \frac{\sin(2\pi f_L t)}{\pi t} \right] \leftrightarrow F(f) = G(f) \cdot [\text{rect}(f_H) - \text{rect}(f_L)] \quad (9.3.3)$$

bağıntıları ile verilebilir. Süzgeçleme işleminin sayısal veri ile gerçekleştirilmesi Şekil 9.3.3'de açıklanmaktadır. Şekil 9.3.3a'da, sayısal veri ve Şekil 9.3.3f'de onun Fourier dönüşümü olan $G_s(f)$ fonksiyonu gösterilmiştir. Sayısal veri (9.1.8) bağıntısı ile verilen üç sinüzoidalın toplamının, $\Delta t = 0.01$ saniye aralığı ile örneklemeinden elde edilmiştir. $G_s(f)$ değerlerinden, $G(f)$ fonksiyonuna bir yaklaşım sağlamak için $G_s(f)$ ile Şekil 9.3.3g'de verilen Nyquist frekansının iki katı genişliğindeki dikdörtgen fonksiyon çarpılır. Genlikleri doğru elde etmek için dikdörtgenin yüksekliği Δt kadar olmalıdır. Bu işlemin zaman bölgesindeki karşılığı, Şekil 9.3.3b'de görülen sinc fonksiyonu ile evrişimdir.



Şekil 9.3.2. İki adet alçak-geçişli süzgeçten, bir bant-geçişli süzgecin oluşturulması ($f_L = 2$ Hz, $f_H = 10$ Hz).



Şekil 9.3.3. Sayısal veri ile bant-geçişli süzgeçleme işleminin gerçekleştirilmesi. ($\Delta t = 0.01$, $f_N = 50$ Hz, $f_L = 2$ Hz, $f_H = 10$ Hz, 101 katsayı).

Alçak-geçişli süzgeçlerde yapıldığı gibi örnekleme kuramı ile süzgeçleme kuramı birleştirilebilir. Bunun için, örnekleme kuramının gereği olan $\Delta t \text{rect}(f_N)$ ile çarpım ve süzgeçleme kuramının gereği olan $\text{rect}(f_L)$ ile çarpım, tek işlemde bütünleştirilir. Şekil 9.3.3h'de bant-geçişli süzgecin belirtkeni verilmiştir. Şekil 9.3.3c'de ise, onun ters Fourier dönüşümü olan süzgeç fonksiyonu görülmektedir. (9.1.1), (9.2.1) ve (9.2.2) bağıntılarından,

$$f(t) = g_s(t) * \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} * \left[\frac{\sin(2\pi f_H t)}{\pi t} - \frac{\sin(2\pi f_L t)}{\pi t} \right] \quad (9.3.4)$$

$$F(f) = G_s(f) \Delta t \text{rect}(f_N) [\text{rect}(f_H) - \text{rect}(f_L)] \quad (9.3.5)$$

yazılabilir. Süzgeç izgesi, izleyen şekilde elde edilir:

$$B_B(f) = \Delta t \text{rect}(f_N) H(f) = \Delta t \text{rect}(f_N) [\text{rect}(f_H) - \text{rect}(f_L)]. \quad (9.3.6)$$

Kesme frekansları, Nyquist frekansından küçük olduğundan,

$$B_B(f) = \Delta t \text{rect}(f_N) [\text{rect}(f_H) - \text{rect}(f_L)] = \Delta t [\text{rect}(f_H) - \text{rect}(f_L)] \quad (9.3.7)$$

sonucu bulunur. Süzgeç katsayılarını veren bağıntı ise ters Fourier dönüşümünden

$$b_B(n.\Delta t) = \Delta t \left[\frac{\sin(2\pi f_H t)}{\pi t} - \frac{\sin(2\pi f_L t)}{\pi t} \right] = \frac{\sin(2\pi f_H t) - \sin(2\pi f_L t)}{2\pi f_N t} \quad (9.3.8)$$

olarak elde edilir. Aynı sonuç, (9.3.4) ve (9.3.5) bağıntılarından görülebileceği gibi

$$b_B(n.\Delta t) = \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} * \left[\frac{\sin(2\pi f_H t)}{\pi t} - \frac{\sin(2\pi f_L t)}{\pi t} \right] \quad (9.3.9)$$

işlemi ile de elde edilebilir.

Sıfır zamanındaki değeri bulabilmek için (9.3.8) bağıntısı izleyen şekilde de yazılabilir:

$$b_B(n.\Delta t) = \frac{1}{f_N} \left[f_H \frac{\sin(2\pi f_H t)}{2\pi f_H t} - f_L \frac{\sin(2\pi f_L t)}{2\pi f_L t} \right]. \quad (9.3.10)$$

Sıfır zamanı için sinc biçimli fonksiyonların limiti bir olduğundan, süzgeç katsayısının değeri

$$b_B(0) = (f_H - f_L) / f_N \quad (9.3.11)$$

olarak elde edilir. Şekil 9.3.3i'de süzgeç izgesi ve Şekil 9.3.3d'de onun ters Fourier dönüşümü olan süzgeç katsayıları görülmektedir. Bant-geçişli süzgecin katsayılar toplamı sıfır olmalıdır yani süzgeç kendisine giriş olarak verilen bir sabit sayı dizisine yanıt olarak, sıfır değerlerini üretmelidir. Çünkü sıfır frekanslı olaylar, bant-geçişli süzgeç tarafından geçirilmemelidir. Ayrıca, evrişim sonucunda faz kayması oluşmaması için süzgeç katsayıları çift bir fonksiyon olmalıdır. Bu koşulu sağlamak için katsayılar merkeze göre bakışimli ve katsayıların sayısı tek olmalıdır. Verilen örnek için kesme frekansları 2 ve 10 Hz seçilmiştir. Nyquist frekansı 50 Hz olduğundan, bant-geçişli süzgecin merkezindeki en büyük değeri (9.3.11) bağıntısından 0.16 olarak hesaplanmıştır. Daha sonra, -0.5 saniye ile 0.5 saniye arasında, 0.01 saniye örnekleme aralığı ile merkezin solunda ve sağında 50 şer adet ve merkezdeki katsayıyı da içermek üzere 101 katsayılı bir bant-geçişli

süzgeç düzenlenmiştir. Bu süzgeç ile Şekil 9.3.3a'da verilen sayısal veriye evrişim uygulanır ise Şekil 9.3.3e'de verilen çıkış elde edilir. Şekilden de görüldüğü gibi frekansı 2 Hz den daha küçük ve 10 Hz den büyük olan olaylar sayısal veriden süzölmüştür. Ele alınan örnekte, bu frekans aralığında sadece 5 Hz frekanslı sinüzoidal olduğundan, 0.5 ve 20 Hz frekanslı sinüzoidallerin veriden çıkarıldığı görölmektedir. Giriş verisinde, veri sayısı 501 olduğundan, çıkış verisinde soldan ve sağdan 50 veri yitirilmiştir. Bu nedenle çıkış verisi 0.5 saniyede başlayan ve 4.5 saniyede biten 401 veriden oluşmaktadır.

9.4. YÜKSEK-GEÇİŞLİ İDEAL SÜZGEÇ

Frekans içerikleri belirli bir frekanstan daha büyük olan olayları geçiren süzgeçler **yüksek-geçişli süzgeç** olarak adlandırılır. Bir ideal yüksek-geçişli süzgeç, (f_H) kesme frekansından daha küçük frekanslı hiç bir olayın zaman verisinde bulunmasına izin vermemelidir. Bu işlem sürekli fonksiyonlar için Şekil 9.4.1'de gösterilmiştir. Şekil 9.4.1a ve 9.4.1d'de, sırası ile $g(t)$ ve onun Fourier dönüşümü $G(f)$ verilmiştir. Süzgeçleme işlemi frekans bölgesinde gerçekleştirmek için $G(f)$ ile negatif ve pozitif kesme frekansları arasında sıfır, bu aralığın dışında birim değerde olan bir fonksiyonun çarpılması gerekmektedir. Şekil 9.4.1e'de bu fonksiyon ve Şekil 9.4.1f'de ise çarpım sonucu görölmektedir. Örneğin, kesme frekansı 10 Hz olarak alınır ise çarpım sonucunda da bu frekanstan daha küçük frekanslar izgede ve onun ters Fourier dönüşümü olan zaman fonksiyonunda da bulunmayacaktır (Şekil 9.4.1c).

Şekil 9.4.1e'de verilen yüksek-geçişli süzgeç belirtkenini, birim değerinden alçak-geçişli bir süzgecin çıkarılması ile elde etmek olanaklıdır. Şekil 9.4.2a'da birim değerindeki sabit ve Şekil 9.4.2b'de ise kesme frekansı f_H olan bir alçak-geçişli süzgeç görölmektedir. Bu fonksiyonların farkı alınır ise Şekil 9.4.2c'de verilen yüksek-geçişli süzgeç elde edilir ve Şekil 9.4.1e'de görüntölenen süzgece eşittir. Buradan, yüksek-geçişli süzgeç belirtkeni

$$H_H(f) = 1 - \text{rect}(f_H) \quad (9.4.1)$$

olarak yazılabilir ve bu bağıntının ters Fourier dönüşümü süzgeç fonksiyonuna eşittir:

$$h_H(t) = \delta(t) - \frac{\sin(2\pi f_H t)}{\pi t} \quad (9.4.2)$$

Birim impuls ancak simgesel olarak çizilebileceğinden, Şekil 9.4.1b'de bu bağıntının sadece ikinci terimi görüntölenmiştir.

Şekil 9.4.3'de işlemin sayısal veri ile gerçekleştirilmesi açıklanmıştır. Şekil 9.4.3a'da, sayısal veri ve Şekil 9.4.3f'de ise onun Fourier dönüşümü olan $G_s(f)$ fonksiyonu gösterilmiştir. Sayısal veri (9.1.8) bağıntısı ile verilen üç sinüzoidalın toplamının $\Delta t = 0.01$ saniye aralığı ile örneklemeinden elde edilmiştir. $G(f)$ fonksiyonuna bir yaklaşım sağlamak için $G_s(f)$ ile Şekil 9.4.3g'de verilen Nyquist frekansının iki katı genişliğindeki dikdörtgen fonksiyonu çarpılır. Çıkış verisinde genlikleri doğru elde etmek için dikdörtgenin yüksekliği Δt kadar olmalıdır. Bu işlemin zaman bölgesindeki karşılığı, Şekil 9.4.3b'de görölen *sinc* fonksiyonu ile evrişimdir. Böylelikle, zaman ve frekans bölgesinde sürekli fonksiyonlar yeniden elde edilir. Şekil 9.4.3h'de, yüksek-geçişli süzgecin belirtkeni görüntölenmiştir. Şekil 9.4.3c'de ise, onun ters Fourier dönüşümü olan süzgeç fonksiyonunun birim impuls dışındaki bölümü çizilmiştir. Sırası ile örnekleme ve süzgeçleme kuramlarının gerekleri olan $\Delta t \text{rect}(f_N)$ ve süzgeç belirtkeni ile çarpım işlemleri, süzgeç izgesi kavramı kullanılarak birleştirilir. Böylece, süzgeç izgesi izleyen şekilde elde edilir:

$$B_H(f) = \Delta t \text{rect}(f_N) [1 - \text{rect}(f_H)] = \Delta t \text{rect}(f_N) - \Delta t \text{rect}(f_N) \text{rect}(f_H). \quad (9.4.3)$$

Kesme frekansı, Nyquist frekansından küçük olduğundan

$$B_H(f) = \Delta t \text{rect}(f_N) - \Delta t \text{rect}(f_H) \quad (9.4.4)$$

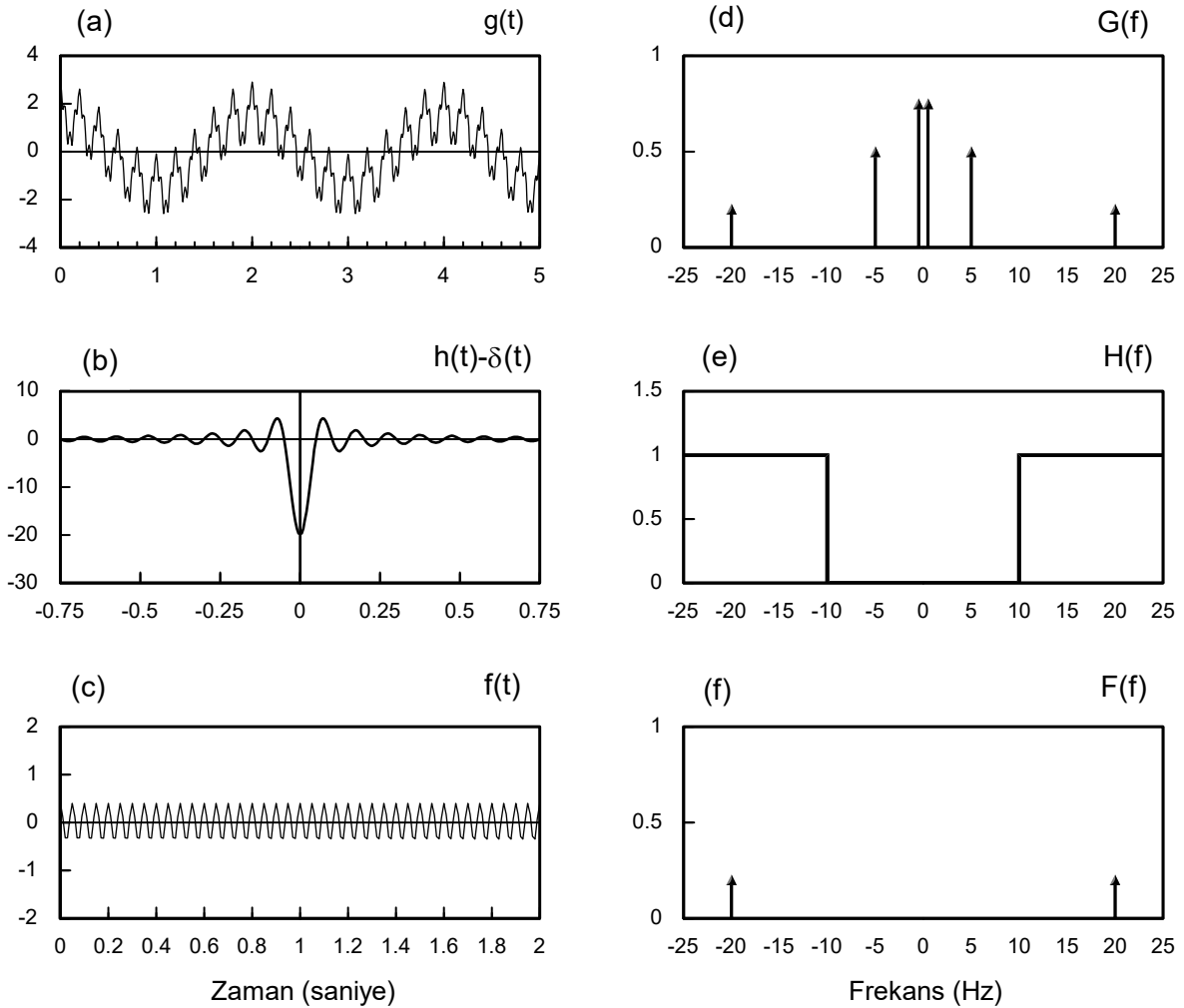
yazılabilir. Bu sonuç, yüksek-geçişli süzgecin, alçak kesme frekansı f_H ve yüksek kesme frekansı Nyquist frekansı olan bir bant-geçişli süzgece eşit olduğunu göstermektedir. Süzgeç katsayılarını veren bağıntı, (9.4.4) denkleminin ters Fourier dönüşümünden

$$b_H(n.\Delta t) = \Delta t \left[\frac{\sin(2\pi f_N t)}{\pi t} - \frac{\sin(2\pi f_H t)}{\pi t} \right] = \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} - \frac{\sin(2\pi f_H t)}{2\pi f_H t} \quad (9.4.5)$$

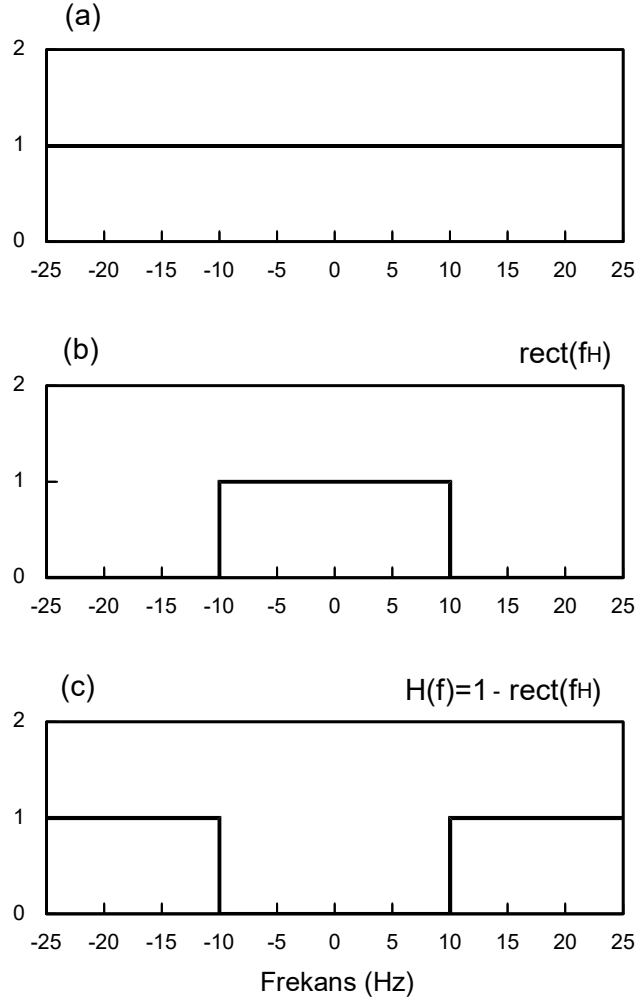
olarak bulunabilir. Aynı sonuç, (9.4.2) bağıntısından

$$b_H(n.\Delta t) = \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} * \left[\delta(t) - \frac{\sin(2\pi f_H t)}{\pi t} \right] = \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} - \frac{\sin(2\pi f_H t)}{2\pi f_H t}$$

işlemi ile de elde edilebilir.



Şekil 9.4.1. Sürekli fonksiyonlar için yüksek-geçişli süzgeç düzenlenmesi ($f_H = 10$ Hz).



Şekil 9.4.2. Bir sabitten alçak-geçişli süzgecin çıkarılması ile yüksek-geçişli süzgecin oluşturulması ($f_H = 10$ Hz).

Sıfır zamanındaki değeri bulabilmek için (9.4.5) bağıntısı izleyen şekilde yazılabilir:

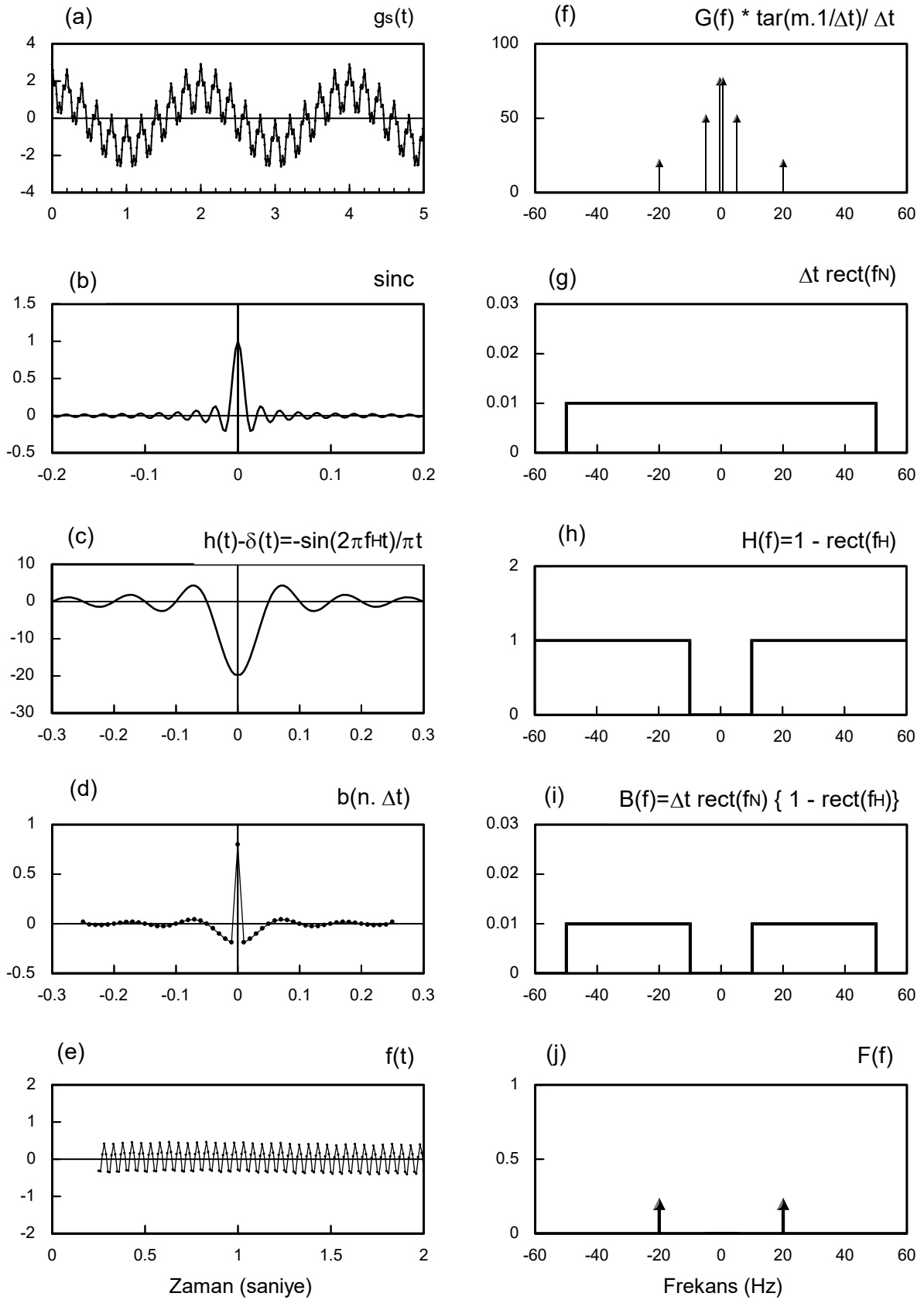
$$b_H(n.\Delta t) = \frac{1}{f_N} \left[f_N \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} - f_H \frac{\sin(2\pi f_H t)}{2\pi f_H t} \right]. \quad (9.4.6)$$

Sıfır için sinc biçimli fonksiyonların limiti bir olduğundan,

$$b_H(0) = 1 - \frac{f_H}{f_N} \quad (9.4.7)$$

değeri elde edilir. Süzgeç katsayılarının hesaplanmasında, zaman değerleri olarak örnekleme aralığının tam katları kullanılır. Bu durumda, (9.4.6) bağıntısının ilk teriminde sinüs içerisinde Nyquist frekansı bulunduğu ve onun $(1/2\Delta t)$ değerine eşit olması nedeni ile sinüs içeren ilk terim, π değerinin tam katlarına eşit olur. Böylelikle, sıfır zamanı dışında, bu terim her zaman sıfıra eşit olur ve (9.4.5) bağıntısı izleyen şekilde yazılabilir:

$$b_H(n.\Delta t) = -\frac{\sin(2\pi f_H t)}{2\pi f_N t} \quad t \neq 0. \quad (9.4.8)$$



Şekil 9.4.3. Sayısal veri ile yüksek-geçişli süzgeçleme işleminin gerçekleştirilmesi. ($\Delta t = 0.01$, $f_N = 50$ Hz, $f_H = 10$ Hz, 51 katsayı).

Şekil 9.4.3i'de süzgeç izgesi ve Şekil 9.4.3d'de onun ters Fourier dönüşümü olan süzgeç katsayıları görülmektedir. Süzgeç izgesi ve süzgeç katsayıları bağıntısı çift fonksiyondur. Uygulamada bu koşulu sağlamak ve dolayısı ile çıkış verisinde faz kayması oluşturmamak için süzgeç katsayıları merkeze göre bakışimli ve tek sayıda olmalıdır. Verilen örnek için kesme frekansı 10 Hz seçilmiştir. Nyquist frekansı 50 Hz olduğundan, yüksek-geçişli süzgecin merkezdeki değeri (9.4.7) bağıntısından 0.8 olarak hesaplanmıştır. Daha sonra, -0.25 saniye ile 0.25 saniye arasında, 0.01 saniye örnekleme aralığı ile merkezin solunda ve sağında 25 şer adet ve merkezdeki katsayıyı da içermek üzere 51 katsayılı bir yüksek-geçişli süzgeç düzenlenmiştir. Yüksek geçişli süzgeçlerin, sıfır frekanslı olayları yani verinin sabit bileşenini yok etmesi istendiğinden, süzgeç katsayıları toplamı da sıfıra eşit alınır. Şekil 9.4.3a'da verilen sayısal veriye süzgeç katsayıları ile evrişim uygulanır ise Şekil 9.4.3e'de verilen çıkış elde edilir. Şekilden de görüldüğü gibi frekansı 10 Hz değerinden küçük olan olaylar sayısal veriden süzölmüştür. Ele alınan örnekte, bu frekans aralığında sadece 20 Hz frekanslı sinüzoidal olduğundan, 0.5 ve 5 Hz frekanslı sinüzoidallerin veriden çıkarıldığı görülmektedir. Giriş verisinde, veri sayısı 501 olduğundan, çıkış verisinde soldan ve sağdan 25 veri yitirilmiştir. Bu nedenle çıkış verisi 0.25 saniyede başlayan ve 4.75 saniyede biten 451 veriden oluşmaktadır. Bu verinin yüksek frekanslı olması nedeni ile çizim kolaylığı açısından 2 saniyeye kadar olan bölümü Şekil 9.4.3e'de gösterilmiştir.

9.5. BANT-DURDURUCU İDEAL SÜZGEÇ

Frekans içerikleri iki frekans arasında bulunan olayları yok eden süzgeçler **bant-durdurucu süzgeç** olarak adlandırılır. Küçük kesme frekansı f_L ve büyük kesme frekansı f_H simgeleri ile gösterilir. Frekansları sıfır frekansından f_L frekansına kadar olan ve f_H frekansından büyük frekanslı olaylar, ideal bant-durdurucu süzgeç tarafından değiştirilmeden geçirilir. Bu tanım ile bir bant-durdurucu süzgeç, kesme frekansı f_L olan bir alçak-geçişli süzgeç ile kesme frekansı f_H olan bir yüksek geçişli süzgecin toplamından oluşur.

Şekil 9.5.1'de bant-durdurucu süzgeçler için süzgeç belirtkeninin elde edilmesi gösterilmiştir. Şekil 9.5.1a'da, kesme frekansı 2 Hz olan bir alçak-geçişli süzgeç görülmektedir. Şekil 9.5.1b'de ise kesme frekansı 10 Hz olan bir yüksek geçişli süzgecin süzgeç belirtkeni verilmiştir. Bu iki süzgecin toplamı ile Şekil 9.5.1c'de görüntülenen bant-durdurucu süzgeç elde edilir. Şekilden, -10 ve -2 Hz ile 2 ve 10 Hz arasında süzgeç belirtkeninin değerinin sıfır olduğu görülmektedir. Dolayısı ile 2-10 Hz frekans aralığındaki olaylar frekans bölgesinde sıfır ile çarpılacaktır. Bant-durdurucu süzgecin belirtkeni, (9.4.1) ve (9.2.1) bağıntıları ile verilen yüksek-geçişli ve alçak-geçişli süzgeç belirtkenlerinin toplamı ile

$$H_D(f) = H_H(f) + H_L(f) = 1 - \text{rect}(f_H) + \text{rect}(f_L) \quad (9.5.1)$$

olarak yazılabilir ve bu bağıntının ters Fourier dönüşümü ise süzgeç fonksiyonuna eşittir:

$$h_D(t) = h_H(t) + h_L(t) = \delta(t) - \frac{\sin(2\pi f_H t)}{\pi t} + \frac{\sin(2\pi f_L t)}{\pi t} \quad (9.5.2)$$

Şekil 9.5.2'de işlemin sayısal veri ile gerçekleştirilmesi gösterilmiştir. Yüksek frekanslı sinüzoidal görüntüleyebilmek amacı ile beş saniye süren sayısal verinin üç saniyelik bölümü Şekil 9.5.2a'da verilmiştir. Şekil 9.5.2f'de ise Fourier dönüşümü gösterilmiştir. $G_s(f)$ verisinden, $G(f)$ fonksiyonuna bir yaklaşım sağlamak için $G_s(f)$ ile Şekil 9.5.2g'de verilen Nyquist frekansının iki katı genişliğindeki dikdörtgen fonksiyon çarpılmıştır. Çarpım sonucunda doğru genlik değerlerinin elde edilmesi için dikdörtgen fonksiyonun yüksekliği Δt kadar olmalıdır. Bu işlemin zaman bölgesindeki karşılığı, Şekil 9.5.2b'de görülen sinc fonksiyonu ile evrişimdir. Böylelikle, zaman ve frekans bölgesinde sürekli fonksiyonlar yeniden elde edilir. Şekil 9.5.2h'de bant-durdurucu

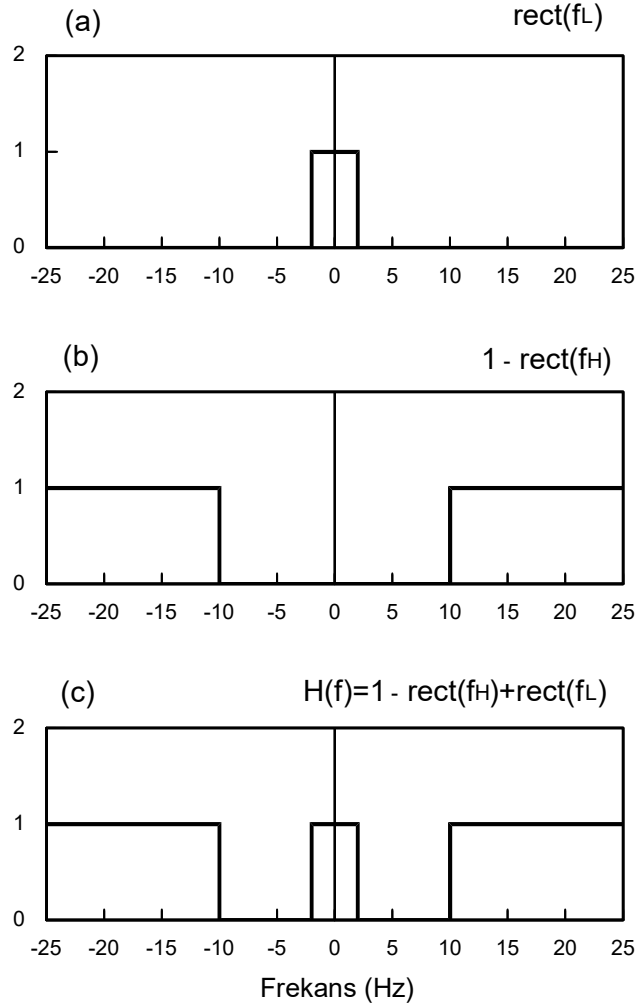
süzgecin belirtkeni ve Şekil 9.5.2c'de ise onun ters Fourier dönüşümü olan süzgeç fonksiyonu görülmektedir. Örnekleme kuramı ve süzgeçleme kuramını birleştirmek için $\Delta t \cdot \text{rect}(f_N)$ ile süzgeç belirtkeni çarpılır. Böylece, süzgeç izgesi izleyen şekilde elde edilir:

$$B_D(f) = \Delta t \text{rect}(f_N) [1 - \text{rect}(f_H) + \text{rect}(f_L)],$$

$$B_D(f) = \Delta t \text{rect}(f_N) - \Delta t \text{rect}(f_N) \text{rect}(f_H) + \Delta t \text{rect}(f_N) \text{rect}(f_L). \quad (9.5.3)$$

Kesme frekansları, Nyquist frekansından küçük olduğundan izleyen sonuç yazılabilir:

$$B_D(f) = \Delta t [\text{rect}(f_N) - \text{rect}(f_H) + \text{rect}(f_L)]. \quad (9.5.4)$$



Şekil 9.5.1. Alçak-geçişli ve yüksek-geçişli iki süzgecin toplamı ile bant-durdurucu süzgeç düzenlenmesi.

Süzgeç katsayılarını veren bağıntı ise (9.5.4) denkleminin ters Fourier dönüşümünden

$$b_D(n.\Delta t) = \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} - \frac{\sin(2\pi f_H t)}{2\pi f_H t} + \frac{\sin(2\pi f_L t)}{2\pi f_L t} \quad (9.5.5)$$

olarak elde edilir. Aynı sonuç, (9.5.2) bağıntısından, izleyen şekilde bulunabilir:

$$b_D(n.\Delta t) = \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} * \left[\delta(t) - \frac{\sin(2\pi f_H t)}{\pi t} + \frac{\sin(2\pi f_L t)}{\pi t} \right].$$

Sıfır zamanındaki değeri hesaplayabilmek için (9.5.5) bağıntısı yeniden yazılabilir:

$$b_D(n.\Delta t) = \frac{1}{f_N} \left[f_N \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} - f_H \frac{\sin(2\pi f_H t)}{2\pi f_H t} + f_L \frac{\sin(2\pi f_L t)}{2\pi f_L t} \right]. \quad (9.5.6)$$

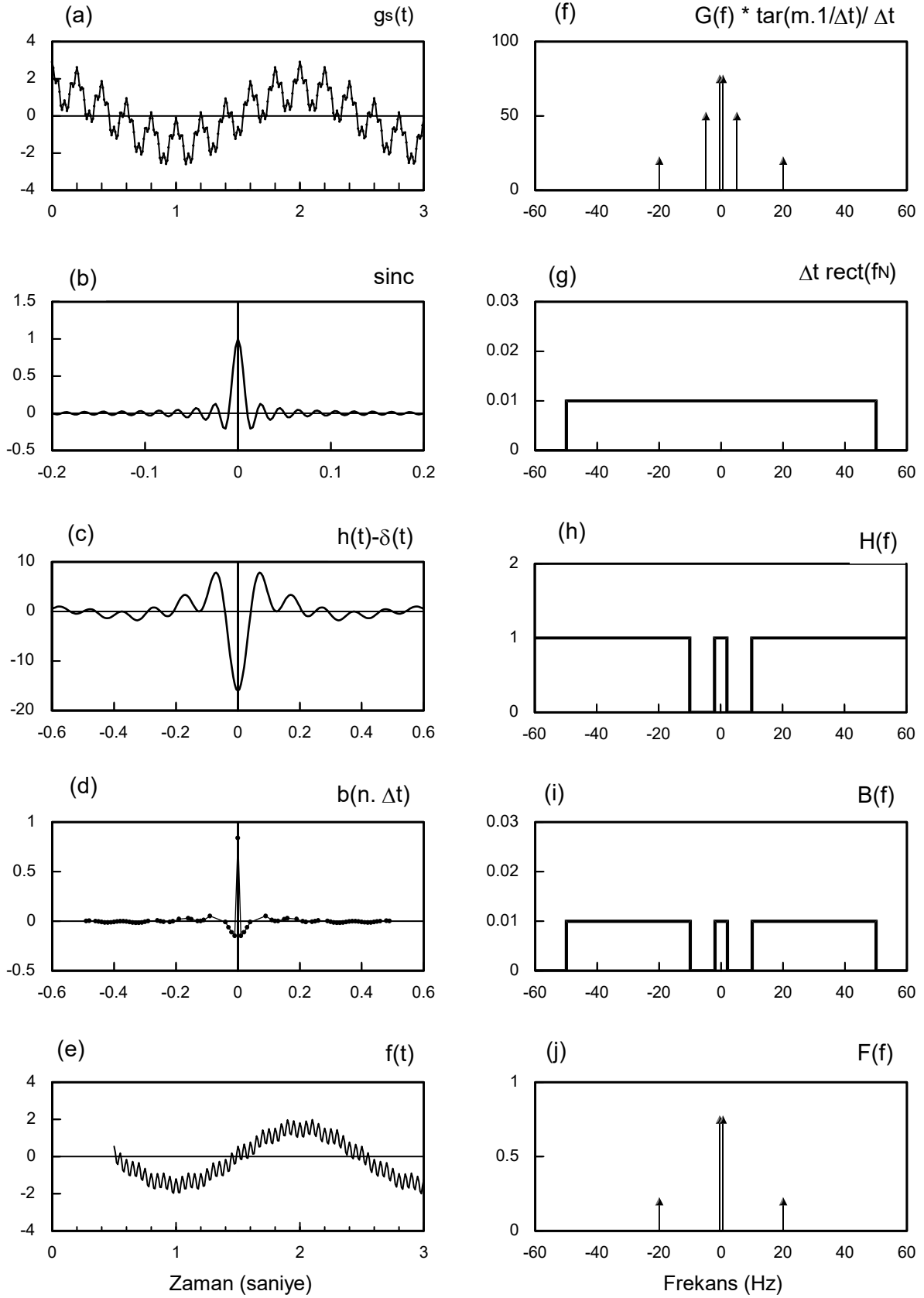
Sıfır için *sinc* fonksiyonunun limiti bir olduğundan, sıfır zamanı için süzgeç katsayısının değeri

$$b_D(0) = 1 - \frac{f_H - f_L}{f_N} \quad (9.5.7)$$

olarak elde edilir. Süzgeç katsayılarının hesaplanmasında, zaman değerleri olarak örnekleme aralığının tam katları kullanılır. Bu durumda, (9.5.5) bağıntısının ilk teriminde sinüs içersinde Nyquist frekansı bulunduğu ve onun $(1/2\Delta t)$ değerine eşit olması nedeni ile ilk sinüs içeren terim, π değerinin tam katlarına eşit olur. Böylelikle, bu terimin değeri sıfır zamanı dışında sıfır olduğundan (9.5.5) bağıntısı için

$$b_D(n.\Delta t) = \frac{\sin(2\pi f_L t) - \sin(2\pi f_H t)}{2\pi f_N t} \quad t \neq 0 \quad (9.5.8)$$

yazılabilir. Şekil 9.5.2i'de süzgeç izgesi ve Şekil 9.5.2d'de ise onun ters Fourier dönüşümü olan süzgeç katsayıları görülmektedir. Evrişim sonucunda faz kayması oluşmaması için süzgeç katsayıları merkeze göre bakışlı ve dolayısı ile sayısı tek olmalıdır. Ayrıca, sıfır frekanslı olayların geçirilebilmesi için süzgeç katsayıları toplamı bir olmalıdır. Verilen örnek için durdurma aralığı 2-10 Hz seçilmiştir. Nyquist frekansı 50 Hz olduğundan, bant-geçişli süzgecin merkezdeki en büyük değeri (9.5.7) bağıntısından 0.84 olarak hesaplanmıştır. Daha sonra, -0.5 saniye ile 0.5 saniye arasında, 0.01 saniye örnekleme aralığı ile merkezin solunda ve sağında 50 şer adet ve merkezdeki katsayıyı da içermek üzere 101 katsayılı bir bant-durdurucu süzgeç düzenlenmiştir. Bu süzgeç, Şekil 9.5.2a'da verilen sayısal veri ile evriştirilir ise Şekil 9.5.2e'de verilen çıkış elde edilir. Şekilden de görüldüğü gibi frekansı 2-10 Hz aralığındaki olaylar sayısal veriden süzölmüştür. Ele alınan örnekte, bu frekans aralığında sadece 5 Hz frekanslı sinüzoidal olduğundan, bu sinüzoidalın veriden çıkarıldığı ve frekansları 0.5 ve 20 Hz olan diğer iki sinüzoidalın veride kaldığı görülmektedir. Giriş verisinde, veri sayısı 501 olduğundan, çıkış verisinde soldan ve sağdan 50 veri yitirilmiştir. Bu nedenle çıkış verisi 0.5 saniyede başlayan ve 4.5 saniyede biten 401 veriden oluşmaktadır. Şekil 9.5.2e'de, verinin yüksek frekanslı olması nedeni ile çizim kolaylığı açısından 3 saniyeye kadar olan bölümü gösterilmiştir.



Şekil 9.5.2. Sayısal veri ile bant-durdurucu süzgeçleme işleminin gerçekleştirilmesi. ($\Delta t = 0.01$, $f_N = 50$ Hz, $f_L = 2$ Hz, $f_H = 10$ Hz, 101 katsayı).

9.6. SÜZGEÇLERE KAZANÇ UYGULANMASI

Bir süzgecin çıkışının genliği girişten bağımsız olarak belirli bir çarpan kadar arttırılmak veya azaltılmak istenir ise zaman bölgesinde süzgeç katsayıları, frekans bölgesinde ise süzgeç izgesi istenilen değişimi sağlayacak bir gerçel sayı ile çarpılır. Süzgeçleme doğrusal bir işlem olduğundan çıkış verisi değerleri de bu gerçel sayı ile çarpılır. (9.1.6) ve (9.1.7) bağıntılarının her iki yanının **süzgeç kazancı** olarak adlandırılan bir a sabiti ile çarpımı ile izleyen sonuçlar yazılabilir:

$$a.f(t) = g_s(t) * a.b(n.\Delta t), \quad (9.6.1)$$

$$a.F(f) = G_s(f).[a.B(f)]. \quad (9.6.2)$$

Kazanç uygulamalarında genliklerdeki yükselme veya azalma **desibel ölçeği** ile betimlenir ve **dB** simgesi ile gösterilir. Bir desibel, adını Alexander Graham Bell'in anısından alan bel biriminin onda birine eşittir (1 bel= 10 desibel). Desibel ölçeği iki niceliğinin oranını tanımlamak amacı ile kullanılır. p_0 başvuru değeri olmak üzere p ve p_0 gibi iki niceliğinin oranının desibel ölçeğindeki karşılığı izleyen şekilde hesaplanır:

$$20 \log_{10}(p/ p_0) = 20 \ln(p/ p_0) / \ln(10). \quad (9.6.3)$$

Örneğin, çıkışın genliği, girişin genliğinin iki katı ve başvuru sinyali giriş ise elde edilen kazanç,

$$20 \log_{10}(2) = 6.02060 \text{ dB}$$

işlemi ile yaklaşık 6 dB olarak hesaplanabilir. Beşinci bölümde (5.3.5) bağıntısı ile tanımlanan enerji izgesi hesaplamalarında genliğin karesi kullanıldığından, desibel ölçeği ile ilgili bağıntı izleyen şekilde verilir:

$$10 \log_{10}(p/ p_0) = 10 \ln(p/ p_0) / \ln(10).$$

9.7. UYGULAMA ÖRNEĞİ

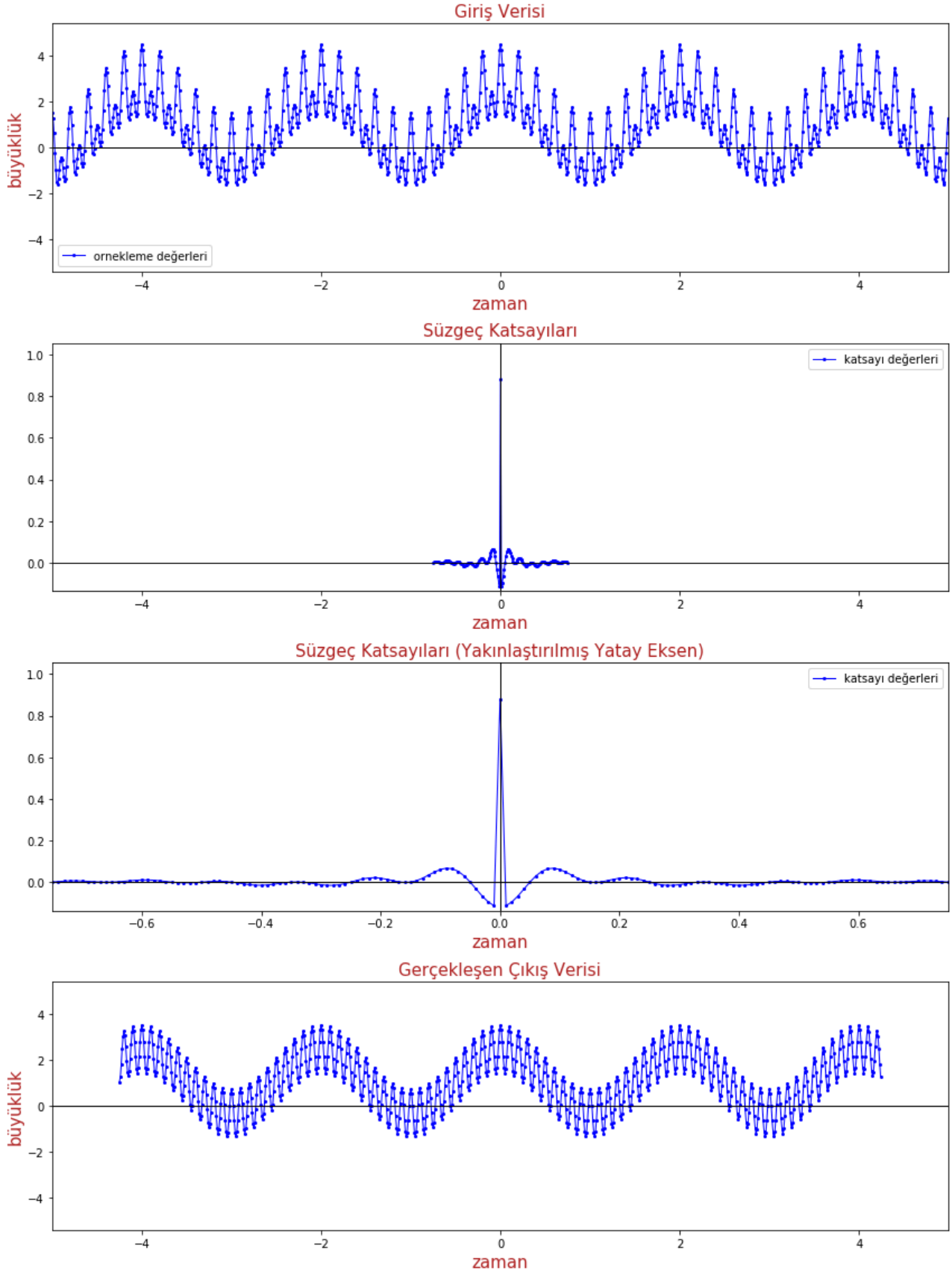
Frekansları ve katsayıları aşağıda verilen sına verisi Şekil 9.7.1'in en üstünde görüntülenmiştir.

Birinci sinusoidalın frekansı, a ve b katsayıları: 0.5 1.5 0

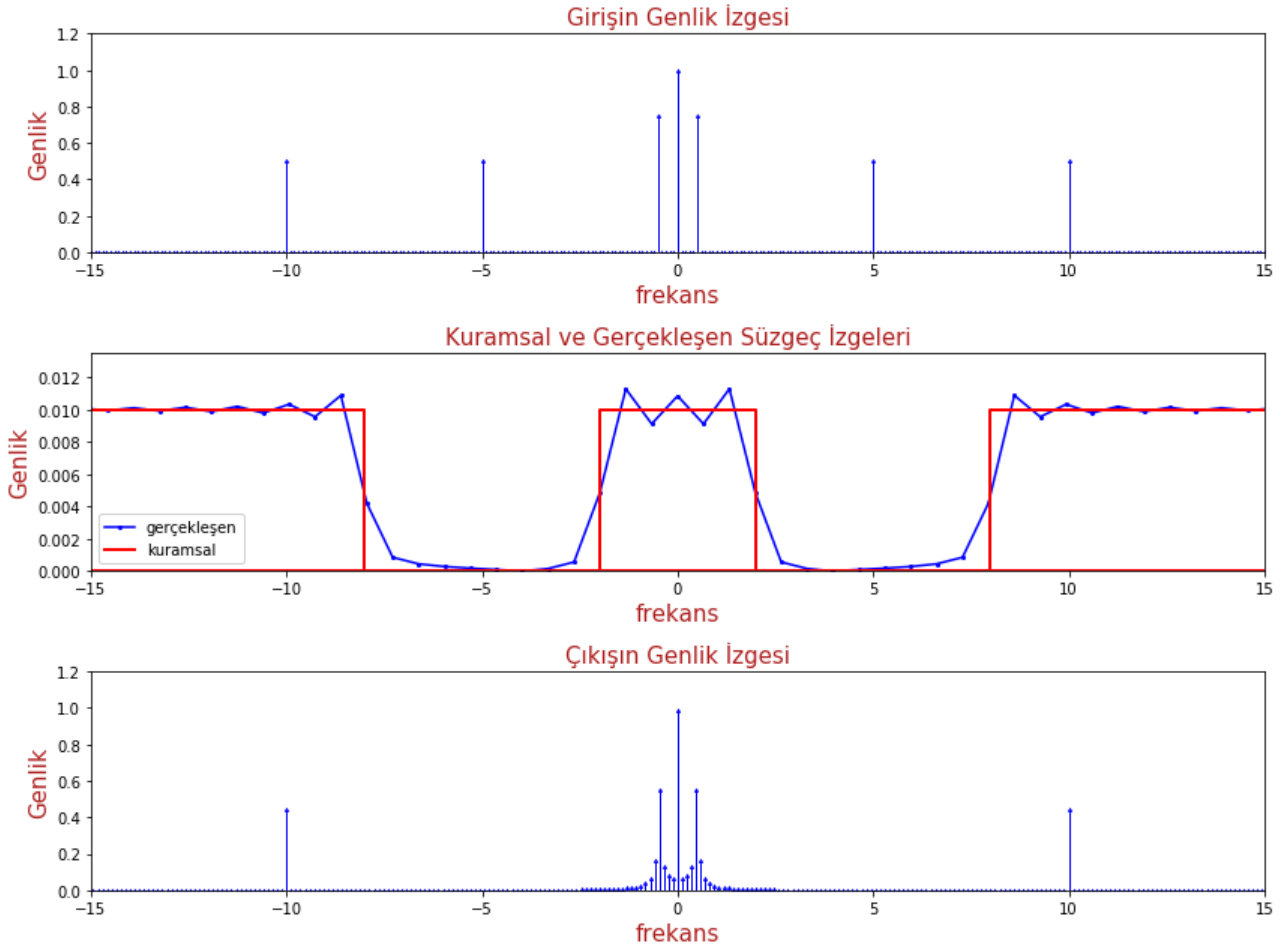
İkinci sinusoidalın frekansı, a ve b katsayıları: 5 1 0

Üçüncü sinusoidalın frekansı, a ve b katsayıları: 10 0.4 0

Veriye ayrıca 1 sabiti eklenmiştir. Örnekleme aralığı 0.01 saniye ve veri sayısı 1000 adettir. Şekil 9.7.1'in orta bölümünde kesme frekansları 2 ve 8 Hz ve katsayı adedi 151 olan bant-durdurucu süzgeç bulunmaktadır. En alttaki bölümde ise süzgeçleme sonucunda hesaplanan gerçekleşen çıkış görülmektedir. 5 Hz frekanslı sinüzoidal, bant-durdurucu süzgeç ile yok edileceğinden, çıkış 0.5 ve 10 Hz frekanslarındaki iki adet sinüzoidalın toplamından oluşmaktadır. Şekil 9.7.2'de ise süzgeçleme işlemi frekans bölgesinde görüntülenmiştir.



Şekil 9.7.1. Birim değerdeki bir sabit ile 0.5, 5 ve 10 Hz frekanslı sinüzoidallerin toplamından oluşan $\Delta t = 0.01$ sn aralıkları ile örneklenmiş sayısal veri (yukarıda) ($f_N = 50$ Hz), $f_L = 2$ Hz ve $f_H = 8$ Hz kesme frekanslı ve 151 katsayılı bant-durdurucu süzgeç (ortada) ve çıkış verisi (altta). Çıkış verisinden 5 Hz frekanslı sinüzoidal elenmiştir.



Şekil 9.7.2. Şekil 9.7.1. Giriş verisinin Fourier dönüşümü (en üstte). Yüksek-geçişli süzgecin belirtkeni (ortada) ve çarpma sonucunda elde edilen çıkışın Fourier dönüşümü (altta).