

## BÖLÜM 10

### Pencere Fonksiyonları ile Frekans Seçici Süzgeç Düzenlenmesi

Zaman bölgesi süzgeç uygulamalarında süzgecin katsayı sayısının azaltılması, çıkış verisindeki kayıpları azaltmaktadır. Ancak, bu işlem hesaplama sonucunun belirli bir duyarlılığın altında olmasına yol açmamalıdır. İdeal süzgeçlerde, süzgeç belirtkenlerinin dikdörtgen fonksiyonlar kullanılarak tanımlanması, frekans bölgesinde kesme frekansları civarında dik bir sonlanmaya neden olur. Bu dik kesim sonucu, zaman bölgesinde süzgeç fonksiyonu salınımlı bir fonksiyon oluşturur ve süzgeç katsayılarının yatay eksenin büyümesi ile sifıra yaklaşması yavaş bir şekilde gerçekleşir ve istenilen doğrulukta çalışan daha az katsayılı süzgeç oluşturulması güçleşir. Bu nedenle, süzgeç belirtkeni kesme frekansları civarında birim değerden sifıra doğru geçiş yapan çeşitli pencere fonksiyonları ile oluşturulmaktadır. Dikdörtgen pencere, tanjant hiperbolik penceresinin limit durumu olduğundan (bkz. Bölüm 2, bağıntı 2.3.6), Bölüm 9'da verilen ve dikdörtgen pencere ile kurulan tüm süzgeçler, tanjant hiperbolik süzgeç ile de gerçekleştirilebilir. Bu bölümde önce tanjant hiperbolik süzgeçler tanıtılacak ve daha sonra süzgeç düzenlemek için önerilen pencere fonksiyonlarından bazıları örnek vermek amacı ile ele alınacaktır.

#### 10.1. ALÇAK-GEÇİŞLİ TANJANT HİPERBOLİK SÜZGEÇLER

Bölüm 2'de işaret fonksiyonu,  $r$  yarı genişlik olmak üzere izleyen tanjant hiperbolik fonksiyonunun özel bir durumu olarak tanımlanmıştı:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \tanh \left[ \frac{2t}{r} \right] = \text{sign}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Şekil 2.1.1'de ise çeşitli tanjant hiperbolik fonksiyonlar görüntülenerek, yarı genişliğin ( $r$ ) sifıra yaklaşması ile tanjant hiperbolik fonksiyonunun işaret fonksiyonuna yaklaşması görüntülenmiştir. Dikdörtgen fonksiyonun, işaret fonksiyonundan elde edilmesine (2.3.2 bağıntısı) benzer olarak iki adet tanjant hiperbolik fonksiyonunun farkı ile bir pencerenin elde edilmesi olanaklıdır. Bu amaç için izleyen fonksiyon tanımlanabilir:

$$H_{th}(f) = \frac{1}{2} \tanh \left[ \frac{2f}{r} \right]. \quad (10.1.1)$$

Bu fonksiyonun ve eksi işaretlisinin, Şekil 10.1.1a ve 10.1.1b'de görüldüğü gibi sırası ile eksi ve artı değerli kesme frekanslarına kaydırılması ve birbirinden çıkarılması ile frekans bölgesinde bir alçak-geçişli **tanjant hiperbolik süzgeç** elde edilir (Başokur, 1998; 2011):

$$H_{LT}(f) = H_{th}(f + f_L) - H_{th}(f - f_L), \quad (10.1.2)$$

$$H_{LT}(f) = \frac{1}{2} \left\{ \tanh \left[ \frac{2(f + f_L)}{r_L} \right] - \tanh \left[ \frac{2(f - f_L)}{r_L} \right] \right\}. \quad (10.1.3)$$

Burada,  $f_L$  kesme frekansını göstermektedir.  $r_L$  yarı genişlik değeri ise kesme frekansı civarındaki eğimi denetler. Yarı genişlik küçüldükçe, pencerenin kesme frekansı civarındaki eğimi dikleşir. Şekil 10.1.2'de, yarı genişlik değerinin değişmesi ile alçak-geçişli süzgecin eğiminin değişmesi görülmektedir. Süzgeç belirtkeni  $-\infty$  ile  $+\infty$  arasında tanımlıdır ve süreksizliği yoktur. Yarı genişlik sifıra yaklaştığında (10.1.2b) bağıntısındaki birinci terim,

$$\lim_{r_L \rightarrow 0} \tanh \left[ \frac{2(f + f_L)}{r_L} \right] = \begin{cases} -1 & f < -f_L \\ 0 & f = -f_L \\ 1 & f > -f_L \end{cases}$$

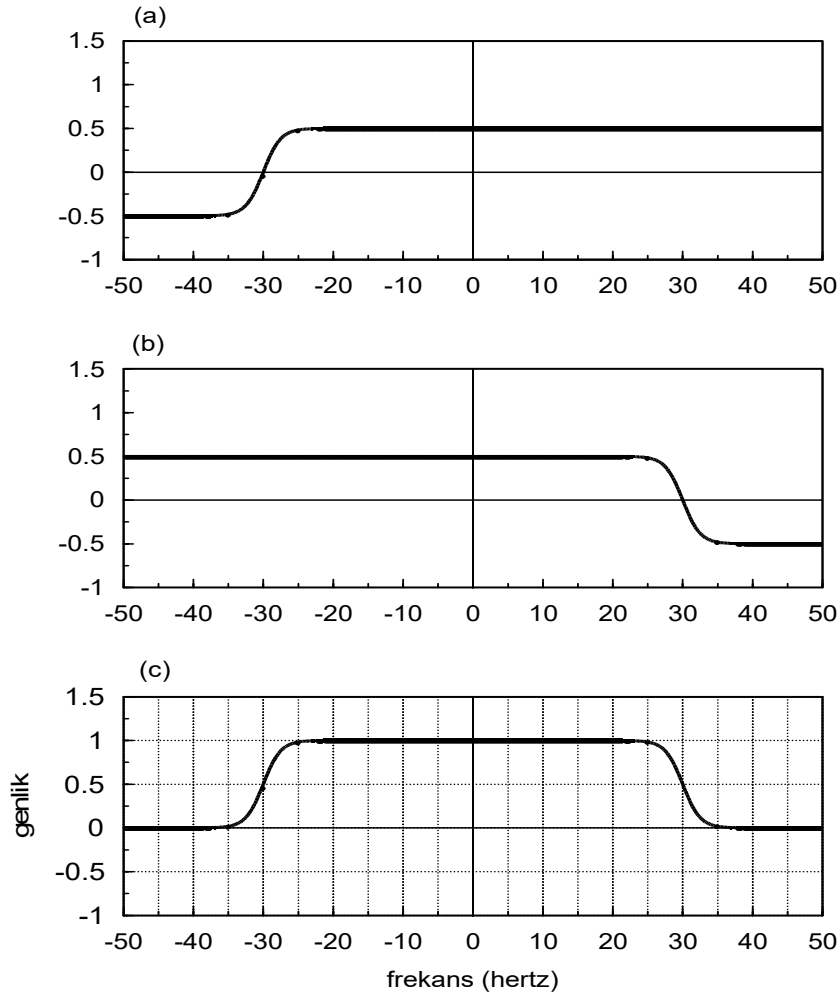
değerlerini alır (Şekil 10.1.1a). Benzer olarak ikinci terimin eksi işaretlisi,

$$\lim_{r_L \rightarrow 0} \left\{ -\tanh \left[ \frac{2(f - f_L)}{r_L} \right] \right\} = \begin{cases} 1 & f < f_L \\ 0 & f = +f_L \\ -1 & f > -f_L \end{cases}$$

değerlerini alır (Şekil 10.1.1b). Her ikisi toplandığında, (10.1.3) bağıntısı,

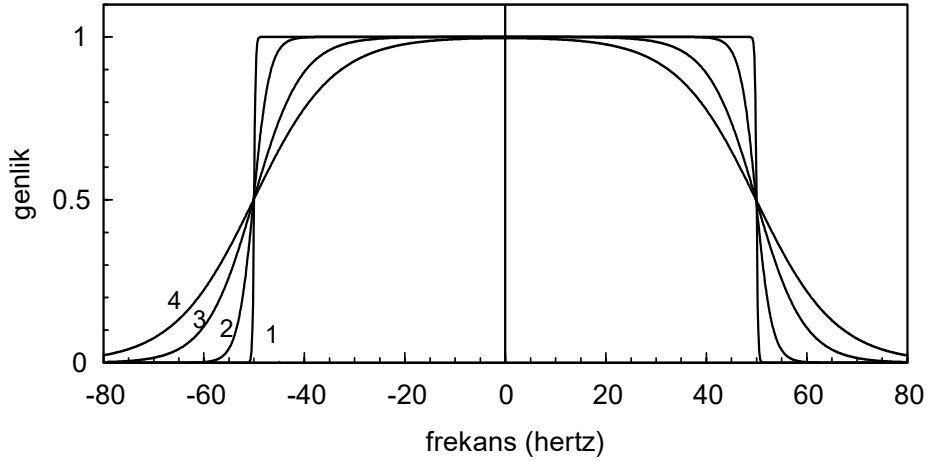
$$\lim_{r \rightarrow 0} H_{LT}(f) = \begin{cases} 1 & -f_L < f < f_L \\ 1/2 & f = -f_L; f = f_L \\ 0 & f < -f_L; f > f_L \end{cases} \quad (10.1.4)$$

limit değerlerini alır ve dikdörtgen fonksiyonuna eşit olur (Şekil 10.1.1c).

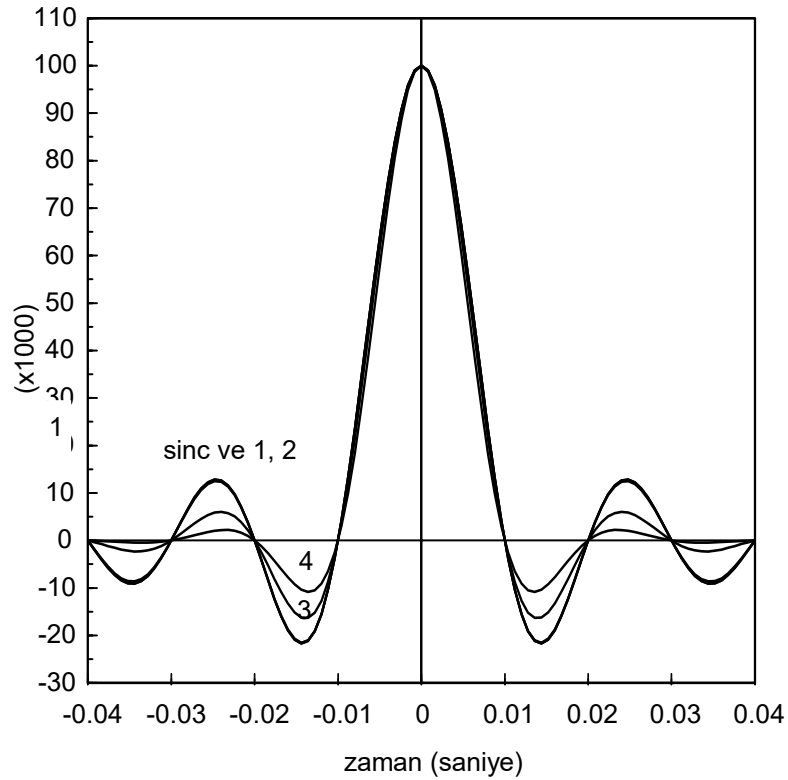


Şekil 10.1.1. Frekans bölgesinde, kesme frekansına kaydırılmış iki adet tanjant hiperbolik fonksiyonunun toplamı ile alçak-geçişli süzgeç düzenlenmesi. Kesme frekansı ( $f_L$ ) 30 Hz ve geçiş bölgesi yarı genişliği 5 Hz'dir.

Şekil 10.1.2 ve Şekil 10.1.3'de, kesme frekansı 50 Hz olan çeşitli alçak-geçişli süzgeçler sırası ile frekans ve zaman ortamlarında görüntülenmişlerdir. Kesme frekansı ( $f_L$ ) ve yarı genişlik ( $r_L$ ) değerlerine bağlı olarak belirli bir frekans aralığında süzgeç belirtkeninin genliği birimdir. Bu frekans aralığına **geçirme bandı** adı verilir. Frekansları geçirme bandına karşılık gelen olaylar, genlikleri değiştirilmeden süzgeçten geçirilir. Geçirme bandından başlayarak, frekansın artması ile süzgecin genliği azalmaya başlar ve kesme frekansında yarı değere ulaşır. Kesme frekansından yüksek frekanslara doğru gidildiğinde genlikler sıfır değerine doğru yaklaşırlar. Süzgeç belirtkeninin genliğinin birim değerden sıfıra düştüğü bu frekans aralığı **geçiş bandı** olarak adlandırılır. Genliğin sıfır olduğu frekanslara ise **durdurma bandı** adı verilir. Yukarıda verilen bağıntılarda, geçiş bandının yarı genişliği istenilen bir değere yaklaştırılabilir.



Şekil 10.1.2. Frekans bölgesinde (10.1.2b) bağıntısı ile alçak-geçişli tanjant hiperbolik süzgeç belirtkeninin elde edilmesi ( $f_L = 50$  Hz). Kullanılan geçiş bölgesi yarı genişlikleri sırası ile 0.64, 3, 19 ve 32 Hz'dir.



Şekil 10.1.3. Zaman bölgesinde (10.1.13) bağıntısından hesaplanan alçak-geçişli süzgeçler. Şekil 10.1.2'de verilen frekans bölgesi fonksiyonlarına karşılık gelmektedirler ve aynı yarı genişlik değerleri kullanılmıştır.

Süzgeç belirtkeni ile genişliği Nyquist frekansının iki katı ve yüksekliği  $\Delta t$  olan dikdörtgen fonksiyon çarpılarak, süzgeç izgesi, bulunabilir. Kesme frekansı, Nyquist frekansından küçük olduğundan, (10.1.3) bağıntısından, (9.2.6a) gereğince

$$B_{LT}(f) = \frac{\Delta t}{2} \left\{ \tanh \left[ \frac{2(f + f_L)}{r_L} \right] - \tanh \left[ \frac{2(f - f_L)}{r_L} \right] \right\}. \quad (10.1.5)$$

yazılabilir (Başokur, 1998 ve 2011). Süzgeç fonksiyonunu ve süzgeç katsayılarını bulmak için izleyen Fourier Dönüşüm çiftinden yararlanılır (Bracewell(1965), sayfa 366):

$$\frac{i}{\sinh(\pi t)} \leftrightarrow \tanh(\pi f). \quad (10.1.6)$$

(10.1.1) ile tanımlanan frekans bölgesi fonksiyonunun ters Fourier dönüşümünü bulmak amacı ile Fourier dönüşümünün ölçekleme özelliği kullanılabilir:

$$f(t/k) / k \leftrightarrow F(kf).$$

(10.1.6) dönüşüm çiftinde,  $k = 2 / \pi r_L$  yazılması ve her iki tarafın 1/2 değeri ile çarpılması ile

$$h_{th}(t) = \frac{i \pi r_L}{4 \sinh(\pi^2 r_L t / 2)} \leftrightarrow H_{th}(f) = \frac{1}{2} \tanh \left[ \frac{2f}{r_L} \right] \quad (10.1.7)$$

elde edilebilir. İkinci adım olarak, kayma kuramının uygulanması ile (10.1.3) bağıntısının ters Fourier dönüşümü izleyen şekilde bulunabilir:

$$h_{LT}(t) = h_{th}(t) \exp(-i2\pi f_L t) - h_{th}(t) \exp(i2\pi f_L t). \quad (10.1.8)$$

(10.1.7) bağıntısındaki zaman fonksiyonunun, (10.1.8) eşitliğinde yerine yazılması ve denklemin düzenlenmesi ile

$$h_{LT}(t) = \frac{i \pi r_L (-2i)}{4 \sinh(\pi^2 r_L t / 2)} \left[ \frac{\exp(i2\pi f_L t) - \exp(-i2\pi f_L t)}{2i} \right] \quad (10.1.9)$$

elde edilebilir. Parantez içindeki terim sinüs fonksiyonu olduğundan,

$$h_{LT}(t) = \frac{\pi r_L}{2} \frac{\sin(2\pi f_L t)}{\sinh(\pi^2 r_L t / 2)} \quad (10.1.10)$$

yazılarak, alçak geçişli süzgeç fonksiyonu saptanabilir. Eğer yarı genişlik sonsuz küçültülür ise  $\sinh(x) \cong x$  olacağından,

$$\lim_{r_L \rightarrow 0} \frac{\pi r_L}{2} \frac{\sin(2\pi f_L t)}{\sinh(\pi^2 r_L t / 2)} = \frac{\pi r_L}{2} \frac{\sin(2\pi f_L t)}{\pi^2 r_L t / 2} = \frac{\sin(2\pi f_L t)}{\pi t}$$

elde edilir ve yarı genişliğin küçülmesi ile (10.1.10) bağıntısının, ideal alçak-geçişli süzgece yaklaşacağı anlaşılabilir. İdeal alçak-geçişli süzgeç fonksiyonu ile benzeşim gösteren bir bağıntı türetmek istenir ise

$$a = \pi r_L / 4f_L \quad (10.1.11)$$

eşitliği ile verilen bir katsayı tanımlanabilir. Burada,  $a$  **yuvarlatma katsayısı** olarak adlandırılır ve işlevi  $r$  yarı genişliği ile aynıdır. Böylece, süzgeç fonksiyonu izleyen biçimde yazılabilir:

$$h_{LT}(t) = 2 a f_L \frac{\sin(2\pi f_L t)}{\sinh(2\pi a f_L t)} . \quad (10.1.12)$$

(10.1.3) ile verilen süzgeç belirkeni de yuvarlatma katsayısı cinsinden aşağıdaki gibi tanımlanabilir (Şekil 10.1.2):

$$H_{LT}(f) = \frac{1}{2} \left\{ \tanh \left[ \frac{\pi (f + f_L)}{2a f_L} \right] - \tanh \left[ \frac{\pi (f - f_L)}{2a f_L} \right] \right\} . \quad (10.1.13)$$

Süzgeç katsayılarını hesaplamak için gereken bağıntı izleyen evrişim işlemi ile bulunabilir:

$$b_{LT}(n.\Delta t) = h_{LT}(t) * \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} . \quad (10.1.14)$$

Nyquist frekansı, kesme frekansından büyük olduğundan ve (9.2.6b) tanımından, izleyen sonuçlar yazılabilir:

$$b_{LT}(n.\Delta t) = \frac{\pi r_L}{2} \frac{\sin(2\pi f_L t)}{\sinh(\pi^2 r_L t / 2)} * \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} = \frac{\pi r_L}{4f_N} \frac{\sin(2\pi f_L t)}{\sinh(\pi^2 r_L t / 2)} , \quad (10.1.15a)$$

$$b_{LT}(n.\Delta t) = 2a f_L \frac{\sin(2\pi f_L t)}{\sinh(2\pi a f_L t)} * \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} = a \frac{f_L}{f_N} \frac{\sin(2\pi f_L t)}{\sinh(2\pi a f_L t)} \quad t = \mp n.\Delta t . \quad (10.1.15b)$$

$t=0$  sıfır noktasındaki limit için 0/0 şeklinde belirsizlik bulunduğundan, pay ve paydanın türevi ile

$$b_{LT}(0) = \frac{f_L}{f_N} \left\{ a \frac{2\pi f_L \cos(2\pi f_L t)}{2\pi a f_L \cosh(2\pi a f_L t)} \right\} \quad (10.1.16)$$

elde edilebilir ve  $\cos(0)$  ve  $\cosh(0)$  birime eşit olduğundan, yalınlaştırmalar ile

$$b_{LT}(0) = f_L / f_N \quad (10.1.17)$$

sonucuna erişilir. Şekil 10.1.3'de,  $r$  yarı genişliğinin bağlı olarak, süzgeç katsayılarını veren bağıntı görüntülenmiştir. Yarı genişlik küçüldükçe (10.1.15) bağıntısı da ideal alçak-geçişli süzgece yaklaşır. Bu sonuca,  $\sinh$  fonksiyonunun içinin küçük olması durumunda,  $\sinh(x) \cong x$  özelliğinden yararlanılarak ulaşılabilir ve (10.1.15) bağıntısından ideal alçak-geçişli süzgeç bağıntısının elde edilebileceği gösterilebilir. Şekil 10.1.2 ve Şekil 10.1.3'ün incelenmesi, frekans bölgesinde kesme frekansı civarındaki eğimin azaltılması ile zaman bölgesinde süzgeç fonksiyonundaki dalgalanmanın azaldığını göstermektedir. Süzgeç fonksiyonunun daha çabuk sifıra yaklaşması daha az sayıda katsayı kullanımına izin verir. Böylece, hesaplama zamanı kısalmış ve çıkış verisinin sayısında daha az kayıp oluşur. Ancak, çok az sayıda katsayı kullanımı ise hesap işlemlerinin duyarlılığını azaltabilir.

## 10.2. BANT-GEÇİŞLİ TANJANT HİPERBOLİK SÜZGEÇLER

Bant-geçişli süzgeçler, küçük kesme frekansı  $f_L$  ve yüksek kesme frekansı  $f_H$  olan iki frekans arasındaki olayları geçiren süzgeçlerdir. Bant-geçişli süzgeçler, iki alçak-geçişli süzgecin farkından hesaplanabilir. Şekil 10.2.1a ve 10.2.1b'de, kesme frekansları ve eğimleri farklı olan iki alçak-

geçişli süzgeç, frekans bölgesinde görüntülenmiştir. Bunların farkı ile elde edilen bant-geçişli süzgeç ise Şekil 10.2.1c'de verilmiştir. Bir alçak-geçişli süzgeç iki tanjant hiperbolik fonksiyonundan elde edildiğinden, bir bant-geçişli süzgeç için dört adet tanjant hiperbolik fonksiyonu kullanmak gerekir. Süzgeç belirtkeni izleyen bağıntılar ile verilebilir (Başokur, 1998):

$$H_{BT}(f) = \frac{1}{2} \left\{ \tanh \left[ \frac{2(f+f_H)}{r_H} \right] - \tanh \left[ \frac{2(f-f_H)}{r_H} \right] - \tanh \left[ \frac{2(f+f_L)}{r_L} \right] + \tanh \left[ \frac{2(f-f_L)}{r_L} \right] \right\}, \quad (10.2.1)$$

$$H_{BT}(f) = \frac{1}{2} \left\{ \tanh \left[ \frac{\pi(f+f_H)}{2a_H f_H} \right] - \tanh \left[ \frac{\pi(f-f_H)}{2a_H f_H} \right] - \tanh \left[ \frac{\pi(f+f_L)}{2a_L f_L} \right] + \tanh \left[ \frac{\pi(f-f_L)}{2a_L f_L} \right] \right\}. \quad (10.2.2)$$

Burada,  $r_L$  ve  $r_H$  sırası ile alçak ve yüksek frekans geçiş bölgesinin yarı genişlikleridir.  $a_L$  ve  $a_H$  yuvarlatma katsayıları da aynı işlevi yerine getirir ve

$$a_L = \frac{\pi r_L}{4f_L} \quad (10.2.3)$$

$$a_H = \frac{\pi r_H}{4f_H} \quad (10.2.4)$$

bağıntıları ile verilir. Bu parametreler yüksek ve alçak kesme frekanslarındaki eğimi denetlerler. Kesme frekanslarındaki eğim, verinin Fourier dönüşümü göz önüne alınarak ve/veya süzgeçlemenin amacına uygun olarak düzenlenir. Bant-geçişli süzgeçler ile hem küçük hem de yüksek frekanslı gürültüler bastırılabilir. Düşük frekanslı gürültüler genellikle jeofizik sinyallerin frekans bandına yakındırlar. Bu nedenle, bilgi yitirmemek için küçük kesme frekansındaki eğim daha dik seçilir (Şekil 10.2.1c). Süzgeç izgesini bulmak için (10.2.1) bağıntısını, genişliği Nyquist frekansının iki katı ve yüksekliği  $\Delta t$  olan dikdörtgen fonksiyon ile çarpmak yeterlidir. Kesme frekansları  $f_L$  ve  $f_H$ , Nyquist frekansından küçük olmak zorunda olduğundan (9.2.6a) sonucunun uygulanması ile

$$B_{BT}(f) = \Delta t \cdot H_{BT}(f) \quad (10.2.5)$$

yazılabilir. (10.2.1) ve (10.2.2) eşitliklerinin, (10.2.5) bağıntısında yerine yazılması ile izleyen bağıntılar elde edilir (Başokur, 2011):

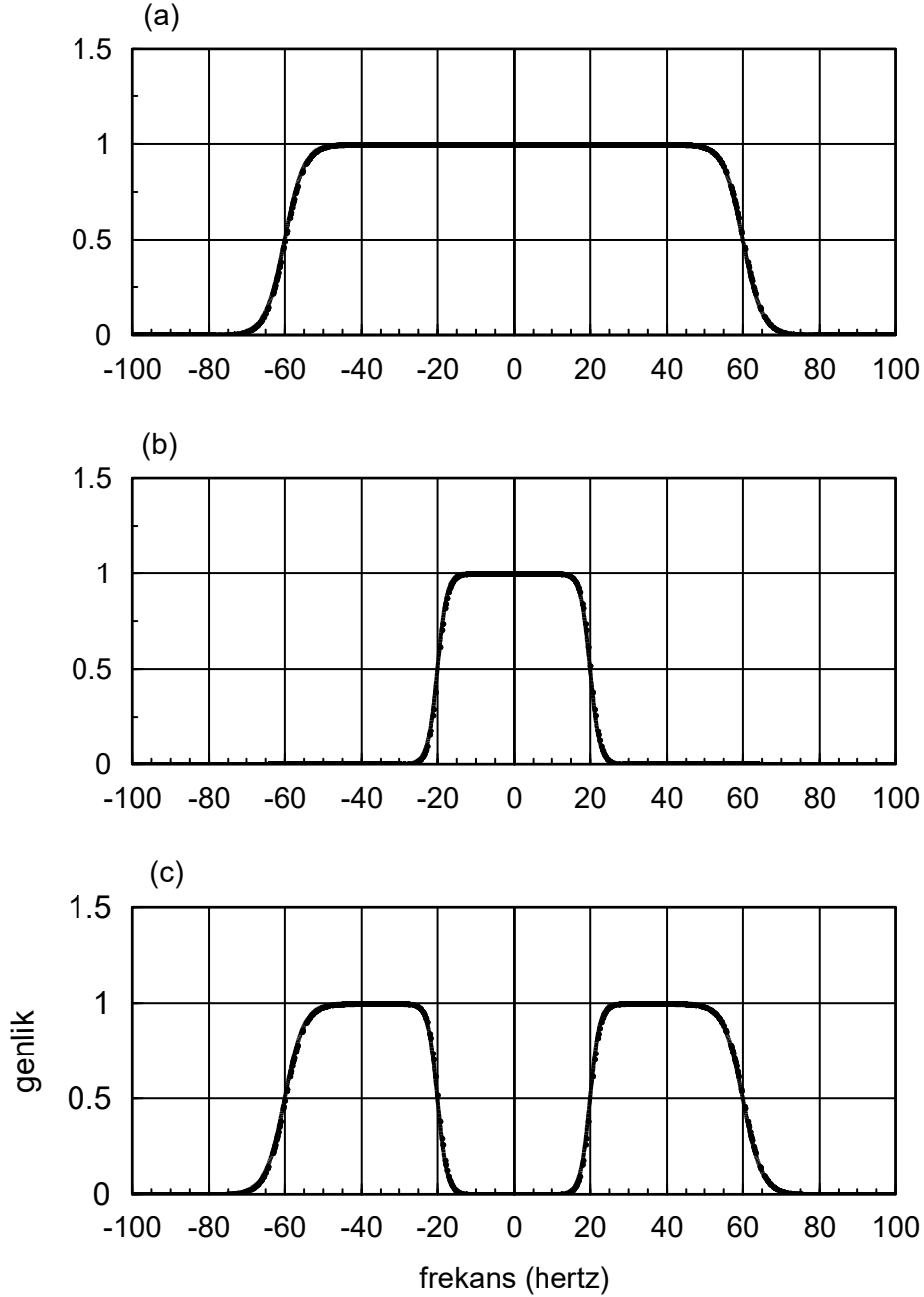
$$B_{BT}(f) = \frac{\Delta t}{2} \left\{ \tanh \left[ \frac{2(f+f_H)}{r_H} \right] - \tanh \left[ \frac{2(f-f_H)}{r_H} \right] - \tanh \left[ \frac{2(f+f_L)}{r_L} \right] + \tanh \left[ \frac{2(f-f_L)}{r_L} \right] \right\}, \quad (10.2.6)$$

$$B_{BT}(f) = \frac{\Delta t}{2} \left\{ \tanh \left[ \frac{\pi(f+f_H)}{2a_H f_H} \right] - \tanh \left[ \frac{\pi(f-f_H)}{2a_H f_H} \right] - \tanh \left[ \frac{\pi(f+f_L)}{2a_L f_L} \right] + \tanh \left[ \frac{\pi(f-f_L)}{2a_L f_L} \right] \right\}. \quad (10.2.7)$$

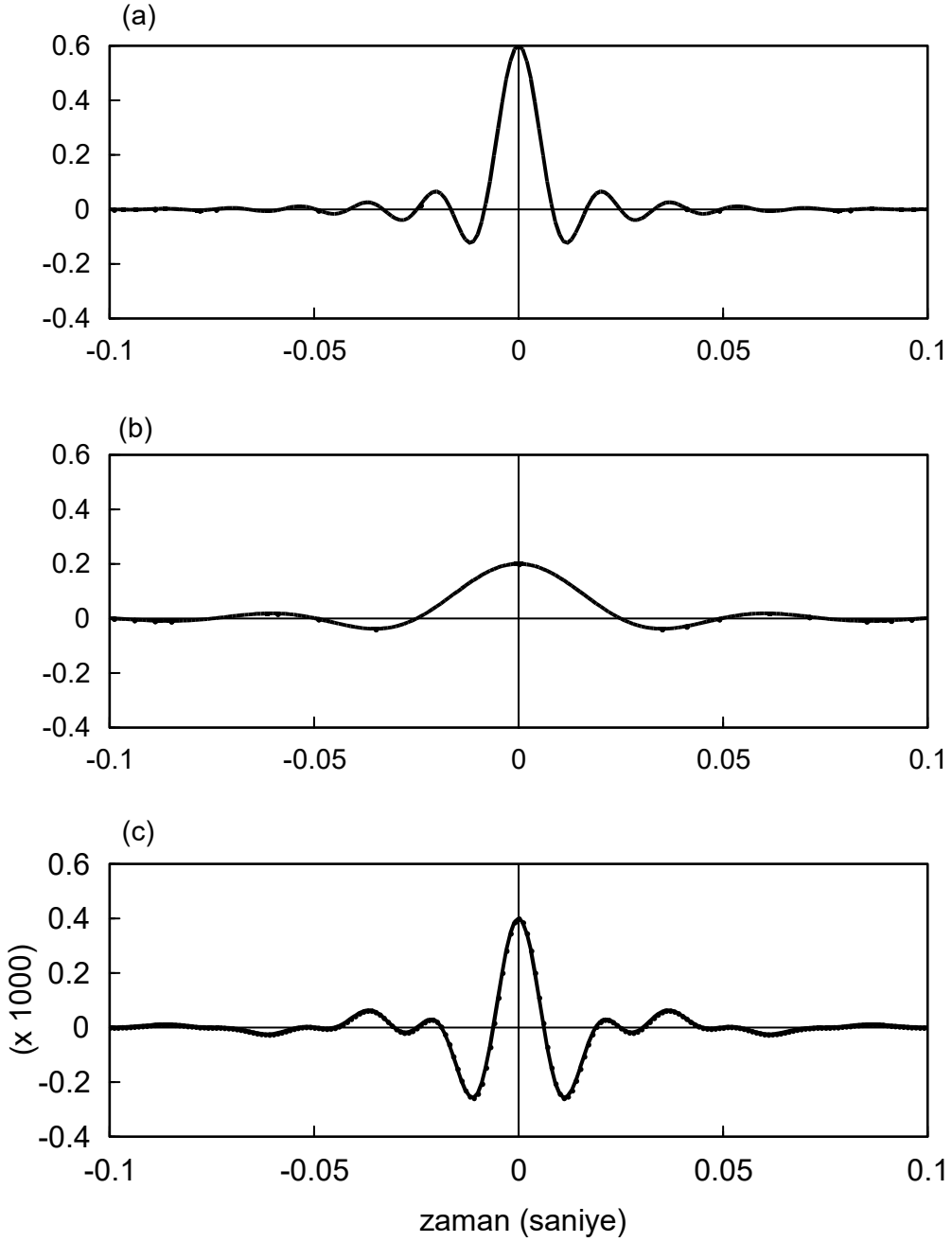
Süzgeç fonksiyonu (10.2.1) bağıntısının ters Fourier dönüşümünden bulunabilir:

$$h_{BT}(t) = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{r_H \sin(2\pi f_H t)}{\sinh(\pi^2 r_H t / 2)} - \frac{r_L \sin(2\pi f_L t)}{\sinh(\pi^2 r_L t / 2)} \right], \quad (10.2.8a)$$

$$h_{BT}(t) = 2 \left[ f_H \frac{a_H \sin(2\pi f_H t)}{\sinh(2\pi a_H f_H t)} - f_L \frac{a_L \sin(2\pi f_L t)}{\sinh(2\pi a_L f_L t)} \right]. \quad (10.2.8b)$$



Şekil 10.2.1. Frekans bölgesinde kesme frekansı 60 Hz ve geçiş bölgesi yarı genişliği 10 Hz olan bir alçak-geçişli süzgeçten (a), kesme frekansı 20 Hz ve geçiş bölgesi yarı genişliği 5 Hz olan başka bir alçak-geçişli süzgecin (b) çıkarılması ile bir bant-geçişli süzgecin, süzgeç belirtkeninin elde edilmesi (c). Bant-geçişli süzgecin alçak ve yüksek kesme frekansları civarındaki eğimleri birbirinden farklıdır.



Şekil 10.2.2. Bant-geçişli süzgecin (c) zaman bölgesinde iki alçak-geçişli süzgecin (a ve b) farkından elde edilmesi. Şekil 10.2.1 de frekans bölgesinde verilen süzgeçler sırası ile zaman bölgesinde görülmektedir ( $f_H = 50$  Hz,  $f_L = 20$  Hz ve  $f_N = 100$  Hz).



Süzgeç katsayıları, süzgeç ve *sinc* fonksiyonunun evrişimininden veya (10.2.6) ve (10.2.7) bağıntılarında verilen süzgeç izgesinin ters Fourier dönüşümünden bulunabilir:

$$b_{BT}(n\Delta t) = h_{BT}(t) * \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} = h_{BT}(t) \cdot \Delta t = \frac{h_{BT}(t)}{2f_N},$$

$$b_{BT}(n\Delta t) = \frac{\pi}{4f_N} \left[ \frac{r_H \sin(2\pi f_H t)}{\sinh(\pi^2 r_H t / 2)} - \frac{r_L \sin(2\pi f_L t)}{\sinh(\pi^2 r_L t / 2)} \right], \quad (10.2.9a)$$

$$b_{BT}(n\Delta t) = \frac{a_H f_H}{f_N} \frac{\sin(2\pi f_H t)}{\sinh(2\pi a_H f_H t)} - \frac{a_L f_L}{f_N} \frac{\sin(2\pi f_L t)}{\sinh(2\pi a_L f_L t)} \quad t = \mp n\Delta t. \quad (10.2.9b)$$

$t=0$  sıfır noktasındaki limit için pay ve paydanın türevi ile

$$b_{BT}(n\Delta t) = \frac{1}{f_N} \left[ a_H f_H \frac{2\pi f_H \cos(2\pi f_H t)}{2\pi a_H f_H \cosh(2\pi a_H f_H t)} - a_L f_L \frac{2\pi f_L \cos(2\pi f_L t)}{2\pi a_L f_L \cosh(2\pi a_L f_L t)} \right]$$

yazılabilir,  $\cos(0)$  ve  $\cosh(0)$  birime eşit olduğundan, yalınlaştırmalar ile

$$b_{BT}(0) = (f_H - f_L) / f_N \quad (10.2.10)$$

elde edilir. Bu bağıntının, (9.3.11) ile verilen ideal bant-geçişli süzgecin  $t=0$  noktasındaki değerine eşit olduğu görülebilir. Şekil 10.2.1a ve 10.2.1b'de frekans bölgesinde görüntülenen alçak-geçişli süzgeçlerin, zaman bölgesindeki karşılıkları sırası ile Şekil 10.2.2a ve 10.2.2b'de verilmiştir. Zaman bölgesinde iki alçak-geçişli süzgecin farkı ile Şekil 10.2.2c'deki bant-geçişli süzgeç elde edilir. Alçak-geçişli süzgeçler biçimsel olarak *sinc* fonksiyonuna benzemekle birlikte, bant-geçişli süzgecin kendine özgü bir davranışı olduğu görülmektedir.

### 10.3. YÜKSEK-GEÇİŞLİ TANJANT HİPERBOLİK SÜZGEÇLER

İdeal süzgeçler bölümünde yüksek-geçişli bir süzgecin belirtkeni, birim değerden dikdörtgen penceresinin çıkarılması ile türetilmişti. Benzer olarak tanjant hiperbolik pencere kullanımı ile de bir yüksek geçişli süzgeç tasarlanabilir (Başokur, 1998; 2011):

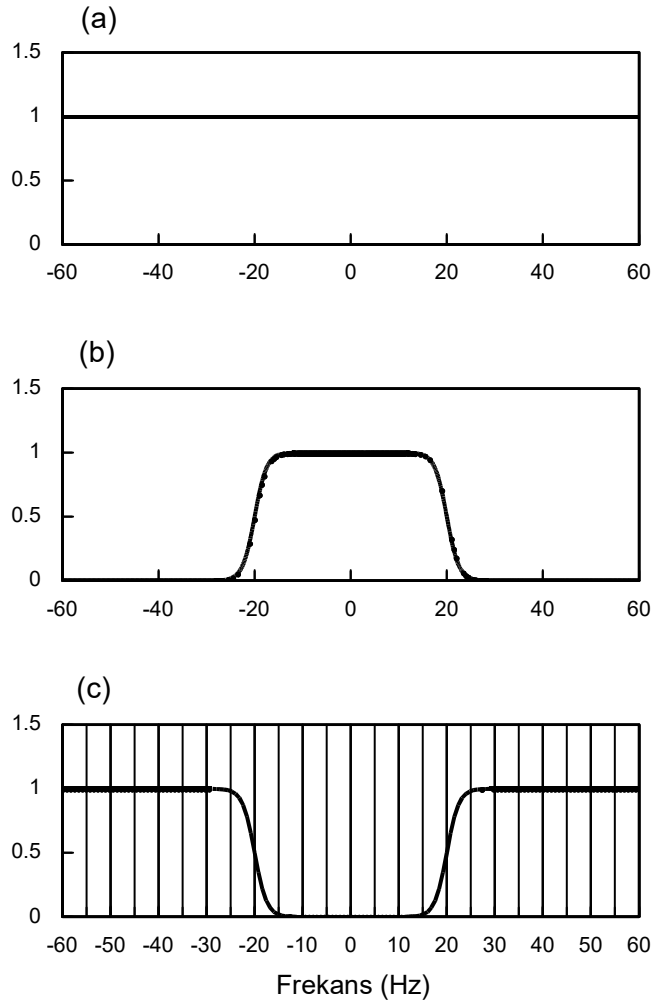
$$H_{HT}(f) = 1 - \frac{1}{2} \left\{ \tanh \left[ \frac{2(f + f_H)}{r_H} \right] - \tanh \left[ \frac{2(f - f_H)}{r_H} \right] \right\}. \quad (10.3.1a)$$

Yuvarlatma katsayısı,  $a_H = \pi r_H / 4f_H$  şeklinde tanımlanır ise izleyen bağıntı yazılabilir:

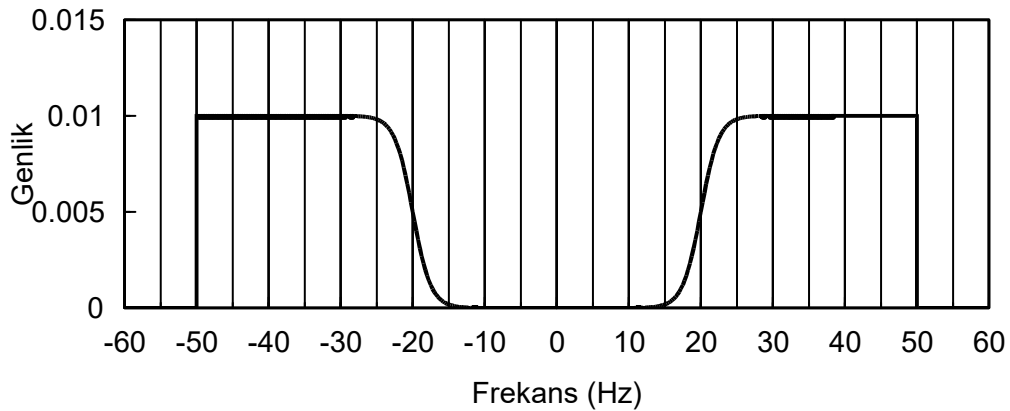
$$H_{HT}(f) = 1 - \frac{1}{2} \left\{ \tanh \left[ \frac{\pi (f + f_H)}{2a_H} \right] - \tanh \left[ \frac{\pi (f - f_H)}{2a_H} \right] \right\}. \quad (10.3.1b)$$

Şekil 10.3.1'de süzgeç belirtkeninin elde edilmesi görüntülenmiştir. Süzgeç izgesini bulmak için (10.3.1) bağıntısını, genişliği Nyquist frekansının iki katı ve yüksekliği  $\Delta t$  olan dikdörtgen fonksiyon ile çarpmak yeterlidir:

$$B_{HT}(f) = \Delta t \cdot \text{rect}(f_N) H_{HT}(f),$$



Şekil 10.3.1. Birim değerli sabitten alçak-geçişli tanjant hiperbolik süzgecin çıkarılması ile yüksek-geçişli süzgecin oluşturulması. Kesme frekansı ( $f_H$ ) 20 Hz ve geçiş bölgesi yarı genişliği 5 Hz'dir.



Şekil 10.3.2. Yüksek-geçişli tanjant hiperbolik süzgeç izgesi ( $f_H=20$  Hz,  $r_H=5$  Hz,  $f_N=50$  Hz,  $\Delta t=0.01$  sn). Şekil 10.3.1c'de verilen süzgeç belirtkeni ile dikdörtgen fonksiyonun çarpımından elde edilmiştir. Dikdörtgen fonksiyonun yüksekliği örnekleme aralığına, genişliği ise Nyquist frekansının iki katına eşittir.

$$B_{HT}(f) = \Delta t \cdot \text{rect}(f_N) - \frac{\Delta t \cdot \text{rect}(f_N)}{2} \left\{ \tanh \left[ \frac{2(f + f_H)}{r_H} \right] - \tanh \left[ \frac{2(f - f_H)}{r_H} \right] \right\}, \quad (10.3.2a)$$

$$B_{HT}(f) = \Delta t \cdot \text{rect}(f_N) - \frac{\Delta t \cdot \text{rect}(f_N)}{2} \left\{ \tanh \left[ \frac{\pi(f + f_H)}{2a_H f_H} \right] - \tanh \left[ \frac{\pi(f - f_H)}{2a_H f_H} \right] \right\}. \quad (10.3.2b)$$

Kesme frekansının ( $f_H$ ) Nyquist frekansından küçük olması gerektiğinden, (9.2.6a) gereğince,

$$B_{HT}(f) = \Delta t \cdot \text{rect}(f_N) - \frac{\Delta t}{2} \left\{ \tanh \left[ \frac{2(f + f_H)}{r_H} \right] - \tanh \left[ \frac{2(f - f_H)}{r_H} \right] \right\}, \quad (10.3.3a)$$

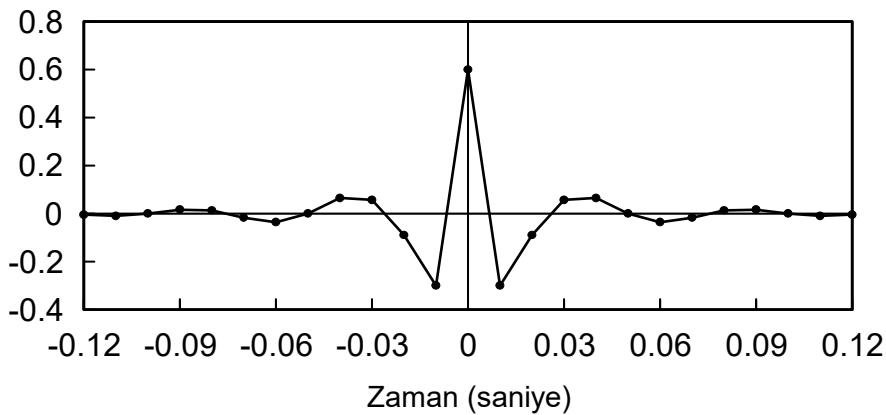
$$B_{HT}(f) = \Delta t \cdot \text{rect}(f_N) - \frac{\Delta t}{2} \left\{ \tanh \left[ \frac{\pi(f + f_H)}{2a_H f_H} \right] - \tanh \left[ \frac{\pi(f - f_H)}{2a_H f_H} \right] \right\}. \quad (10.3.3b)$$

yazılabilir. Süzgeç izgesinin elde edilmesi Şekil 10.3.2'de görüntülenmiştir. Bu bağıntılardan, yüksek-geçişli süzgeç izgesinin dikdörtgen fonksiyonundan kesme frekansı  $f_H$  olan alçak-geçişli bir süzgecin çıkarılması ile elde edilebileceği görülebilir. Süzgeç katsayılarını veren bağıntı, (10.3.3) ile tanımlanan süzgeç izgelerinin ters Fourier dönüşümünden bulunabilir:

$$b_H(t) = \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} - \frac{\pi r_H}{4f_N} \frac{\sin(2\pi f_H t)}{\sinh(\pi^2 r_H t / 2)}, \quad (10.3.4a)$$

$$b_{HT}(t) = \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} - a_H \frac{f_H}{f_N} \frac{\sin(2\pi f_H t)}{\sinh(2\pi a_H f_H t)}. \quad (10.3.4b)$$

Şekil 10.3.3'de kesme frekansı 20 Hz, geçiş bölgesi genişliği 10 Hz (15-25 Hz arası) olan yüksek-geçişli tanjant hiperbolik süzgeç katsayıları görüntülenmiştir.



Şekil 10.3.3. Yüksek-geçişli tanjant hiperbolik (25 adet) süzgeç katsayıları ( $f_H=20$  Hz,  $f_N=50$  Hz ve  $\Delta t=0.01$  sn).

Süzgeç katsayılarının hesaplanmasında, zaman değerleri olarak örnekleme aralığının tam katları kullanılır ( $t = n \cdot \Delta t$ ). (10.3.4) bağıntılarının ilk teriminde Nyquist frekansı yerine  $1/(2\Delta t)$  yazılabileceğinden, sinüs fonksiyonunun içeriği  $\pi$  değerinin tam katlarına eşit olur ve sıfır zamanı dışında, bu terimin değeri her zaman sıfırdır:

$$b_H(t) = -\frac{\pi r_H}{4f_N} \frac{\sin(2\pi f_H t)}{\sinh(\pi^2 r_H t / 2)}, \quad (10.3.5a)$$

$$b_{HT}(t) = -a_H \frac{f_H}{f_N} \frac{\sin(2\pi f_H t)}{\sinh(2\pi a_H f_H t)} \quad t = \mp n \cdot \Delta t; n \neq 0. \quad (10.3.5b)$$

Sıfır frekansındaki değer ise (10.3.5) bağıntısının  $t=0$  değerindeki limiti ile bulunabilir:

$$b_{HT}(0) = 1 - f_H / f_N. \quad (10.3.6)$$

#### 10.4. BANT-DURDURUCU TANJANT HİPERBOLİK SÜZGEÇLER

Bir bant-durdurucu süzgecin  $f_L$  ile  $f_H$  arasındaki genlikleri bastırması gerektiğinden bir alçak-geçişli süzgeç ile bir yüksek-geçişli süzgecin toplamından oluşturulabilir. Çünkü bir alçak-geçişli süzgeç sıfır frekansı ile  $f_L$  arasındaki, yüksek-geçişli süzgeç ise  $f_H$  frekansından büyük frekanslı olayları geçirirler. Böylece bant-durdurucu süzgeç belirtkeni (10.1.3) ve (10.3.1a) bağıntılarının toplamları ile

$$H_{DT}(f) = H_{HT}(f) + H_{LT}(f),$$

$$H_{DT}(f) = 1 + \frac{1}{2} \left\{ \tanh \left[ \frac{2(f + f_L)}{r_L} \right] - \tanh \left[ \frac{2(f - f_L)}{r_L} \right] - \tanh \left[ \frac{2(f + f_H)}{r_H} \right] + \tanh \left[ \frac{2(f - f_H)}{r_H} \right] \right\} \quad (10.4.1a)$$

ve yuvarlatma katsayılarının kullanımı ile (10.1.13) ve (10.3.1b) bağıntıların toplamından,

$$H_{DT}(f) = 1 + \frac{1}{2} \left\{ \tanh \left[ \frac{\pi(f + f_L)}{2a_L f_L} \right] - \tanh \left[ \frac{\pi(f - f_L)}{2a_L f_L} \right] - \tanh \left[ \frac{\pi(f + f_H)}{2a_H f_H} \right] + \tanh \left[ \frac{\pi(f - f_H)}{2a_H f_H} \right] \right\} \quad (10.4.1b)$$

elde edilebilir (Başokur, 1998; 2011). Burada,  $a_L$  katsayısı alçak geçiş,  $a_H$  katsayısı ise yüksek geçiş bölgesindeki eğimi denetler. Şekil 10.4.1'de görülen süzgeç izgesi ise süzgeç belirtkeni ile genişliği Nyquist frekansının iki katı ve yüksekliği  $\Delta t$  olan dikdörtgen fonksiyon ile çarpımından elde edilmiştir. Kesme frekansları  $f_L$  ve  $f_H$ , Nyquist frekansından küçük olmak zorunda olduğundan, (9.2.6a) gereğince,

$$B_{DT}(f) = \Delta t \cdot \text{rect}(f_N) \cdot H_{DT}(f),$$

$$B_{DT}(f) = \Delta t \cdot \text{rect}(f_N) + \frac{\Delta t}{2} \left\{ \begin{array}{l} \tanh \left[ \frac{2(f + f_L)}{r_L} \right] - \tanh \left[ \frac{2(f - f_L)}{r_L} \right] \\ - \tanh \left[ \frac{2(f + f_H)}{r_H} \right] + \tanh \left[ \frac{2(f - f_H)}{r_H} \right] \end{array} \right\}, \quad (10.4.2a)$$

$$B_{DT}(f) = \Delta t \cdot \text{rect}(f_N) + \frac{\Delta t}{2} \left\{ \begin{array}{l} \tanh \left[ \frac{\pi (f + f_L)}{2a_L f_L} \right] - \tanh \left[ \frac{\pi (f - f_L)}{2a_L f_L} \right] \\ - \tanh \left[ \frac{\pi (f + f_H)}{2a_H f_H} \right] + \tanh \left[ \frac{\pi (f - f_H)}{2a_H f_H} \right] \end{array} \right\}. \quad (10.4.2b)$$

yazılabilir. (10.4.2a) bağıntısının ters Fourier dönüşümü ile veya (10.1.15a) ile (10.3.5a) bağıntılarının toplamından süzgeç katsayılarını veren bağıntı elde edilebilir:

$$b_{DT}(n \cdot \Delta t) = \frac{\pi}{4f_N} \left[ \frac{r_L \sin(2\pi f_L t)}{\sinh(\pi^2 r_L t / 2)} - \frac{r_H \sin(2\pi f_H t)}{\sinh(\pi^2 r_H t / 2)} \right]. \quad (10.4.3a)$$

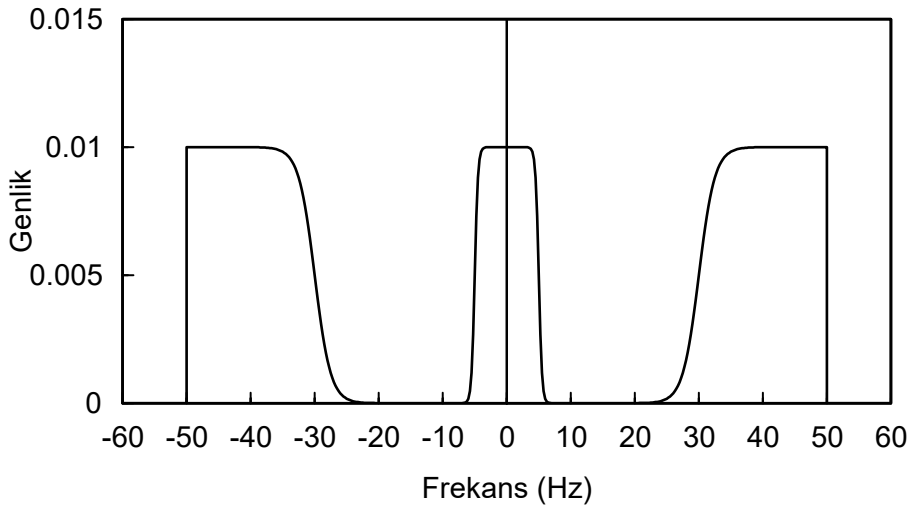
Benzer olarak, (10.4.2b) bağıntısının ters Fourier dönüşümü ile veya (10.1.15b) ile (10.3.5b) bağıntılarının toplamından yuvarlatma katsayısı kullanan bir bağıntı türetilebilir:

$$b_{DT}(n \cdot \Delta t) = a_L \frac{f_L}{f_N} \frac{\sin(2\pi f_L t)}{\sinh(2\pi a_L f_L t)} - a_H \frac{f_H}{f_N} \frac{\sin(2\pi f_H t)}{\sinh(2\pi a_H f_H t)} \quad t = \mp n \cdot \Delta t \quad n \neq 0. \quad (10.4.3b)$$

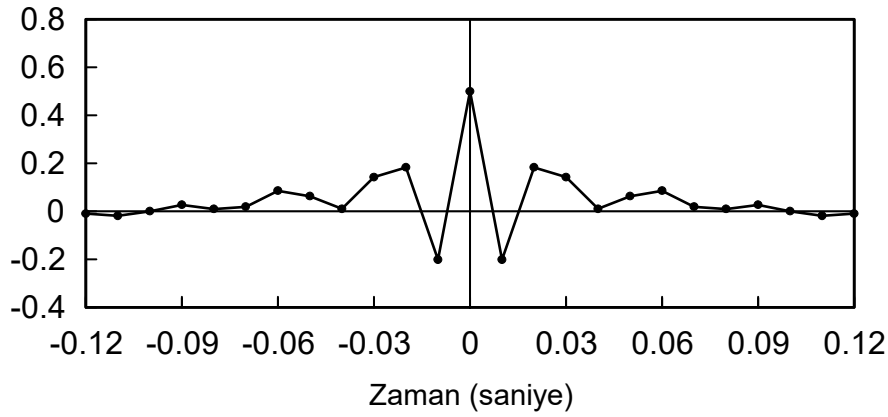
Zamanın sıfır değeri için (10.1.17) ve (10.3.6) alçak ve yüksek-geçişli süzgeç katsayılarının limit değerlerinin toplamından, izleyen sonuç elde edilir:

$$b_{DT}(0) = \frac{f_L}{f_N} + 1 - \frac{f_H}{f_N} = 1 - \frac{f_H - f_L}{f_N}. \quad (10.4.4)$$

Şekil 10.4.1'de alçak kesme frekansı 5 Hz, geçiş bölgesi yarı genişliği 1 Hz (4-6 Hz arası) ve yüksek kesme frekansı 30 Hz, geçiş bölgesi yarı genişliği 5 Hz (30-35 Hz arası) olan bant-durdurucu tanjant hiperbolik süzgeç izgesi görüntülenmiştir. Nyquist frekansı 50 Hz değerindedir. Şekil 10.4.2'de ise zaman bölgesinde 25 adet katsayıdan oluşan süzgeç katsayıları görüntülenmiştir.



Şekil 10.4.1. Bant-durdurucu tanjant hiperbolik süzgeç izgesi ( $f_L = 5$  Hz,  $r_L = 1$  Hz,  $f_H = 30$  Hz,  $r_H = 5$  Hz,  $f_N = 50$  Hz). Süzgeç izgesinin yüksekliği örnekleme aralığına eşittir ( $\Delta t = 0.01$  sn).



Şekil 10.4.2. Bant-durdurucu 25 katsayılı tanjant hiperbolik süzgeç. ( $f_L = 5$  Hz,  $r_L = 1$  Hz,  $f_H = 30$  Hz,  $r_H = 5$  Hz,  $f_N = 50$  Hz  $\Delta t = 0.01$  sn).

### 10.5. ORMSBY SÜZGEÇİ

**Ormsby süzgeci**, frekansları  $f_1$  frekansından küçük olan olayları geçiren,  $f_1$  frekansından,  $f_2$  frekansına kadar olan olayların genliklerini doğrusal azaltarak,  $f_2$  frekansında sıfır yapan bir süzgeçtir (Şekil 10.5.1).  $0-f_1$  aralığı geçirme,  $f_1-f_2$  aralığı geçiş ve  $f_2$  frekansından büyük frekanslar durdurma bantlarına karşılık gelir. Bu süzgecin belirtkeni bir eşkenar yamuğa eşittir. Eşkenar yamuk ise bir dikdörtgen fonksiyonunun, iki yanına eklenmiş iki adet dik üçgen ile oluşturulabilir. Eğer, dikdörtgen fonksiyonu,  $-f_1$ ;  $+f_1$  frekans aralığında tanımlı ve  $f_L$  kesme frekansı  $f_1$  ve  $f_2$  frekanslarının toplamının yarısına eşit ise izleyen bağıntılar geçerli olacaktır:

$$f_L = (f_1 + f_2) / 2 = f_1 + L / 2 = f_2 - L / 2 ,$$

$$f_1 = f_L - L / 2 .$$

Dikdörtgen fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü:

$$\sin(2\pi f_1 t) / \pi t \leftrightarrow \text{rect}(f_1) \quad (10.5.1)$$

bağıntısı ile verilir. İkinci adım olarak, Bölüm 2'de verilen sol ve sağ yönlü dik üçgen fonksiyonlarının tanımlarından yararlanılarak, birim yüksekliğinde ve  $L$  genişliğinde yani  $-L/2$ ;  $+L/2$  aralığında tanımlı,

$$C_{SL}(f) = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{f}{L} \right\} \cdot \text{rect}(L/2) \quad (10.5.2)$$

$$C_{SG}(f) = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{f}{L} \right\} \cdot \text{rect}(L/2) \quad (10.5.3)$$

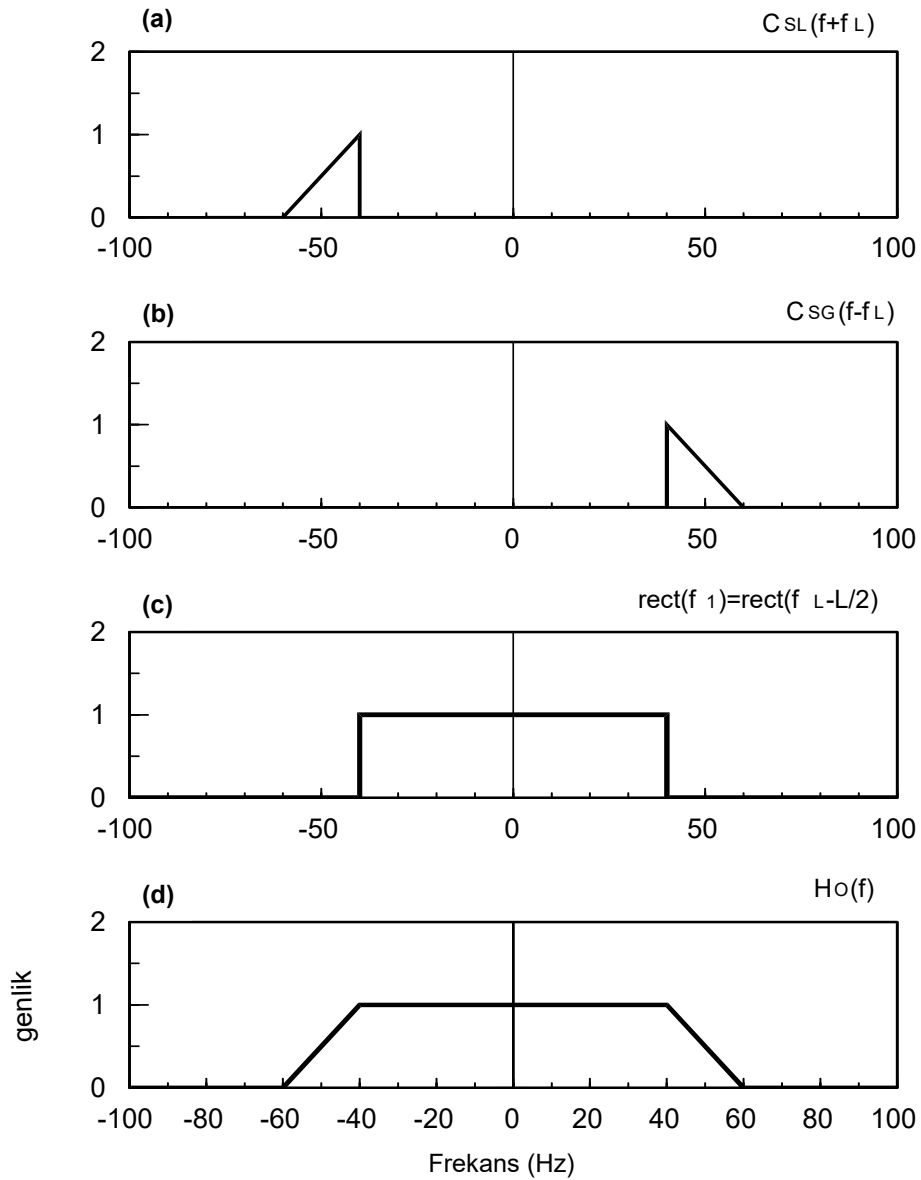
fonksiyonları elde edilebilir.  $C_{SL}(f)$  ve  $C_{SG}(f)$ , sırası ile kesme frekansı olarak adlandırılan  $-f_L$  ve  $f_L$  frekanslarına kaydırılır ise Şekil 10.5.1a ve 10.5.1b'de verilen fonksiyonlar elde edilir. (10.5.1) bağıntısı ile verilen dikdörtgen ve iki adet kaymış dik üçgenin toplanması ile bir adet eşkenar yamuk oluşturulur (Şekil 10.5.1d). Sonuç olarak, alçak-geçişli Ormsby süzgecinin belirtkeni, elde edilen eşkenar yamuğa eşittir ve izleyen şekilde tanımlanır:

$$H_{LO}(f) = C_{SL}(f + f_L) + \text{rect}(f / f_1) + C_{SG}(f - f_L). \quad (10.5.5)$$

Burada,  $L$  geçiş bölgesinin uzunluğuna eşittir. Dikdörtgen ve sol-yönlü dik üçgen fonksiyonlarının  $-f_1$  frekansındaki değerleri  $1/2$  olduğundan, bunların toplanması ile birim değer elde edilir. Benzer olarak, dikdörtgen ve sağ-yönlü dik üçgen fonksiyonlarının  $f_1$  frekansındaki değerlerinin toplanmasından da birim değeri elde edilir.  $-f_L$  ve  $f_L$  frekanslarında ise süzgeç belirtkeninin değeri  $1/2$  değerine eşittir. Süzgeç belirtkeni Şekil 10.5.1'de görülmektedir. Nyquist frekansı  $f_1$ ,  $f_2$  ve  $f_L$  frekanslarından büyük olduğundan, süzgeç belirtkeninin örnekleme aralığı ile çarpımı süzgeç izgesinin verir:

$$B_{LO}(f) = H_{LO}(f) \cdot \Delta t \cdot \text{rect}(f_N) = \Delta t \cdot H_{LO}(f),$$

$$B_{LO}(f) = \Delta t \cdot \left[ C_{SL}(f + f_L) + \text{rect}\left(\frac{f}{f_1}\right) + C_{SG}(f - f_L) \right]. \quad (10.5.6)$$



Şekil 10.5.1. Eşkenar yamuk ile Ormsby süzgeç belirtkeninin oluşturulması ( $f_1=40$ ,  $f_L=50$ ,  $f_2=60$  ve  $r_L=L/2=10$  Hz).

Süzgeç fonksiyonu, süzgeç belirtkeninin ters Fourier dönüşümünden bulunabilir. Eşkenar yamuk penceresi Bölüm 7'de törpüleme amacı için kullanılmış ve Fourier dönüşümü tanımlanmıştır. Daha önce elde edilen (7.5.5) ve (7.5.7) dönüşüm çiftlerinden yararlanılarak, (10.5.5) bağıntısının ters Fourier dönüşümü

$$h_{LO}(t) = \sin(2\pi f_L t) \frac{\sin(\pi L t)}{\pi^2 L t^2} \quad (10.5.7)$$

olarak tanımlanabilir. Eğer, geçiş-bandı yarı genişliği kullanılmak istenir ise  $L = 2r_L$  olduğundan, izleyen sonuç yazılabilir:

$$h_{LO}(t) = \sin(2\pi f_L t) \frac{\sin(2\pi r_L t)}{2\pi^2 r_L t^2} \quad (10.5.8)$$

Şekil 10.5.2'de süzgeç fonksiyonu görülmektedir. Ormsby süzgeç fonksiyonunun salınımlarının, ideal alçak-geçişli süzgecin salınımlarından daha çabuk söndüğü gözlenebilir. Sıfır zamanında süzgeç fonksiyonunun limitinden,

$$h_{LO}(0) = 2f_L \quad (10.5.9)$$

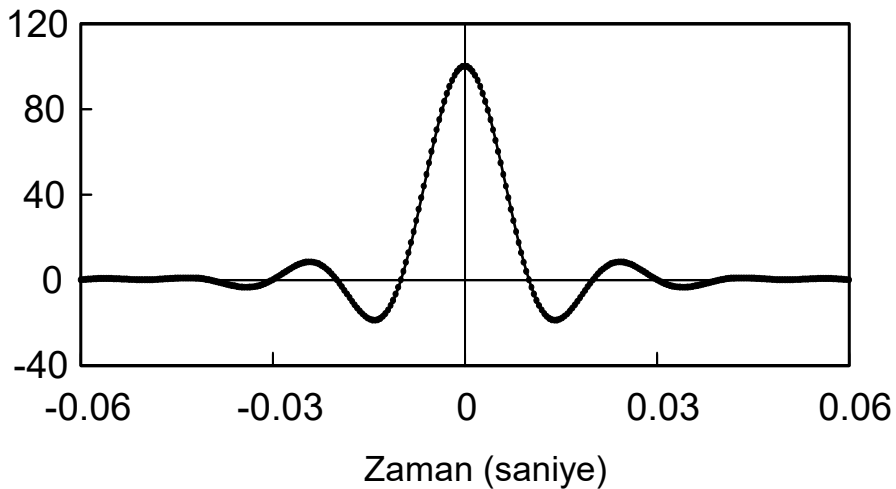
elde edilebilir. Eğer, geçiş bandı küçültülür ise  $f_1$  ve  $f_2$  frekansları,  $f_L$  frekansına yaklaşır. Küçük  $x$  değerleri için  $\sin(x) \approx x$  olduğundan (10.5.7) bağıntısından yararlanılarak, izleyen bağıntı yazılabilir ve Ormsby süzgecinin ideal süzgece yaklaştığı gösterilebilir:

$$\lim_{L \rightarrow 0} h_{LO}(t) = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\sin(2\pi f_L t)}{\pi t} \frac{\sin(\pi L t)}{\pi L t} = \frac{\sin(2\pi f_L t)}{\pi t}$$

Süzgeç katsayıları, (10.5.6) bağıntısının ters Fourier dönüşümünden

$$b_{LO}(t) = \Delta t * h(t) = \Delta t \cdot h(t)$$

olarak bulunabilir.



Şekil 10.5.2. Zaman bölgesinde Ormsby süzgeci ( $f_1 = 40$ ,  $f_L = 50$ ,  $f_2 = 60$  ve  $r_L = L/2 = 10$  Hz).



Örnekleme aralığı yerine Nyquist frekansı yazılarak, (10.5.7) denkleminde

$$b_{LO}(t) = \frac{\sin(2\pi f_L t) \cdot \sin(\pi L t)}{2\pi^2 f_N L t^2} \quad (10.5.10)$$

elde edilebilir. Sıfır frekansındaki süzgeç katsayısının değeri, diğer alçak-geçişli süzgeçlere benzer şekilde hesaplanabilir:

$$b_{LO}(0) = f_L / f_N . \quad (10.5.11)$$

Ormsby süzgecinden, süzgeç izgesi üçgen şeklinde olan bir süzgeç de türetilir. Eğer,  $f_1$  frekansı sıfır olur ise süzgeç izgesi de üçgen fonksiyonuna dönüşecektir. Bu durumda  $f_2 = L$  ve  $f_L = L / 2$  olduğundan, süzgeç katsayıları için izleyen bağıntı bulunabilir:

$$b_{LO}(t) = \frac{\sin^2(\pi L t)}{2\pi^2 f_N L t^2} . \quad (10.5.12)$$

## 10.6. BUTTERWORTH SÜZGEÇİ

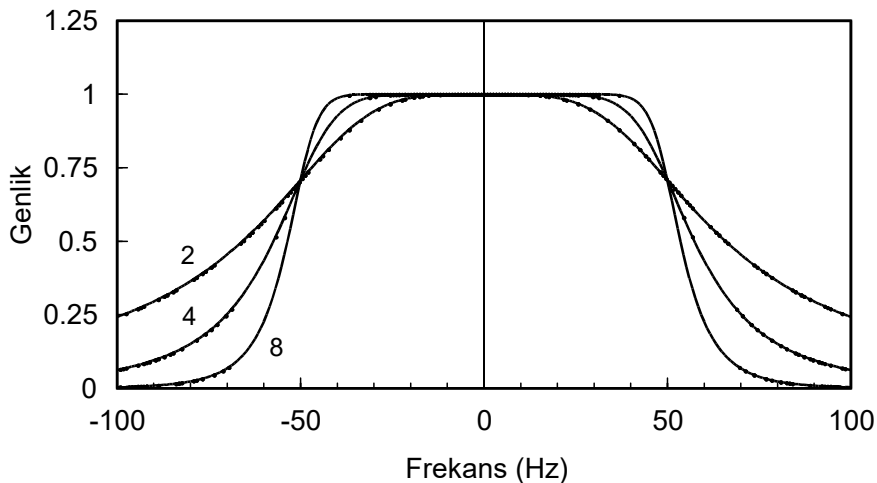
**Butterworth süzgecin** belirtkeni,  $f_L$  kesme frekansı ve  $n$  bir tamsayı olmak üzere izleyen bağıntı ile verilir:

$$H_{LB}(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + [f / f_L]^{2n}}} . \quad (10.6.1)$$

Kesme frekansında ( $f = f_L$  için) süzgeç belirtkeni,

$$H_{LB}(f_L) = 1 / \sqrt{2} = 0.707107$$

değerini alır. Şekil 10.6.1'de Butterworth süzgeç belirtkeni görülmektedir.  $n$  tamsayısının değerinin artması ile süzgeç belirtkeninin kesme frekansı civarındaki eğimi dikleşmektedir. Kesme frekansı Nyquist frekansından küçük olduğundan, süzgeç belirtkeninin örnekleme aralığı ile çarpımı süzgeç izgesini verir. Süzgeç katsayıları ise süzgeç izgesinden sayısal ters Fourier dönüşümü ile hesaplanabilir.



Şekil 10.6.1. Butterworth süzgeç belirtkeni ( $n=2, 4, 8, f_L=50$  Hz).

## 10.7. CHEBYSHEV SÜZGEÇİ

**Chebyshev süzgeçin** belirtkeni  $f_L$  kesme frekansı ve  $\varepsilon$  bir gerçel sayı olmak üzere izleyen bağıntı ile verilir:

$$H_{LC}(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cdot C_N^2(f/f_L)}} \quad (10.7.1)$$

$C_N(x)$ , Chebyshev polinomudur ve

$$C_0(x) = 1, \quad C_1(x) = x, \quad C_2(x) = 2x^2 - 1$$

olarak verilir. Daha yüksek dereceli polinom değerleri,

$$C_{N+1}(x) = 2x \cdot C_N(x) - C_{N-1}(x)$$

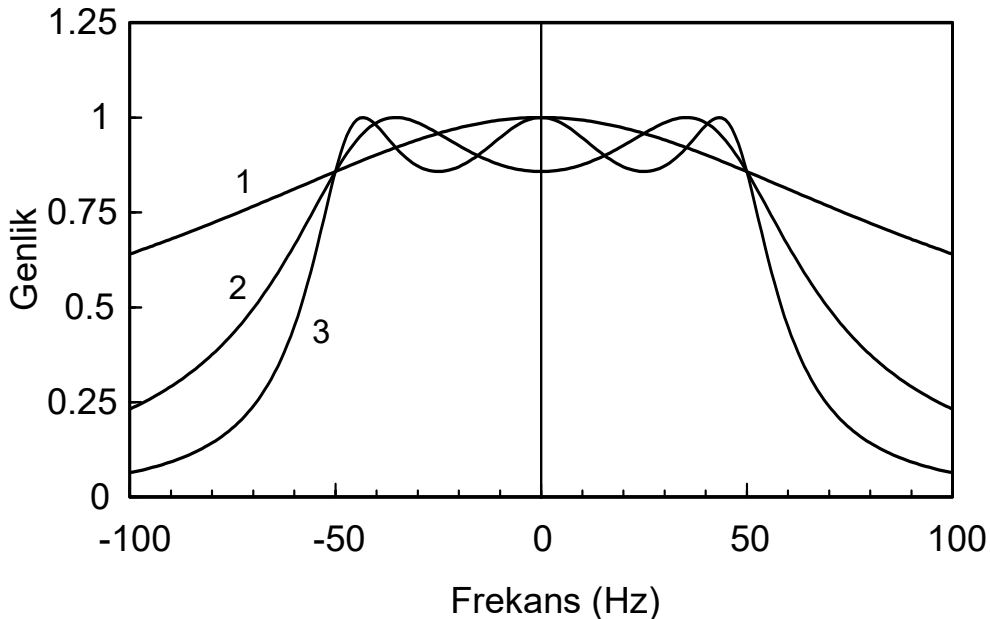
yineleme bağıntısından bulunabilir. Örneğin,  $N=2$  için,

$$C_3(x) = 2x \cdot C_2(x) - C_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$$

elde edilir. Şekil 10.7.1'de,  $\varepsilon = 0.6$  için (10.7.1) bağıntısında  $x = f / f_L$  yazılarak hesaplanan, birinci, ikinci ve üçüncü dereceden ( $N=1, 2$  ve  $3$ ) Chebyshev süzgeçleri görülmektedir. Frekans değeri, kesme frekansına eşit olduğunda ( $f = f_L$ ),  $x=1$  değerini alır. Bir için Chebyshev polinomunun değeri de bir olduğundan, süzgeç belirtkeninin kesme frekansındaki değeri için izleyen eşitlik yazılabilir:

$$H_{LC}(f_L) = 1 / \sqrt{1 + \varepsilon^2}.$$

$\varepsilon$  sabitinin değişimi ile süzgeç izgesinin kesme frekansındaki değeri denetlenebilir. Süzgeç katsayıları, süzgeç belirtkeninin örnekleme aralığı ile çarpımının sayısal ters Fourier dönüşümü ile bulunabilir.



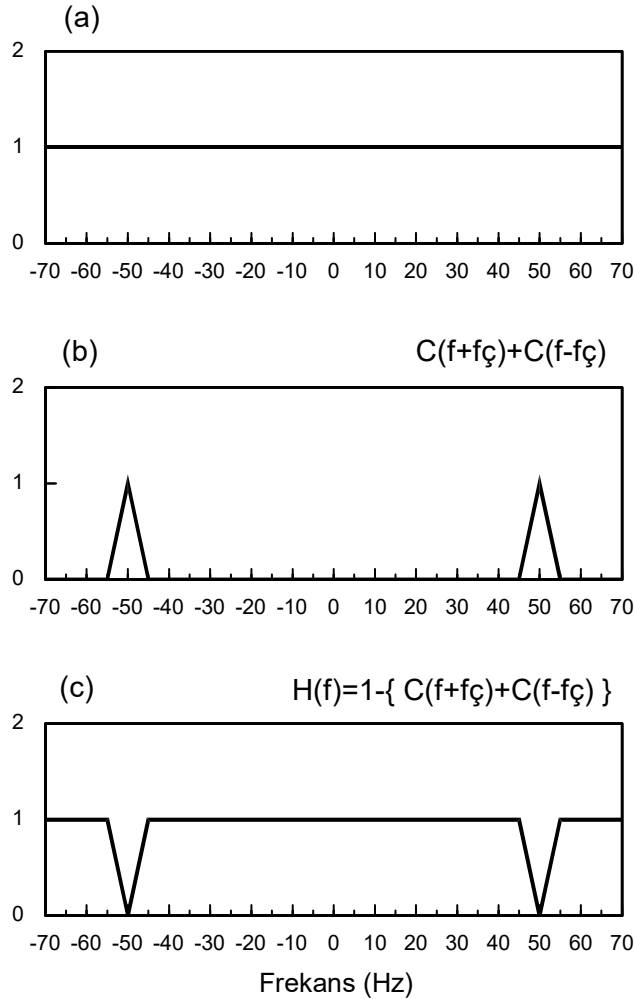
Şekil 10.7.1. Birinci, ikinci ve üçüncü dereceden alçak-geçişli Chebyshev süzgeçleri ( $f_L = 50$  Hz).

## 10.8. ÇENTİK SÜZGEÇ

**Çentik süzgeçler**, dar bir frekans aralığındaki olayları bastırmak amacı ile kullanılır ve bant-durdurucu süzgeçlerin bir türüdür. Örneğin, elektrik dağıtım şebekeleri ölçü aygıtlarında 50 Hz ve/veya yakın frekanslı gürültüler oluşturur. Bu gürültülerin frekans aralığı çok dar olduğundan, bir önceki bölümde verilen bant-durdurucu süzgeçler ile süzgeç düzenlenir ise dikdörtgen veya pencere fonksiyonlarının birbirine çok yakın olması gerekir. Sayısallaştırmadan kaynaklanan yanılığın göz önüne alındığında kurulacak süzgeç işlevini tam olarak yerine getiremeyebilir. Bu sorun, bastırma frekansı civarında süzgecin genlik izgesini birim değerden sıfıra indirgeyen bir fonksiyon kullanılarak çözülebilir. Burada, üçgen fonksiyonu ile çentik süzgeç tasarımına bir örnek verilecektir. Şekil 10.8.1'de, birim değerden, her biri  $2L$  genişliğinde ve birim yüksekliğinde iki adet kaymış üçgen fonksiyonunun çıkartılması ile süzgeç belirtkeninin elde edilmesi gösterilmiştir. Üçgen fonksiyonları,  $-50$  ve  $50$  Hz frekanslarına yerleştirilmiştir. Çentik süzgecin değerinin sıfır olduğu bastırma frekansı  $f_c$  ile gösterilir ise süzgeç belirtkeni için izleyen bağıntı yazılabilir:

$$H_c(f) = 1 - [C(f + f_c) + C(f - f_c)] \quad (10.8.1)$$

Şekil 10.8.1c'de üçgen fonksiyonunun yarı genişliği  $L=5$  olduğundan, süzgeç belirtkeni 50 Hz frekansında sıfır değerinde iken, doğrusal olarak artarak 45 ve 55 Hz frekanslarında birim değere erişmektedir. Buradan,  $L$  değerinin geçiş bölgesinin yarı uzunluğuna karşılık geldiği anlaşılabilir ( $r_c = L$ ).



Şekil 10.8.1. Birim değerden, iki adet kaymış üçgen fonksiyonunun çıkartılması ile çentik süzgeç belirtkeninin elde edilmesi ( $f_c = 50$  ve  $r_c = L = 5$  Hz).

Bölüm 4.4'de, (4.4.14) bağıntısı ile verilen üçgen fonksiyonunun Fourier dönüşümünden yararlanılarak, (10.8.1) bağıntısı ile verilen frekans bölgesindeki üçgen fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü,

$$c(t) = \frac{\sin(\pi L t)^2}{\pi^2 L t^2} = \frac{\sin(\pi r_\zeta t)^2}{\pi^2 r_\zeta t^2} \leftrightarrow C(f)$$

olarak yazılabilir. Fourier dönüşümünün kayma özelliğinden izleyen bağıntılar elde edilebilir:

$$c(t) \exp(-i2\pi f_\zeta t) + c(t) \exp(i2\pi f_\zeta t) \leftrightarrow C(f + f_\zeta) + C(f - f_\zeta),$$

$$2 c(t) \cos(2\pi f_\zeta t) \leftrightarrow C(f + f_\zeta) + C(f - f_\zeta). \quad (10.8.2)$$

Süzgeç fonksiyonu, süzgeç belirtkeninin ters Fourier dönüşümü olduğundan, (10.8.1) ve (10.8.2) bağıntılarından,

$$h_\zeta(t) = \delta(t) - 2 c \cos(2\pi f_\zeta t) \frac{\sin(\pi r_\zeta t)^2}{\pi^2 r_\zeta t^2} \leftrightarrow H_\zeta(f) = 1 - [C(f + f_\zeta) + C(f - f_\zeta)] \quad (10.8.3)$$

bulunur. Süzgeç izgesi, süzgeç belirtkeni ile dikdörtgen fonksiyonun çarpımına eşit olduğundan,

$$B_\zeta(f) = \Delta t \operatorname{rect}(f_N) \{1 - [C(f + f_\zeta) + C(f - f_\zeta)]\}$$

yazılabilir. Nyquist frekansı, bastırma frekansından büyük olduğundan,

$$B_\zeta(f) = \Delta t \operatorname{rect}(f_N) - \Delta t. [C(f + f_\zeta) + C(f - f_\zeta)] \quad (10.8.4)$$

elde edilir. Süzgeç katsayıları süzgeç izgesinin ters Fourier dönüşümünden

$$b_\zeta(t) = \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} - \cos(2\pi f_\zeta t) \frac{\sin(\pi r_\zeta t)^2}{\pi^2 r_\zeta f_N t^2} \quad (10.8.5)$$

olarak bulunabilir. Aynı sonuç, (10.8.3) bağıntısı ile verilen süzgeç fonksiyonu ile sinc fonksiyonunun evrişiminden de bulunabilir. Sıfır zamanındaki süzgeç katsayısının değerini bulabilmek için (10.8.5) izleyen şekilde yazılabilir:

$$b_\zeta(t) = \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} - \cos(2\pi f_\zeta t) \cdot \frac{r_\zeta}{f_N} \cdot \frac{\sin(\pi r_\zeta t)}{\pi r_\zeta t} \frac{\sin(\pi r_\zeta t)}{\pi r_\zeta t}.$$

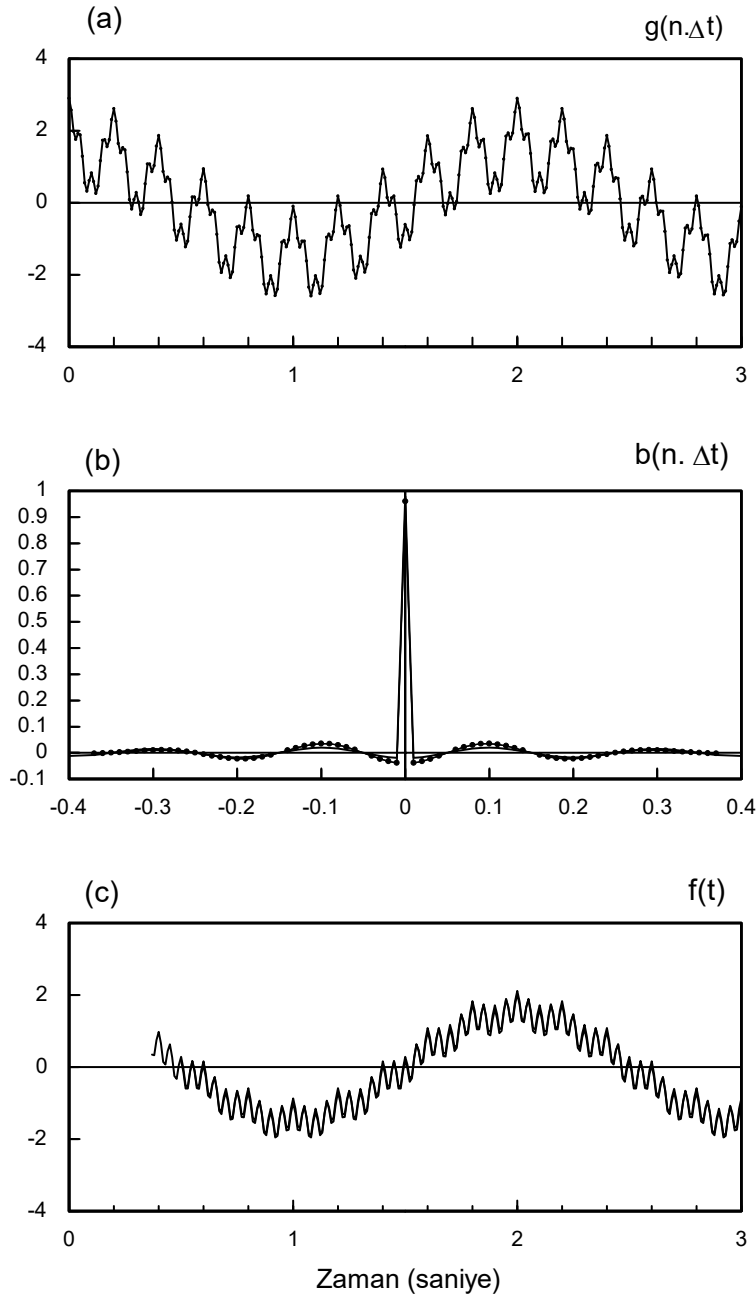
Sıfır için *sinc* biçimli fonksiyonların limiti bir olduğundan, sıfır zamanında süzgeç katsayısının değeri

$$b_\zeta(0) = 1 - r_\zeta / f_N \quad (10.8.6)$$

olarak elde edilir. Süzgeç katsayılarının hesaplanmasında, zaman değerleri olarak örnekleme aralığının tam katları kullanılır. Bu durumda, (10.8.5) bağıntısının ilk terimi, zamanın sıfır değeri alması dışında her zaman sıfıra eşittir:

$$b_{\zeta}(t) = -c \cos(2\pi f_{\zeta} t) \frac{\sin^2(\pi r_{\zeta} t)}{\pi^2 r_{\zeta} f_N t^2} \quad t = k \cdot \Delta t; \quad k \neq 0. \quad (10.8.7)$$

Evrişim sonucunda faz kayması oluşmaması için süzgeç katsayıları merkeze göre bakışimli ve dolayısı ile adedi tek sayı olmalıdır. Ayrıca, sıfır frekanslı olayların geçirilebilmesi için süzgeç katsayıları toplamı bir olmalıdır. Şekil 10.8.2'de çentik süzgeç uygulaması verilmiştir. Önceki bölümde, ideal süzgeç örneklerinde kullanılan sayısal veri Şekil 10.8.2a'da yeniden görüntülenmiştir.  $f_{\zeta} = 5$  Hz olmak üzere geçiş bölgesi 2 Hz uzunluğundaki 75 katsayılı bir çentik süzgeç Şekil 10.8.2b'de ve sayısal veri ile çentik süzgecin evrişimi ile elde edilen çıkış değerleri ise Şekil 10.8.2c'de verilmiştir. Frekansları 4-6 Hz arasında olan olayların bastırıldığı görülmektedir.



Şekil 10.8.2. Çentik süzgeç (b) ile sayısal verinin (a) süzgeçlenmesi. Çıkış (c) de görülmektedir. ( $\Delta t = 0.01$ ,  $f_N = 50$  Hz,  $f_{\zeta} = 5$  Hz, geçiş bölgesi yarı uzunluğu 1 Hz, 75 katsayı).

## 10.9. FREKANS BÖLGESİNDE SÜZGEÇLEME

Süzgeçleme işlemi zaman bölgesinde sayısal giriş verisi ve süzgeç katsayılarının evrişimi ile yürütülür. Sayısal Fourier ve ters Fourier dönüşümleri kullanımı ile frekans bölgesinde de süzgeçleme gerçekleştirilebilir. Bu amaç için önce sayısal zaman verisinin Fourier dönüşümü hesaplanır ve süzgeç belirtkeni ile çarpılır. Çarpım sonucunda frekans bölgesinde süzgeçlenmiş veri bulunur ve onun ters Fourier dönüşümü ile zaman bölgesine geri dönülebilir. Frekans bölgesinde süzgeçleme için süzgeç belirtkenini  $(-f_N; +f_N)$  aralığında hesaplamak yeterlidir. Çünkü süzgeç belirtkeninin  $\Delta t \cdot \text{rect}(f_N)$  ile çarpılarak süzgeç izgesinin hesaplanması işlemi örnekleme kuramının bir gereğidir.

Bölüm 7.7'de verilen standart Fourier dönüşümü bağıntıları kullanıldığında, hesaplanan izge değerlerinin frekans ekseninde sıfır frekansı ile Nyquist frekansının iki katı arasındaki aralığa karşılık geldiği gösterilmişti. Bu durumda, ya verinin izge değerlerini  $(-f_N; +f_N)$  aralığına taşımak ya da süzgeç belirtkenini  $0; +2f_N$  aralığında hesaplamak gerekir. İkinci seçenek ile daha yalın bir yazılım geliştirilebilir. Hızlı Fourier Dönüşümü ile süzgeçleme işlemine örnek vermek için sıfır fazlı ve  $A \cdot \cos(2\pi f_0 t)$  biçiminde üç adet sinüzoidalın toplamından oluşan bir zaman verisi kullanılacaktır. Sinüzoidallerin frekansları sırası ile 1, 5 ve 20 Hz ve genlikleri ise 3, 1 ve 1 birimdir. Ayrıca, sinüzoidale 2 sabiti eklenmiştir:

$$g(t) = 2 + 3 \cos(2\pi t) + \cos(10\pi t) + \cos(40\pi t). \quad (10.9.1)$$

Yukarıda verilen  $g(t)$  zaman verisinin Fourier dönüşümü,

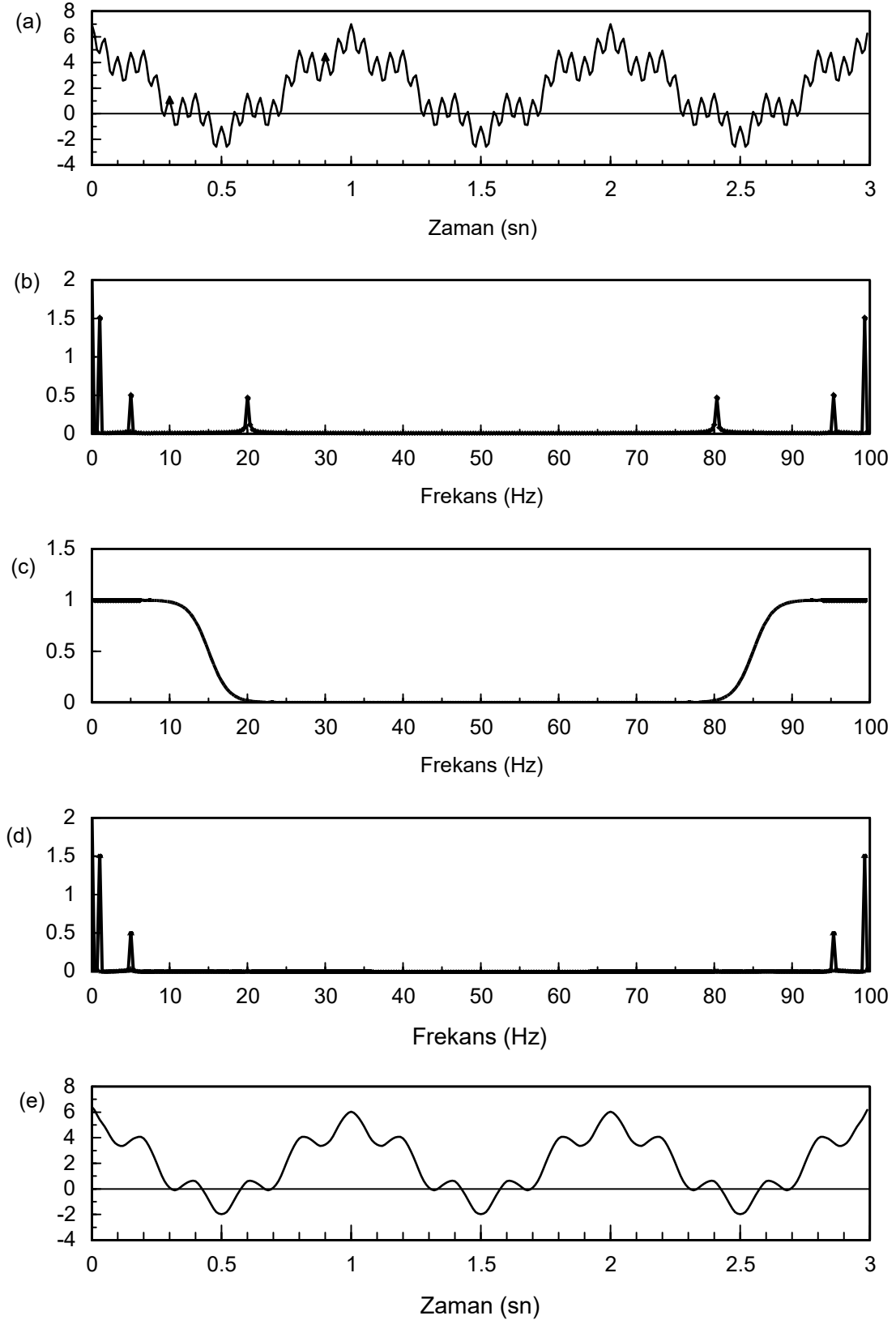
$$G(f) = 2\delta(f) + 1.5 \delta(f+1) + 1.5 \delta(f-1) + 0.5 \delta(f+5) + 0.5 \delta(f-5) + 0.5 \delta(f+20) + 0.5 \delta(f-20) \quad (10.9.2)$$

Şeklinde yazılabilir. Yukarıda tanımlanan  $g(t)$  sürekli verisi,  $\Delta t = 0.01$  sn aralıkları ile örneklenecek  $g_s(t)$  sayısal verisi elde edilmiş ve Şekil 10.9.1a'da verilmiştir. FFT uygulaması ile hesaplanan Fourier dönüşümü Şekil 10.9.1b'de  $(0; 2f_N)$  aralığında görüntülenmiştir. Bu frekans bölgesi verisine süzgeçleme uygulamak için  $(0; f_L)$  ve  $(2f_N - f_L; +2f_N)$  frekansları arasındaki olayları geçiren bir süzgeç düzenlenmelidir. Bu işlevi gerçekleştiren süzgeç belirtkeni, birim değerden kaymış bir tanjant hiperbolik pencerenin çıkarılması ile elde edilebilir. Bu pencerenin kesme frekansları  $f_L$  ve  $2f_N - f_L$  olarak verilir. Genişliği  $2f_N - 2f_L$  kadar ve merkezi  $f_N$  noktasındadır. Çıkarma işlemi sonucunda izleyen süzgeç belirtkeni elde edilir (Başokur, 2011):

$$H_{LT}(f) = 1 - \frac{1}{2} \tanh \left[ \frac{2(f - f_L)}{r_L} \right] + \frac{1}{2} \tanh \left[ \frac{2(f - 2f_N + f_L)}{r_L} \right]. \quad (10.9.3)$$

Şekil 10.9.1c'de (10.9.3) bağıntısından hesaplanan ve kesme frekansı 15 Hz ve geçiş bölgesi yarı uzunluğu 5 Hz olan alçak-geçişli tanjant hiperbolik süzgeç belirtkeni çizilmiştir. Frekans bölgesinde süzgeçleme işlemi, hesaplanan süzgeç belirtkeni ile giriş verisinin çarpımı ile gerçekleştirilecektir. Çarpım sonucu Şekil 10.9.1d'de gösterilmiştir. 10-15 Hz aralığındaki olaylar doğrusal olarak, frekansı 20 Hz frekansından büyük olaylar ise tamamen bastırılmıştır. Ters Fourier dönüşümü ile zaman bölgesine geri döndüğünde, hesaplanan sayısal veri de 20 Hz frekansından daha büyük frekanslı sinüzoidalleri içermeyecektir (Şekil 10.9.1e).

Sırası ile Şekil 10.9.1a ve Şekil 10.9.1b'de görüntülenen zaman verisi ve onun sayısal Fourier dönüşümü bant-geçişli süzgeçlemede kullanılmak üzere Şekil 10.9.2'de yeniden verilmiştir. Bant-geçişli süzgeçlemede alçak kesme frekansı ile yüksek kesme frekansı arasındaki olayların geçirilmesi istenildiğinden,  $(0; f_N)$  aralığında,  $(f_L; f_H)$  frekansları arasına bir tanjant hiperbolik



Şekil 10.9.1. (a) (10.9.1) bağıntısı ile tanımlanan ve üç sinüzoidal toplamından oluşan sayısal zaman verisi ( $\Delta t = 0.01$ ,  $f_N = 50$  Hz). (b) Zaman verisinin Fourier dönüşümü. (c) Kesme frekansı ( $f_L$  ve  $2f_N - f_L$ ) 15 ve 85 Hz ve geçiş bölgesi yarı uzunluğu ( $r_L$ ) 5 Hz olan alçak-geçişli tanjant hiperbolik süzgeç belirtkeni. (d) Giriş verisinin Fourier dönüşümü ile süzgeç belirtkeninin çarpımı. (e) Çarpım sonucunun ters Fourier dönüşümü ile zaman bölgesinde süzgeçlenmiş verinin elde edilmesi.

pencere ve bunun karşılığı olarak ( $f_N$ ;  $2f_N$ ) aralığında ise  $2f_N - f_L$  ve  $2f_N - f_H$  frekansları arasına ikinci bir tanjant hiperbolik pencere yerleştirilmelidir. Bu iki pencere kesme frekansları  $f_L$  ve  $2f_N - f_L$  olan bir tanjant hiperbolik pencereden, kesme frekansları  $f_H$  ve  $2f_N - f_H$  olan başka bir pencerenin çıkarılması ile elde edilebilir (Başokur, 2011):

$$H_{BT}(f) = \frac{1}{2} \left\{ \tanh \left[ \frac{2(f - f_L)}{r_L} \right] - \tanh \left[ \frac{2(f - 2f_N + f_L)}{r_L} \right] - \tanh \left[ \frac{2(f - f_H)}{r_H} \right] + \tanh \left[ \frac{2(f - 2f_N + f_H)}{r_H} \right] \right\}. \quad (10.9.4)$$

Şekil 10.9.2c'de yukarıdaki bağıntı ile hesaplanan süzgeç belirtkeni, alçak kesme frekansı ( $f_L$ ) 3 Hz, geçiş bölgesi yarı genişliği ( $r_L$ ) 1 Hz ve yüksek kesme frekansı ( $f_H$ ) 15 Hz, geçiş bölgesi yarı genişliği ( $r_H$ ) 5 Hz için görüntülenmiştir. Şekil 10.9.2d ve e'de ise sırası ile bant-geçişli tanjant hiperbolik süzgeç belirtkeni ile giriş verisinin çarpımı ve çarpım sonucunun ters Fourier dönüşümü ile zaman bölgesinde süzgeçlenmiş verinin elde edilmesi verilmiştir. Süzgecin işlevinden beklenildiği gibi 1 Hz ve 20 Hz frekanslarındaki bileşenler veriden temizlenerek, sadece 5 Hz frekanslı sinüzoidal geri kazanılmıştır.

Benzer olarak, Şekil 10.9.3c'de verilen yüksek-geçişli süzgeç belirtkeni kesme frekansları  $f_H$  ve  $2f_N - f_H$  olan bir tanjant hiperbolik penceresi ile kurulabilir. Bu pencere Nyquist frekansına göre bakışımıdır (Başokur, 2011):

$$H_{HT}(f) = \frac{1}{2} \left\{ \tanh \left[ \frac{2(f - f_H)}{r_H} \right] - \tanh \left[ \frac{2(f - 2f_N + f_H)}{r_H} \right] \right\}. \quad (10.9.5)$$

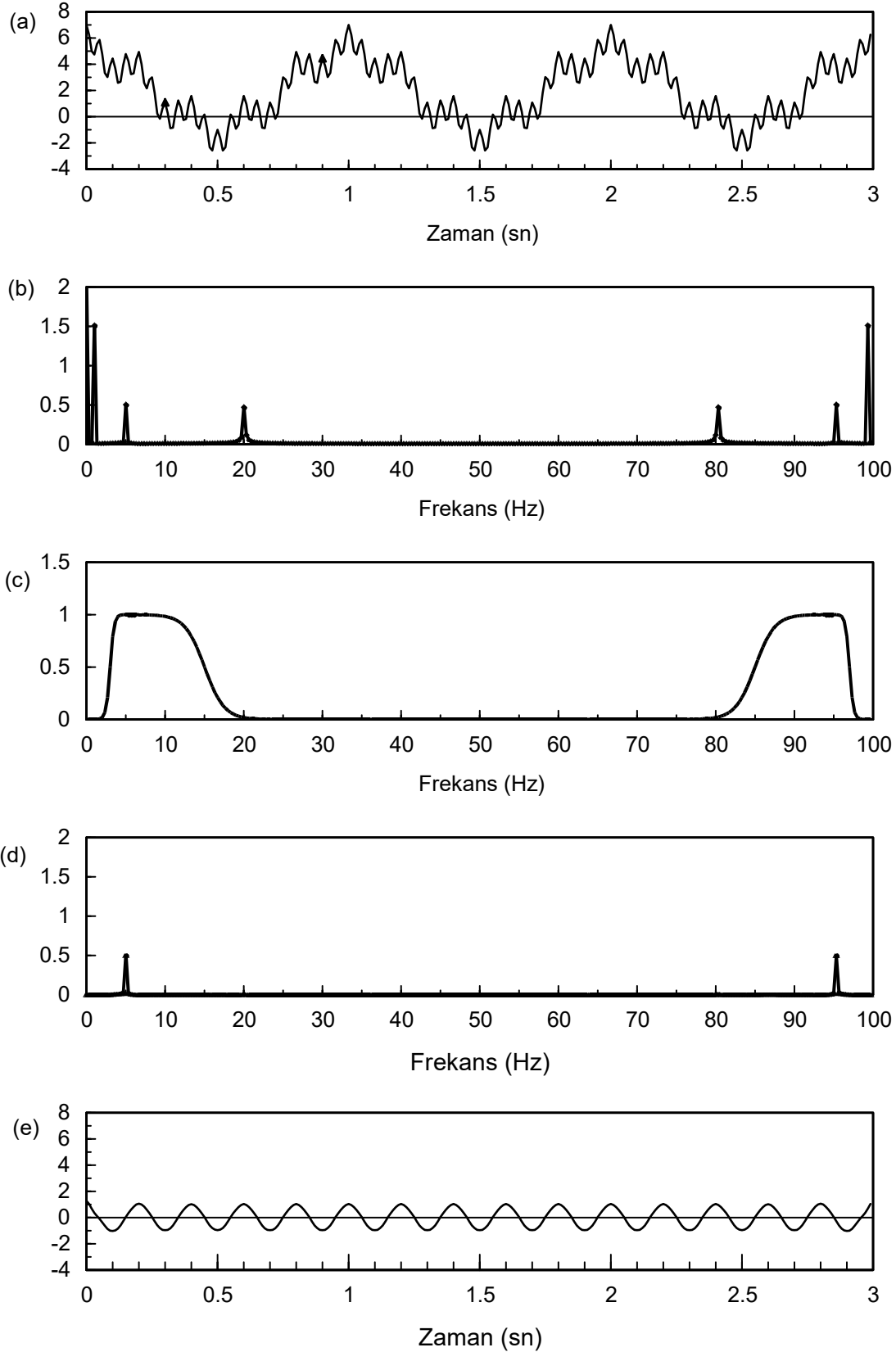
Şekil 10.9.3d ve e'de ise sırası ile yüksek-geçişli tanjant hiperbolik süzgeç belirtkeni ile giriş verisinin çarpımı ve çarpım sonucunun ters Fourier dönüşümü ile zaman bölgesinde süzgeçlenmiş verinin elde edilmesi verilmiştir. Yüksek-kesme frekansı 15 Hz ve geçiş bölgesi yarı uzunluğu 5 Hz alınmıştır. Süzgecin işlevinden beklenildiği gibi 1 Hz ve 5 Hz frekanslarındaki bileşenler veriden temizlenerek, sadece 20 Hz frekanslı sinüzoidal geri kazanılmıştır.

Bir bant-durdurucu süzgeç, alçak-geçişli ve yüksek geçişli iki süzgecin toplamından oluşturulduğundan, (10.9.3) ve (10.9.5) süzgeç belirtkeni bağıntılarının toplamı ile

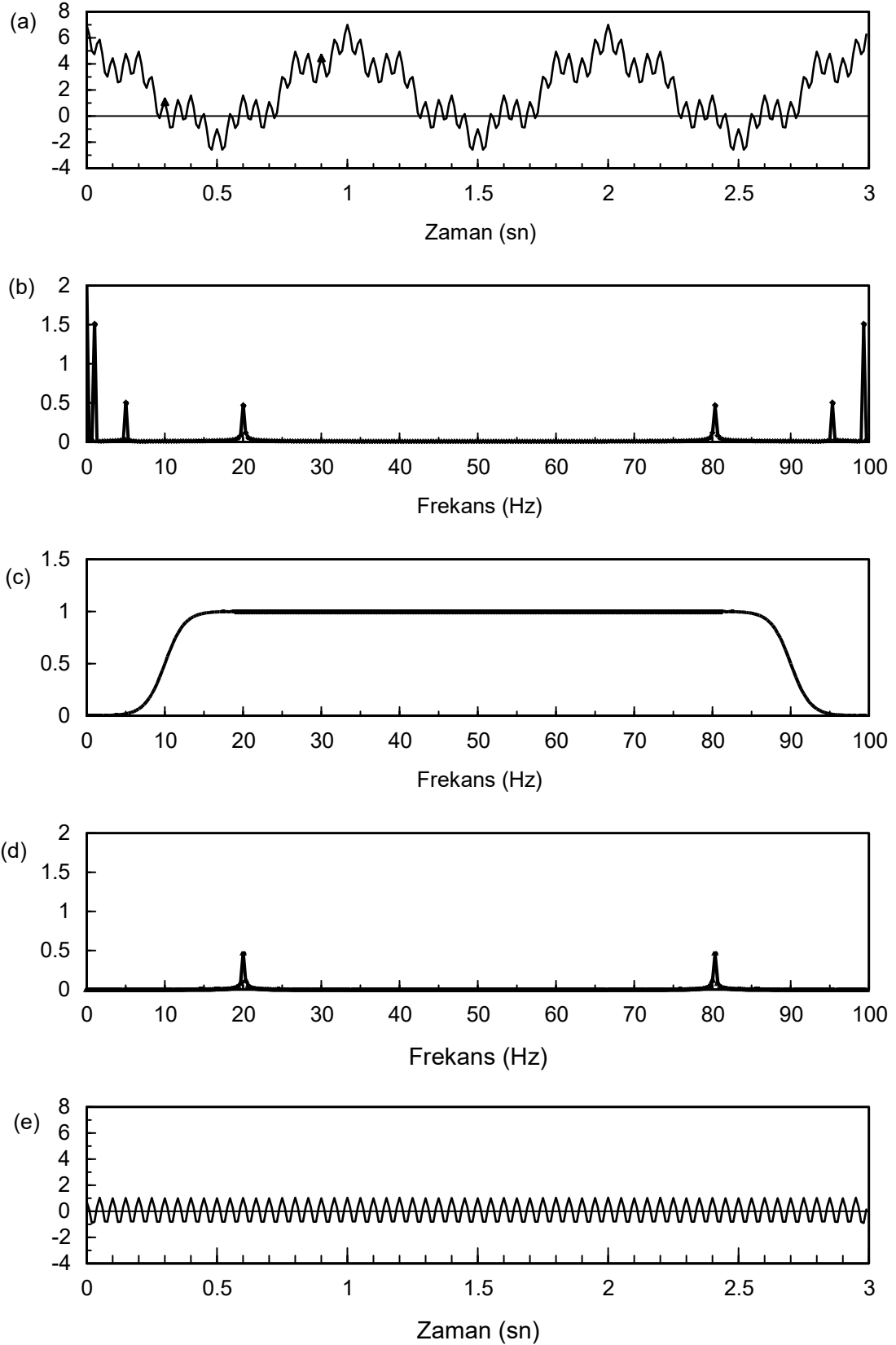
$$H_{DT}(f) = 1 - \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \tanh \left[ \frac{2(f - f_L)}{r_L} \right] - \tanh \left[ \frac{2(f - (2f_N - f_L))}{r_L} \right] \\ - \tanh \left[ \frac{2(f - f_H)}{r_H} \right] + \tanh \left[ \frac{2(f - 2f_N + f_H)}{r_H} \right] \end{array} \right\} \quad (10.9.6)$$

yazılabilir (Başokur, 2011). Şekil 10.9.4a ve b'de daha önceki örneklerde kullanılan  $\Delta t = 0.01$  sn aralığı ile örneklenmiş sayısal veri ve onun Fourier dönüşümü görülmektedir. Şekil 10.9.4c'de (10.9.6) bağıntısı ile alçak kesme frekansı ( $f_L$ ) 3 Hz, geçiş bölgesi yarı genişliği ( $r_L$ ) 1 Hz ve yüksek kesme frekansı ( $f_H$ ) 15 Hz, geçiş bölgesi yarı genişliği ( $r_H$ ) 5 Hz için hesaplanmış süzgeç belirtkeni görüntülenmiştir. Şekil 10.9.4d'de giriş verisinin Fourier dönüşümü ile bant-durdurucu süzgeç belirtkeninin çarpımı ve Şekil 10.9.4e'de ise çarpım sonucunun ters Fourier dönüşümü ile zaman bölgesinde süzgeçlenmiş verinin elde edilmesi işlemleri verilmiştir. Yukarıda verilen kesme frekansı değerlerine göre 4-10 Hz arası tamamen durdurulacağından giriş verisinde bulunan 5 Hz frekanslı sinüzoidal çıkış verisinden giderilmiştir.

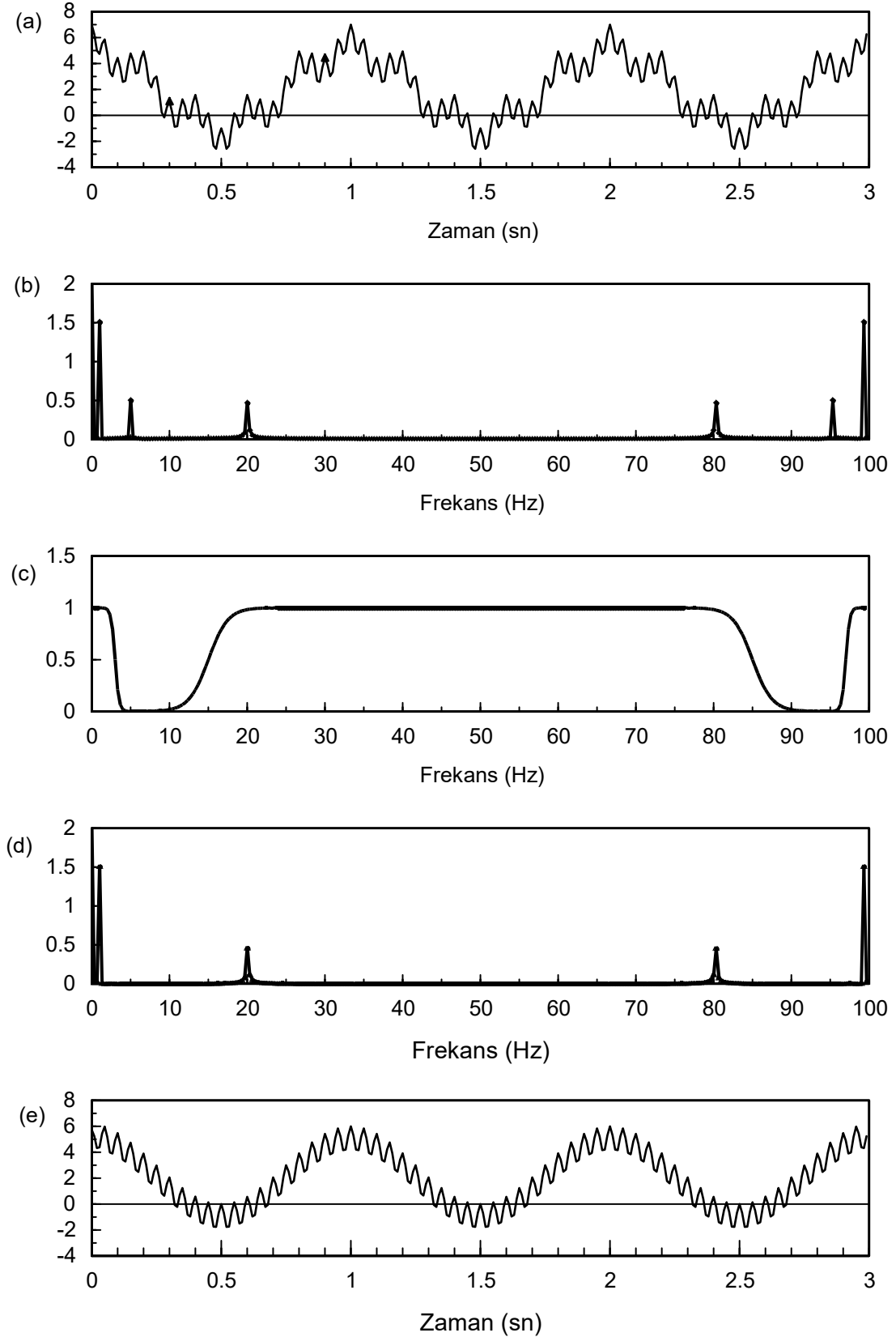




Şekil 10.9.2. (a) Sayısal zaman verisi ( $\Delta t = 0.01$ ) ve (b) Fourier dönüşümü ( $f_N = 50$  Hz). (c)  $f_L = 3$  Hz,  $r_L = 1$  Hz ve  $f_H = 15$  Hz,  $r_H = 5$  Hz olan bant-geçişli tanjant hiperbolik süzgeç belirtkeni. (d) Giriş verisinin Fourier dönüşümü ile süzgeç belirtkeninin çarpımı. (e) Çarpım sonucunun ters Fourier dönüşümü ile zaman bölgesinde süzgeçlenmiş verinin elde edilmesi.



Şekil 10.9.3. (a) Sayısal zaman verisi ( $\Delta t = 0.01$ ) ve (b) Fourier dönüşümü ( $f_N = 50$  Hz). (c)  $f_H = 10$  Hz,  $r_H = 5$  Hz olan yüksek-geçişli tanjant hiperbolik süzgeç belirtkeni. (d) Giriş verisinin Fourier dönüşümü ile süzgeç belirtkeninin çarpımı. (e) Çarpım sonucunun ters Fourier dönüşümü ile zaman bölgesinde süzgeçlenmiş verinin elde edilmesi.



Şekil 10.9.4. (a) Sayısal zaman verisi ( $\Delta t = 0.01$ ) ve (b) Fourier dönüşümü ( $f_N = 50$  Hz). (c)  $f_L = 3$  Hz,  $r_L = 1$  Hz ve  $f_H = 15$  Hz,  $r_H = 5$  Hz olan bant-durdurucu tanjant hiperbolik süzgeç belirtkeni. (d) giriş verisinin Fourier dönüşümü ile süzgeç belirtkeninin çarpımı. (e) Çarpım sonucunun ters Fourier dönüşümü ile zaman bölgesinde süzgeçlenmiş verinin elde edilmesi.