1. GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER VE ÇEŞİTLERİ

Tanım 1. a bir reel sayı ve f fonksiyonu her bir $t \geq a$ için $[a, t]$ aralığında integrallenebilir olsun.

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\, dx \tag{1}$$

ifadesinde f fonksiyonunun $[a, +\infty)$ aralığı üzerindeki birinci çeşit genelleştirilmiş integrali denir ve

$$\int_a^\infty f(x)\, dx \tag{2}$$

ile gösterilir. Eğer (1) deki limit varsa (2) integrali yakınsak, limit yoksa integral ıraksaktır denir.

f fonksiyonunun $(-\infty, b]$ ve $(-\infty, +\infty)$ aralıkları üzerindeki birinci çeşit genelleştirilmiş integralleri de benzer şekilde

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\, dx \tag{3}$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx + \int_c^\infty f(x)\, dx \tag{4}$$

biçiminde tanımlanır. Son ifadede ki c sayısı herhangi bir sabit sayıdır. (4) eşitliğinin sağındaki her iki integral yakınsak olması durumunda $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ integrali yakınsaktı. Buna göre

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^c f(x)\, dx + \lim_{t \to \infty} \int_c^s f(x)\, dx \tag{5}$$

olacaktır.

Tanım 2. f fonksiyonu $[a, b)$ aralığının her bir kapalı alt aralığı üzerinde integrallebilir ve

$\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ (veya $-\infty$) olsun. Bu taktirde $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ integraline ikinci çeşit genelleştirilmiş integral, b noktasına

da bu integralin bir singüler noktasıdır denir. Bu integralin değeri

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b^-} \int\limits_a^t f(x)\,dx$$

biçiminde tanımlanır. Son eşitlikte, sağdaki limit varsa soldaki integral yakınsaktır.

f fonksiyonu $(a,b]$ aralığının kapalı her bir alt aralığında integrallenebilir ve $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ (veya $-\infty$) oluyorsa, f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığı üzerindeki ikinci çeşit genelleştirilmiş integrali

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to a^+} \int\limits_a^t f(x)\,dx$$

biçiminde hesaplanır.

İntegralin singüler noktası, $[a,b]$ aralığının bir c iç noktası ise, $[a,b]$ aralığı üzerindeki ikinci çeşit genelleştirilmiş integral

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 3. Bir integral, hem birinci çeşit genelleştirilmiş integralin hem de ikinci çeşit genelleştirilmiş integralin özelliklerine sahipse, yani fonksiyon hem sınırsız bir aralık üzerinde tanımlı hem de bu aralığın en az bir noktası komşuluğunda sınırsız ise bu integrale üçüncü çeşit genelleştirilmiş integral denir.

Örnek 1. Aşağıdaki integrallerin çeşitlerini bulunuz.

a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x}(3x+5)}{1+\sin^2 x}dx$ **b)** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x+x^2}$ **c)** $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$

Çözüm.

a) $(-\infty, \infty)$ aralığında

$$f(x) = \frac{e^{-x}(3x+5)}{1+\sin^2 x}$$

ile tanımlı fonksiyon sürekli olup, bu aralığın her bir kapalı alt aralığında f fonksiyonu integrallenebilirdir. İntegrasyon aralığı sınırsız olduğunda, integral birinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

b) İntegrasyon aralığı sınırlıdır.

$$\frac{1}{x+x^2} = \frac{1}{x(x+1)}$$

olup

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x(x+1)} = \infty$$

olduğundan; $x = 0$ noktası singüler noktadır. Ancak $x = -1 \notin [0,1]$ olduğundan $x = -1$ singüler nokta değildir. Dolayısıyla verilen integral, ikinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

c) İntegrasyon aralığı sınırsız ve $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$ ile tanımlı fonksiyon $x = 1$ ve $x = 2$ noktalarında sınırsızdır. Buradan verilen integral, üçüncü çeşit genelleştirilmiş integraldir.

Birinci Çeşit Genelleştirilmiş İntegrallerin Çözümlenmesi

Her $t \geq a$ olmak üzere, $[a,t]$ aralığında f fonksiyony integrallenebilir olsun. Eğer

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

limiti sonlu olarak mevcut ise $\int_a^\infty f(x)\,dx$ genelleştirilmiş integrali yakınsaktır ve değeri $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$ şeklindedir.

Örnek 2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm. Verilen integral birinci çeşit genelleştirilmiş integral olup

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{1+x^2}dx &= \lim_{t\to\infty} \arctan x \,|_0^t \\
&= \lim_{t\to\infty}(\arctan t - \arctan 0) \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla verilen integral yakınsak ve değeri $\frac{\pi}{2}$' dir.

Örnek 3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2}dx$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm. Verilen integral birinici çeşit genelleştirilmiş integraldir. Buradan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1+x}{1+x^2}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2}dx$$

yazılabilir. $I_1 = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1+x}{1+x^2}dx$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{1+x}{1+x^2}dx &= \lim_{t\to-\infty}\int_0^t \frac{1+x}{1+x^2}dx \\
&= \lim_{t\to-\infty}\left(\int_0^t \frac{1}{1+x^2}dx + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{2x}{1+x^2}dx\right) \\
&= \lim_{t\to-\infty}\left(\arctan x \,|_0^t + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)|_0^t\right) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla I_1 integrali ıraksak olduğundan verilen integral ıraksaktır.

İkinci Çeşit Genelleştirilmiş İntegrallerin Çözümlenmesi

f fonksiyonu, $[a,b)$ aralığının her alt aralığında integrallenebilir fakat $x=b$ noktasında sınırsız olsun. Eğer

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

limiti sonlu olarak mevcut ise verilen integral yakısaktır, aksi taktirde ıraksaktır.

f fonksiyonu, $(a,b]$ aralığının her alt aralığında integrallenebilir fakat $x=a$ noktasında sınırsız olsun. Eğer

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

limiti sonlu olarak mevcut ise verilen integral yakısaktır, aksi taktirde ıraksaktır.

f fonksiyonu, $[a,b]$ aralığının bir c iç noktasında sınırsız kalıyorsa

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$$

olup sağdaki iki integral de yakınsak ise, soldaki integral yakınsak olur. Ancak sağdaki integrallerden en az biri ıraksak ise soldaki integral ıraksak olur.

Örnek 4. $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm. $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \infty$ olduğundan, integral ikinci çeşit genelleştirilmiş integraldir. Buradan

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \arcsin x \,\Big|_0^{1-\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0\right) \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla, verilen integral yakınsak ve değeri $\frac{\pi}{2}$' dir.

Üçüncü Çeşit Genelleştirilmiş İntegrallerin Çözümlenmesi

f fonksiyonu, $x = a$ noktasında sınırsız olsun. O halde, bu integral

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_a^{b} f(x)\,dx + \int_b^{\infty} f(x)\,dx$$

şeklinde olup birinci çeşit ve ikinci çeşit integral biçiminde yazılabilir. Dolayısıyla, birinci çeşit ve ikinci çeşit integral çözümlemesiyle üçüncü çeşit genelleştirilmiş integralin yakınsaklık durumu incelenebilir.

Örnek 5. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm. İntegrasyon aralığı sınırsız ve

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)} = \infty$$

olduğundan verilen integral üçüncü çeşit genelleştirilmiş integraldir. Buradan

$$I := \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} = \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$$

olup

$$I_1 := \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$$

ikinci çeşit genelleştirilmiş integrali ve

$$I_2 := \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$$

birinci çeşit genelleştirilmiş integralinin toplamı şeklinde yazılabilir. Şimdi bu integral değerlerini hesaplayalım. Buradan

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \left(2\arctan\sqrt{x}\ \big|_t^1\right) \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} \\
&= \lim_{t\to \infty} \int\limits_1^t \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} \\
&= \lim_{t\to \infty} \left(2\arctan\sqrt{x}\ \big|_1^t\right) \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

olup

$$
\begin{aligned}
I &= I_1 + I_2 \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

olduğundan I integrali yakınsan ve değeri π’ dir.