2.4.Tam Diferensiyel Denklemler

Tanım. $u = u(x,y)$ fonksiyonu $D \subset \mathbb{R}^2$ bölgesinde sürekli birinci basamaktan türevlere sahip bir fonksiyon olsun. $u = u(x,y)$ fonksiyonunun tam diferensiyeli her $(x,y) \in D$ için

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

ile tanımlanır.

Birinci basamaktan

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \tag{1}$$

diferensiyel denklemini ele alalım. $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ ifadesi bir tam diferensiyel ise (1) denklemine **tam diferensiyel denklem** denir. (1) denkleminin tam diferensiyel olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

olmasıdır. Denklem tam diferensiyel ise öyle bir $u = u(x,y)$ fonksiyonu vardır ki

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= P(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= Q(x,y) \end{aligned}$$

eşitlikleri gerçeklenir. Buradan tam diferensiyel denklemin genel çözümü c keyfi sabit olmak üzere $u(x,y) = c$ olarak bulunur.

Örnek 1. $(e^x \sin y - 2y \sin x)\,dx + (e^x \cos y + 2\cos x)\,dy = 0$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. $P(x,y) = e^x \sin y - 2y \sin x$ ve $Q(x,y) = e^x \cos y + 2\cos x$ olmak üzere

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = e^x \cos y - 2\sin x = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

olduğundan denklem tam diferensiyeldir. Öyle bir $u = u(x,y)$ fonksiyonu vardır ki

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y - 2y \sin x \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y + 2\cos x \tag{3}$$

eşitlikleri gerçeklenir. (2) den x'e göre integral alınırsa

$$u(x,y) = e^x \sin y + 2y \cos x + h(y) \tag{4}$$

elde edilir. (4) eşitliğinin y'ye göre türevi alınıp (3)'e eşitlenirse

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y + 2\cos x + h'(y) = e^x \cos y + 2\cos x$$

den $h'(y) = 0 \to h(y) = c_1$ olarak bulunur. Buradan tam diferensiyel denklemin genel çözümü $e^x \sin y + 2y\cos x = c$ olarak elde edilir.

Örnek 2. $2x\left(ye^{x^2} - 1\right)dx + e^{x^2}dy = 0$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. $P(x,y) = 2x\left(ye^{x^2} - 1\right)$ ve $Q(x,y) = e^{x^2}$ olmak üzere

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2xe^{x^2} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

sağlandığından denklem tam diferensiyeldir. Öyle bir $u = u(x,y)$ fonksiyonu vardır ki

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\left(ye^{x^2} - 1\right) \tag{5}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2} \tag{6}$$

eşitlikleri gerçeklenir. (5) dan x'e göre integral alınırsa

$$u(x,y) = ye^{x^2} - x^2 + h(y)$$

elde edilir. Buradan y'ye göre türev alınıp (6)'ye eşitlenirse $h(y) = c_1$ olarak bulunur. $u(x,y) = ye^{x^2} - x^2 + c_1$ olup tam diferensiyel denklemin genel çözümü c keyfi sabit olmak üzere

$$ye^{x^2} - x^2 = c$$

formunda elde edilir.

Örnek 3: $\left(1 + x^2\right)dy + (2xy - \tan x)\,dx = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$P(x,y) = 2xy - \tan x$ ve $Q(x,y) = 1 + x^2$ için $P_y = 2x = Q_x$ olduğundan denklem tamdır. Öyle bir $u(x,y)$ fonksiyonu vardır ki

$$\begin{aligned} u_x &= 2xy - \tan x \\ u_y &= 1 + x^2 \end{aligned}$$

denklemlerini sağlar. Böylece

$$\begin{aligned} u(x,y) &= y + x^2y + h(x) \\ &\Rightarrow u_x = 2xy + h'(x) = 2xy - \tan x \\ &\Rightarrow h'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} \\ &\Rightarrow h(x) = \ln(\cos x) + c_1 \end{aligned}$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
& u(x, y) = sabit \\
& \Rightarrow y + x^2 y + \ln(\cos x) = c
\end{aligned}
$$

bulunur.

2.4.Tam Diferensiyel Denklemler

Tanım. $u = u(x, y)$ fonksiyonu $D \subset \mathbb{R}^2$ bölgesinde sürekli birinci basamaktan türevlere sahip bir fonksiyon olsun. $u = u(x, y)$ fonksiyonunun tam diferensiyeli her $(x, y) \in D$ için

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

ile tanımlanır.

Birinci basamaktan

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0 \tag{1}$$

diferensiyel denklemini ele alalım. $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$ ifadesi bir tam diferensiyel ise (1) denklemine **tam diferensiyel denklem** denir. (1) denkleminin tam diferensiyel olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

olmasıdır. Denklem tam diferensiyel ise öyle bir $u = u(x, y)$ fonksiyonu vardır ki

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= P(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= Q(x, y) \end{aligned}$$

eşitlikleri gerçeklenir. Buradan tam diferensiyel denklemin genel çözümü c keyfi sabit olmak üzere $u(x, y) = c$ olarak bulunur.

Örnek 1. $(e^x \sin y - 2y \sin x)\, dx + (e^x \cos y + 2\cos x)\, dy = 0$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. $P(x, y) = e^x \sin y - 2y \sin x$ ve $Q(x, y) = e^x \cos y + 2\cos x$ olmak üzere

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = e^x \cos y - 2\sin x = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

olduğundan denklem tam diferensiyeldir. Öyle bir $u = u(x, y)$ fonksiyonu vardır ki

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y - 2y \sin x \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y + 2\cos x \tag{3}$$

eşitlikleri gerçeklenir. (2) den x'e göre integral alınırsa

$$u(x, y) = e^x \sin y + 2y \cos x + h(y) \tag{4}$$

elde edilir. (4) eşitliğinin y'ye göre türevi alınıp (3)'e eşitlenirse

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y + 2\cos x + h'(y) = e^x \cos y + 2\cos x$$

den $h'(y) = 0 \to h(y) = c_1$ olarak bulunur. Buradan tam diferensiyel denklemin genel çözümü $e^x \sin y + 2y\cos x = c$ olarak elde edilir.

Örnek 2. $2x\left(ye^{x^2} - 1\right)dx + e^{x^2}dy = 0$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. $P(x,y) = 2x\left(ye^{x^2} - 1\right)$ ve $Q(x,y) = e^{x^2}$ olmak üzere

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2xe^{x^2} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

sağlandığından denklem tam diferensiyeldir. Öyle bir $u = u(x,y)$ fonksiyonu vardır ki

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\left(ye^{x^2} - 1\right) \quad (5)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2} \quad (6)$$

eşitlikleri gerçeklenir. (5) dan x'e göre integral alınırsa

$$u(x,y) = ye^{x^2} - x^2 + h(y)$$

elde edilir. Buradan y'ye göre türev alınıp (6)'ye eşitlenirse $h(y) = c_1$ olarak bulunur. $u(x,y) = ye^{x^2} - x^2 + c_1$ olup tam diferensiyel denklemin genel çözümü c keyfi sabit olmak üzere

$$ye^{x^2} - x^2 = c$$

formunda elde edilir.

Örnek 3: $\left(1 + x^2\right)dy + (2xy - \tan x)\,dx = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$P(x,y) = 2xy - \tan x$ ve $Q(x,y) = 1 + x^2$ için $P_y = 2x = Q_x$ olduğundan denklem tamdır. Öyle bir $u(x,y)$ fonksiyonu vardır ki

$$\begin{aligned} u_x &= 2xy - \tan x \\ u_y &= 1 + x^2 \end{aligned}$$

denklemlerini sağlar. Böylece

$$\begin{aligned} u(x,y) &= y + x^2y + h(x) \\ &\Rightarrow u_x = 2xy + h'(x) = 2xy - \tan x \\ &\Rightarrow h'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} \\ &\Rightarrow h(x) = \ln(\cos x) + c_1 \end{aligned}$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
& u(x,y) = sabit \\
\Rightarrow\ & y + x^2 y + \ln(\cos x) = c
\end{aligned}
$$

bulunur.

2.5. İntegral Çarpanı

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

diferensiyel denklemi tam diferensiyel değil ancak $\lambda = \lambda(x,y)$ ile çarpıldığında denklem tam diferensiyel oluyorsa $\lambda = \lambda(x,y)$ fonksiyonuna bir integral çarpanı denir.

İntegral çarpanı için bazı özel durumlar aşağıdaki gibidir:

i) *Sadece x değişkenine bağlı integral çarpanı:*

$\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = g(x)$ oluyorsa diferensiyel denklem sadece x değişkenine bağlı

$$\lambda(x) = e^{\int g(x)dx}$$

formunda bir integral çarpanına sahiptir.

ii) *Sadece y değişkenine bağlı integral çarpanı:*

$\dfrac{P_y - Q_x}{-P} = g(y)$ oluyorsa diferensiyel denklem sadece y değişkenine bağlı

$$\lambda(y) = e^{\int g(y)dy}$$

formunda bir integral çarpanına sahiptir.

iii) *Sezgisel Yolla:*

Diferensiyel denklem aşağıdaki diferensiyel gruplarlar yardımıyla gerekli düzenlemelerden sonra tam diferensiyel forma dönüştürülebilir.

$$\begin{aligned}
\frac{xdy - ydx}{x^2} &= d\left(\frac{y}{x}\right) \\
\frac{ydx - xdy}{y^2} &= d\left(\frac{x}{y}\right) \\
\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} &= d\left(\arctan\frac{y}{x}\right) \\
\frac{xdy - ydx}{xy} &= d\left(\ln\frac{y}{x}\right) \\
ydx + xdy &= d(xy) \\
2xdx + 2ydy &= d\left(x^2 + y^2\right)
\end{aligned}$$

iv) $\dfrac{P_y - Q_x}{Qv_x - Pv_y} = g(v)$ ise denklem $\lambda = \lambda(v)$ formunda bir integral çarpanı vardır ve

$$\lambda(v) = e^{\int g(v)dv}$$

olarak bulunur.

Örnek 1. $2xydx + \left(y^2 - 3x^2\right)dy = 0$ diferensiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. $\dfrac{P_y - Q_x}{-P} = \dfrac{2x + 6x}{-2xy} = -\dfrac{4}{y}$ olup sadece y'ye bağlı

$$\lambda(y) = e^{-\int \frac{4}{y}dy} = \frac{1}{y^4}$$

formunda bir integral çarpanı vardır. Denklem $\lambda(y) = \frac{1}{y^4}$ ile çarpılırsa tam diferensiyel

$$\frac{2x}{y^3}dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right)dy = 0$$

denklemi elde edilir. Öyle bir $u = u(x, y)$ fonksiyonu vardır öyle ki

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{2x}{y^3} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4} \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu iki eşitlikten yararlanarak verilen denklemin genel çözümü

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = c$$

olarak bulunur.

Örnek 2. $\left(x^2 + 2y^2 + 1\right)dx + 2xydy = 0$ diferensiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. $\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = \dfrac{4y - 2y}{2xy} = \dfrac{1}{x}$ olup sadece x'ye bağlı

$$\lambda(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = x$$

formunda bir integral çarpanı vardır. Denklem $\lambda(x) = x$ ile çarpılırsa tam diferensiyel

$$\left(x^3 + 2xy^2 + x\right)dx + 2x^2ydy = 0$$

denklemi elde edilir. Öyle bir $u = u(x, y)$ fonksiyonu vardır öyle ki

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= x^3 + 2xy^2 + x \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 2x^2 y\end{aligned}$$

sağlanmalıdır. Bu iki eşitlikten $u(x, y) = \frac{x^4}{4} + x^2y^2 + \frac{x^2}{2} + c_1$ bulunur. Denklemin genel çözümü c keyfi sabit olmak üzere

$$\frac{x^4}{4} + x^2y^2 + \frac{x^2}{2} = c$$

formundadır.

Örnek 3. $x^2y^2dx + \left(x^3y - 3xy^2 + xy\right)dy = 0$ diferensiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. Sezgisel yolla gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}x^2y^2dx + \left(x^3y - 3xy^2 + xy\right)dy &= 0 \\ x^2y^2dx + x^3ydy &= x\left(3y^2 - y\right)dy \\ yx^2\left(ydx + xdy\right) &= x\left(3y^2 - y\right)dy \\ yx^2d(xy) &= x\left(3y^2 - y\right)dy\end{aligned}$$

elde edilir. Denklem $\frac{1}{x}$ ile çarpılırsa

$$xyd(xy) = \left(3y^2 - y\right)dy$$

tam diferensiyel denklemi elde edilir. Eşitliğin her iki yanının integralini alırsak

$$\frac{x^2y^2}{2} = y^3 - \frac{y^2}{2} + c$$

bulunur. (Burada integral çarpanı $\lambda = \frac{1}{x}$ dir.)

Örnek 4. $\left(x^4 + 2y\right)dx - xdy = 0$ denklemini çözünüz.
Çözüm. $P(x, y) = x^4 + 2y$ ve $Q(x, y) = -x$ için $P_y = 2$, $Q_x = -1$ olduğundan denklem tam değildir.

$$\begin{aligned}\frac{P_y - Q_x}{Q} &= \frac{3}{-x} = g(x) \\ &\Rightarrow \lambda(x) = e^{\int -\frac{3}{x}dx} = e^{-3\ln x} = \frac{1}{x^3} \quad \text{(sadece } x \text{ e bağlı integrasyon çarpanı)}\end{aligned}$$

Denklem $\frac{1}{x^3}$ ile çarpılarak

$$\left(x+\frac{2y}{x^3}\right)dx-\frac{1}{x^2}dy=0$$

elde edilir. Denklem tam diferensiyeldir. O halde öyle bir $u\left(x,y\right)$ fonksiyonu vardır ki

$$\begin{aligned} u_x &= x+\frac{2y}{x^3} \\ u_y &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

denklemlerini sağlar. Böylece

$$\begin{aligned} u\left(x,y\right) &= \frac{x^2}{2}-\frac{y}{x^2}+h\left(y\right) \\ \Rightarrow u_y &= -\frac{1}{x^2}+h'\left(y\right)=-\frac{1}{x^2} \\ \Rightarrow h\left(y\right) &= c_1 \end{aligned}$$

olup çözüm

$$\frac{x^2}{2}-\frac{y}{x^2}=c$$

şeklinde bulunur.