Sabit Katsayılı Lineer Homogen Diferensiyel Denklemler

$a_0,\ a_1, ..., a_n$ 'ler reel sabitler ve $a_0 \neq 0$ olmak üzere n-yinci basamaktan sabit katsayılı lineer homogen diferensiyel denklem

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{1}$$

formundadır. r bir parametre olmak üzere bu denklemin $y = e^{rx}$ formunda çözümünü arayalım. $y' = re^{rx},\ y'' = r^2 e^{rx},\ ..., y^{(n)} = r^n e^{rx}$ olup bunlar (1) denkleminde yerine yazılırsa

$$e^{rx}\left(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + ... + a_{n-1} r + a_n\right) = 0$$

elde edilir. $e^{rx} \neq 0$ olduğıundan

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + ... + a_{n-1} r + a_n = 0 \tag{2}$$

olmalıdır. Bu denklem ise (1) denklemine ilişkin **karakteristik denklem** olarak adlandırılır.

Şimdi özel durumda ikinci basamaktan sabit katsayılı homogen denklemlerin çözümlerini inceleyelim. İkinci basamaktan sabit katsayılı homogen denklem

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{3}$$

olsun. Bu denkleme ilişkin karakteristik denklem

$$a_0 r^2 + a_1 r + a_2 = 0 \tag{4}$$

dır. Şimdi bu denklemin köklerini inceleyelim.

1. Durum: (4) denklemi iki reel farklı köke sahip olsun. $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda (3) denklemini genel çözümü

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

formundadır.

2. Durum: (4) denklemi katlı reel köke sahip olsun. $r = r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda (3) denklemini genel çözümü

$$y = (c_1 + c_2 x)\, e^{rx}$$

formundadır.

3. Durum: (4) denklemi eşlenik kompleks köke sahip olsun. $r_{1,2} = \alpha \mp i\beta$ olsun. Bu durumda (3) denklemini genel çözümü

$$y = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x\right)$$

formundadır.

Örnek 1. $y'' - 2y' - 3y = 0$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Bu denkleme ilişkin karakteristik denklem

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

olup bu denklemin kökleri $r_1 = 3,\ r_2 = -1$ reel farklı olup verilen denklemin genel çözümü

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$$

dir.

Örnek 2. $y'' - 6y' + 9y = 0$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Bu denkleme ilişkin karakteristik denklem

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

olup bu denklemin kökleri $r_1 = r_2 = 3$ reel katlı olup verilen denklemin genel çözümü

$$y = (c_1 + c_2 x)\, e^{3x}$$

dir.

Örnek 3. $y^{(4)} + y''' + y'' = 0$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Bu denkleme ilişkin karakteristik denklem

$$r^4 + r^3 + r^2 = r^2 \left(r^2 + r + 1\right) = 0$$

olup bu denklemin kökleri $r_1 = r_2 = 0,\ r_{3,4} = \dfrac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2}$ olup verilen denklemin genel çözümü

$$y = c_1 + c_2 x + e^{\frac{-x}{2}} \left(c_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$$

dir.

Örnek 4. $y^{(5)} - 12y''' + 16y'' = 0$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Bu denkleme ilişkin karakteristik denklem

$$r^5 - 12r^3 + 16r^2 = r^2 \left(r - 2\right)^2 \left(r + 4\right) = 0$$

olup bu denklemin kökleri $r_{1,2} = 0,\ r_{3,4} = 2,\ r_5 = -4$ olup verilen denklemin genel çözümü

$$y = c_1 + c_2 x + \left(c_3 + c_4 x\right) e^{2x} + c_5 e^{-4x}$$

dir.