

Lineer Denklem Sistemleri İçin Kritik Noktalar ve Kararlılık (Devam)

Bu bölümde sabit katsayılı lineer homogen

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y \end{cases} \quad (1)$$

sisteminin kritik nokta türü ve kararlılık incelemesine devam edilecektir. Burada a_1, a_2, b_1, b_2 katsayıları reel sabitlerdir ve

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \quad (2)$$

olduğu kabul edilmektedir.

Daha önce görüldüğü üzere (1) sisteminin karakteristik denklemi

$$m^2 - (a_1 + b_2)m + a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \quad (3)$$

dır

Teorem 4. (3) karakteristik denkleminin m_1 ve m_2 kökleri reel ve eşit olsun. Bu durumda $(0, 0)$ kritik noktası bir düğüm noktasıdır. Ayrıca $m_1 = m_2 < 0$ ise kritik nokta asimptotik kararlı, $m_1 = m_2 > 0$ ise kritik nokta kararsızdır.

Örnek 4.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - y \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases} \quad (4)$$

sisteminin kritik noktasının yapısını belirleyiniz.

Çözüm. Verilen sistemde açık olarak $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ olup $(0, 0)$ tek kritik noktadır. (4) sistemine ilişkin karakteristik denklem

$$m^2 + 6m + 9 = 0$$

dır. $m_1 = m_2 = -3$ kökleri reel ve eşit olduğundan, Teorem 4 den $(0, 0)$ kritik noktası bir düğüm noktasıdır. Ayrıca $m_1 = m_2 < 0$ olduğundan, asimptotik kararlı bir noktadır.

Teorem 5. (3) karakteristik denkleminin m_1 ve m_2 kökleri sırf sanal olsun. Bu durumda $(0, 0)$ kritik noktası bir merkez nokta olup kararlıdır.

Örnek 5.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -17x - 5y \end{cases} \quad (5)$$

sisteminin kritik noktasının yapısını belirleyiniz.

Çözüm. Verilen sistemde açık olarak $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ olup $(0, 0)$ tek kritik noktadır. (5) sistemine ilişkin karakteristik denklem

$$m^2 + 9 = 0$$

olup $m_1 = 3i$, $m_2 = -3i$ kökleri sırf sanaldır. O halde Teorem 5 den $(0, 0)$ kritik noktası bir merkez nokta olup kararsızdır.

Teorem 6. (1) lineer sisteminin $(0, 0)$ kritik noktasının kararlı olması (3) karakteristik denkleminin her iki kökünün pozitif olmayan reel kısmı olması ile ve asimptotik kararlı olması her iki kökünün negatif reel kısmı olması ile eşdeğerdir.

Uyarı 2. (3) karakteristik denklemini

$$(m - m_1)(m - m_2) = m^2 + pm + q = 0$$

şeklinde yazılırsa, buradan

$$p = -(m_1 + m_2) \text{ ve } q = m_1m_2$$

dir. Buna göre aşağıdaki teorem de ifade edilebilir.

Teorem 7. (1) lineer sisteminin $(0, 0)$ kritik noktasının asimptotik kararlı olması (3) karakteristik denkleminin $p = -(a_1 + b_2)$ ve $q = a_1b_2 - a_2b_1$ katsayılarının her ikisinin pozitif olması ile eşdeğerdir.