

BİR GÜNEŞ ATMOSFER MODELİ

1. Problemin ifade edilmesi:

Güneş atmosferi için

$$0.05 \leq \bar{\tau} \leq 2.00$$

aralığındaki

$$T(\bar{\tau}), P(\bar{\tau}), \rho(\bar{\tau}) \text{ ve } x(\bar{\tau})$$

değerlerini buluruz. Güneş için

$$T_e = 5800 \text{ K (} = 5802 \text{ K)}$$

$$g = 2.741 \times 10^4 \text{ cm/s}^2$$

$$M = 1.991 \times 10^{33} \text{ gr}$$

$$R = 6.960 \times 10^{10} \text{ cm}$$

$$L = 3.91 \times 10^{33} \text{ erg/s}$$

Gözlenen nicelik değerleri ve kimyasal bileşim için $X = 0.56$, $Y = 0.41$ ve $Z = 0.03$ (bkz. Çizelge 1) değerleri varsayılacaktır.

Tüm istenen optik derinliklerdeki sıcaklıklar $T(\bar{\tau})$ ya ilişkin bir formülden hemen bulunabilir. $\bar{\tau}$ nun küçük bir aralığında geçerli olan bir analitik yaklaşım,

$$dP/d\bar{\tau}$$

integrasyonu için başlangıç değerlerini verir.

Çizelge 1. A. Rosa (1948) den Element Bolluk Değerleri (Bu kimyasal bileşim için; X = 0.56, Y = 0.41 ve Z = 0.03).

Atom Numarası (z)	Element	Sayısal Bolluk (H = 25,100 ile)	Kütlesel Bolluk (H 0 25,100 ile)	Kesirsel Bolluk (Kütlesel)
1	H	25,100	25,100	0.5608
2	He	4,570	18,200	0.4066
6	C	6.31	75.9	0.0017
7	N	13.5	190	0.0042
8	O	24.5	389	0.0087
10	Ne	28.8	575	0.0128
11	Na	0.0575	1.32	0.0000
12	Mg	1.55	38.0	0.0008
13	Al	0.0955	2.57	0.0001
14	Si	1.41	39.8	0.0009
16	S	0.371	12.0	0.0003
19	K	0.00794	0.31	0.0000
20	Ca	0.0759	3.02	0.0001
26	Fe	2.23	132.0	0.0029
		$\Sigma = 29,750$	$\Sigma = 44,760$	$\Sigma = 1.0000$

$\bar{\tau}$ nun bir fonksiyonu olarak P nin çizelgesi elde edildikten sonra

$$\frac{dx}{d \log P}$$

yardımcı (ek) integrasyonu x ile P arasındaki ilişkiyi ve böylece de $\bar{\tau}$ arasındaki ilişkiyi de kurar. Yoğunluk ve elektron basıncı gibi diğer nicelikler de çizelgelenebilir.

2. $T(\bar{\tau})$ nun hesaplanması:

Eddington'un birinci yaklaşımı olan

$$T^4 = \frac{1}{2} T^4 \left(1 + \frac{3}{2} \bar{\tau} \right)$$

$$T = 4877.2 \left(1 + \frac{3}{2} \bar{\tau} \right)^{1/4} \quad : (5800 K \text{ için})$$

$$T = 4879 \left(1 + \frac{3}{2} \bar{\tau} \right)^{1/4} \quad : (5802 K \text{ için})$$

temele dayanarak $T(\bar{\tau})$ hesaplanır. Opaklık T sıcaklığından daha çok θ ya bağlı olarak verildiği için

$$\theta = \frac{5040}{T}$$

değerlerine gereksinim olur. T ve θ değerleri Çizelge 2 de listelenmektedir.

Çizelge 2. $T(\bar{\tau})$ ve karşılık gelen $\theta(\bar{\tau})$ değerleri.

$\bar{\tau}$	T (°K)	$\theta = \frac{5040}{T}$
0.050	4967.9	1.0145
0.075	5010.7	1.0058
0.100	5052.4	0.9975
0.125	5093.1	0.9896
0.150	5132.8	0.9819
0.175	5171.7	0.9745
0.200	5209.6	0.9674
0.225	5246.8	0.9606
0.250	5283.2	0.9540
0.275	5318.9	0.9476
0.300	5353.8	0.9414
0.325	5388.1	0.9354

Çizelge 2. $T(\bar{\tau})$ ve karşılık gelen $\theta(\bar{\tau})$ değerleri (Devamı).

$\bar{\tau}$	T (°K)	$\theta = \frac{5040}{T}$
0.350	5421.7	0.9296
0.375	5454.8	0.9240
0.400	5487.2	0.9185
0.425	5519.1	0.9132
0.450	5550.4	0.9080
0.475	5581.2	0.9030
0.500	5611.5	0.8982
0.55	5670.7	0.8888
0.60	5728.1	0.8799
0.65	5783.8	0.8714
0.70	5838.0	0.8633
0.75	5890.6	0.8556

Çizelge 2. $T(\bar{\tau})$ ve karşılık gelen $\theta(\bar{\tau})$ değerleri (Devamı).

$\bar{\tau}$	T (°K)	$\theta = \frac{5040}{T}$
0.80	5941.9	0.8482
0.85	5991.9	0.8411
0.90	6040.7	0.8343
0.95	6088.4	0.8278
1.00	6134.9	0.8215
1.10	6224.9	0.8097
1.20	6311.2	0.7986
1.30	6394.1	0.7882
1.40	6473.8	0.7785
1.50	6550.8	0.7694
1.60	6625.1	0.7607
1.70	6697.0	0.7526

Çizelge 2. $T(\bar{\tau})$ ve karşılık gelen $\theta(\bar{\tau})$ değerleri (Devamı).

$\bar{\tau}$	T (°K)	$\theta = \frac{5040}{T}$
1.80	6766.6	0.7448
1.90	6834.2	0.7375
2.00	6899.8	0.7305

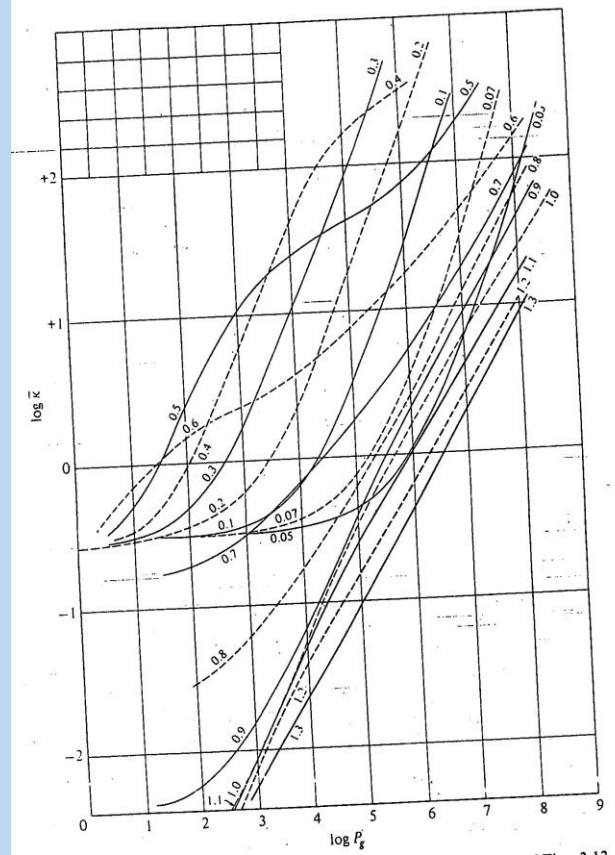
3. Başlangıç değerleri:

Temel diferansiyel denklem,

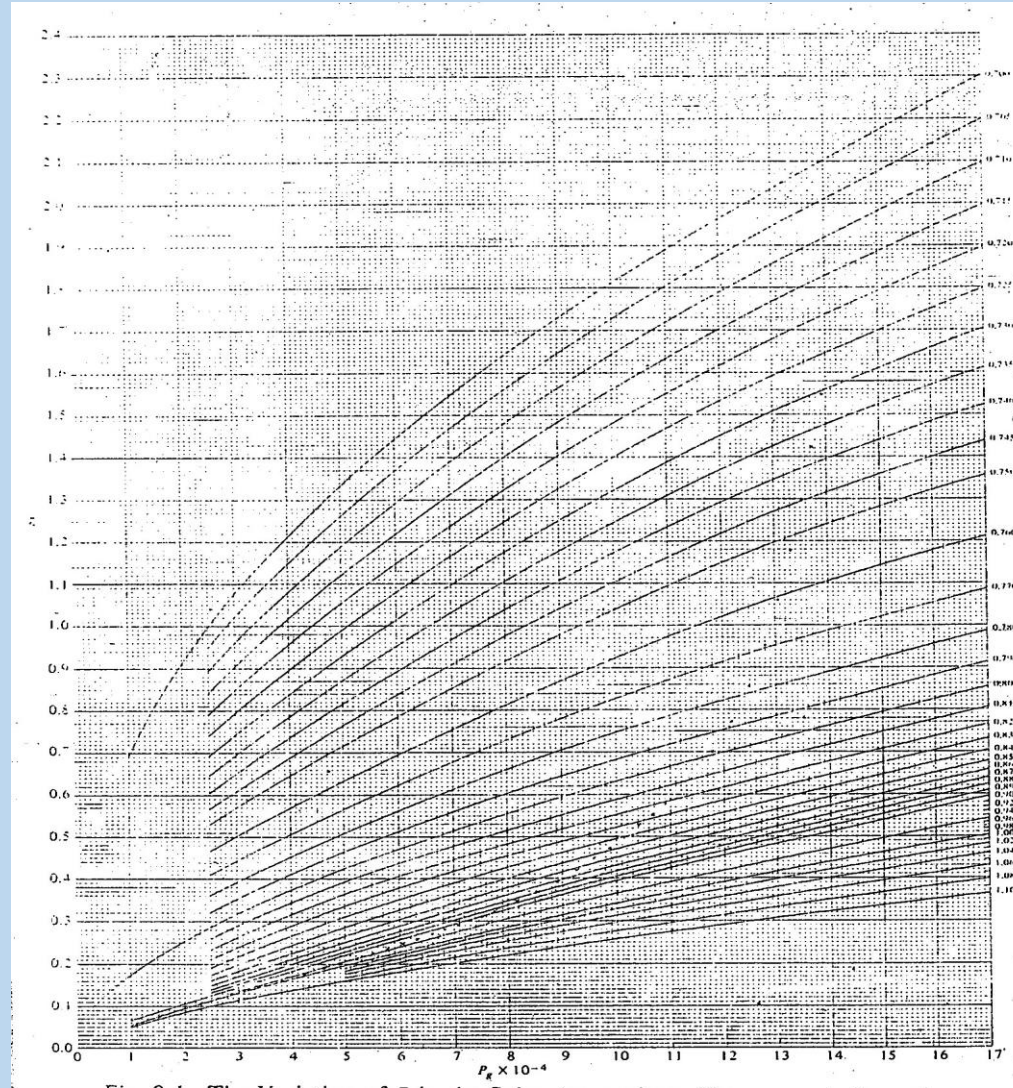
$$\frac{dP}{d\bar{\tau}} = \frac{g}{\bar{\kappa}}$$

idi. İntegrasyonu başlatmak için, $\bar{\tau}$ nun eşit aralıklarındaki çeşitli (ya da birkaç) $\frac{g}{\bar{\kappa}}$ ve böylece P değerlerine gereksinimimiz vardır. Bunlar hemen yukarıda verilen denklem, atmosferin sınırlı olan bölgesinde geçerli olan bir formülle verilen $\bar{\kappa}$ ile integre ederek elde edilen bir analitik ifadeden bulunabilirler.

$\bar{\kappa}$ ya ilişkin böylesi bir formülü elde etmek için Şekil 1 de verilen $\log \bar{\kappa}(\log P_g, \theta)$ veya Şekil 2 de verilen $\bar{\kappa}(P_g, \theta)$ eğrilerini kullanırız.



Şekil 1. Rosseland ortalama soğurma katsayısı (E. Vitense, 1951, Z. f. Ap. 28, 81 den).



Şekil 2. Güneş atmosferinde \bar{n} nın değişimi. Çarpılar, bu çalışmada hesaplanan Güneş model atmosferine karşılık gelen $\bar{n}(P_g, \theta)$ değerlerini göstermektedir (Eva Novotny, 1973'den).

En son belirtilen iki grafikte P_g ile θ aralıkları, yayınlanmış modellerde belirlendiği gibi Güneş atmosferine uygun yaklaşık değerler olarak seçilmiştir. Atmosferin hangi yerinde hesaplamamanın başladığı önemli değildir ancak bu yeri en elverişli, uygun formülü elde etmek için seçilebilir. Yayınlanmış modellerde görülen şudur: θ nın 0.9 ile 1.0 arasında olduğu değerler ($\theta_{\text{eff}} = 0.87$ düzeyinden, atmosferde biraz daha yüksek) için P_g aralığı 4-5 olarak alınabilir. Bu Şekil 1'in $\log \bar{\kappa}$ nın hemen hemen θ dan bağımsız olduğu bir kısmına karşılık gelmektedir. Bu bölgede,

$$0.9 \leq \theta \leq 1.0 \text{ ve } 4 \leq \log P \leq 5 \text{ aralıkları için; } \log \bar{\kappa} = -4.40 + 0.8 \log P$$

bağıntısı kullanılarak $\bar{\kappa}$ değerleri kestirilebilir. Burada, ışınım basıncı boşlanabilir düzeyde olduğu için P_g yerine P yazıldı.

Bu formülün uygunluğu, başlangıç değerleri hesaplandıktan ve x , $\bar{\tau}$ nun bir fonksiyonu olarak bulunduktan sonra sınanabilir. Her şeyden önce $\log P$ nin modelde verildiği gibi θ nın 0.9 ile 1.0 arasındaki değerleri için 4 ile 5 arasındaki değerlere sahip olması gerekir. Bundan başka, başlangıç değerlerinin aralığı üzerinden $\bar{\kappa} \rho dx$ 'in integrali, çizelgelenmiş bağımsız değişken olarak verilen $\Delta \bar{\tau}$ ya eşit olmalıdır. Örneğin, yukarıdaki $\log \bar{\kappa}$ ya ilişkin yaklaşık bağıntıyı kullanarak elde edilen basıncın başlangıç değerlerinin verilen sıcaklıklar ile optik derinlikler için çok küçük olduklarını varsayınız. O zaman $\bar{\kappa}$ da çok küçük ve ideal gaz yasasından hesaplanan ρ da çok küçük olacaktır. Bu nedenle,

$$\int \bar{\kappa} \rho dx$$

değeri, çizelgelenen $\Delta \bar{\tau}$ aralığından daha küçük olacaktır. Bu modelde başlangıç değerlerinin aralığı ($0.200 \leq \bar{\tau} \leq 0.300$) üzerinden

$$\int \bar{\kappa} \rho dx$$

0.1000 'e değil 0.0903 'e eşit değerdedir. Yüzde 10 luk hata amacımız için sorun yaratmayacaktır.

Bundan dolayı, başlangıç değerlerinin hesabı için,

$$\bar{\kappa} = 10^{-4.40} P^{0.8}$$

yaklaşık formülünü benimseyeceğiz. Bunu

$$\frac{dP}{d\bar{\tau}} = \frac{g}{\bar{\kappa}}$$

bağintısında kullanırsak,

$$\frac{dP}{d\bar{\tau}} = 10^{4.40} g \frac{1}{P^{0.8}}$$

elde edilir. Değişkenleri ayırarak ve integral alarak,

$$\frac{1}{1.8} P^{1.8} = 10^{4.40} g \bar{\tau} + \text{sabit}$$

elde edilir. Yüzeyde yoğunluğun sıfır olması $\bar{\tau} = 0$ da $P = 0$ olmasını gerektirdiği için sabitin değeri sıfır olur. O zaman,

$P^{1.8} = 1.8 \times 10^{4.4} \cdot g \cdot \bar{\tau}$; ve $g = 2.741 \times 10^4$ cm/s değeri ile, $P^{1.8} = 1.239 \times 10^9 \bar{\tau}$ olacağı sonucu elde edilir. Bu bağıntı, $\bar{\tau} = 0.200$ den $\bar{\tau} = 0.300$ 'e kadar olan değerlere ilişkin P nin hesaplanmasında kullanılır. Daha büyük optik derinliklere gidildikçe integrasyonun küçük artımlar yönünde ilerlemesi nedeniyle bu hesap sonuçları iki farklı çizelgede listelenerek değerlendirme yapmak daha uygun ve yararlı olur. O zaman,

$$h^{dP/d\bar{\tau}} = h^g/\bar{\kappa}$$

değerleri, ya $\bar{\kappa} = 10^{-4.40} P^{0.8}$ denkleminde veya Şekil 2 den okunacak $\bar{\kappa}$ değerleri ile (hala başlangıç değerleri için olan) bulunabilirler. $\bar{\kappa}$ ya ilişkin formül, $\bar{\kappa}$ nın eğrilerinden (Şekil 2'deki) okunan sadece bir yaklaşımı olduğu için ikisinden elde edilen değerlerin aynı olması beklenmemelidir. İkinci belirtile yol/yöntem, burada benimsenecektir. Artık $h^{dP/d\bar{\tau}}$ farkları bulunabilir ve integrasyonu başlatmak için gereken bilgi/veri tamamlanmış olur.

$P(\bar{\tau})$ için sayısal integrasyon işlemini yapabilmek üzere, sayısal integrasyon ile ilgili temel bilgiler aşağıda şöyle özetle verilebilir:

SAYISAL İNTEGRASYON

Sayısal İntegrasyon için Bir Formülün Çıkarılışı:

Yıldız atmosferi ile yıldız içi diferansiyel denklemler,

$$\frac{dv}{dz} = f(z, v, w, \dots) \quad \dots (1)$$

şeklindedir ki burada z , bağımsız değişken, v bir bağlı değişken ve w, \dots nicelikleri, opasite katsayısı gibi bağlı değişkenlerin fonksiyonları ve herhangi bir bağlı ek değişkenleri temsil ederler. Atmosfer durumunda olan bir durum için (1) şeklinde olan sadece bir denklem düşünülür. Bununla beraber bir yıldız içine ilişkin hesaplama, böylesi birkaç denklemin aynı zamanda çözülmesini gerektirir.

Sayısal integrasyon prensibini göstermek için, ilk önce, bağlı değişkenlerin, birinci türevi içeren teriminden sonrakileri kesilmiş olan Taylor serisi ile ifade edildikleri bir yöntemi ele alalım. v değişkeni için genişletme/açma, z_0 ve f_0 'a karşılık gelen v_0 noktası komşuluğunda/yöresinde yapılır. z_0, v_0 ve f_0 'ın bilindiği kabul edilir ve z_0 'a yakın olan bir z_1 değerindeki v_1 ve f_1 'i bulmak isteyelim. O zaman,

$$v_1 = v_0 + (z_1 - z_0)f_0$$

elde edilir. Eğer birkaç hem zamanlı diferansiyel denklem varsa, bağımlı değişkenlerden her biri benzer bir açılimdan/genişletmeden hesaplanabilir. Bu işlem, normal olarak eşit aralıklarda alınan z değerleri için tekrarlanır. Eğer h aralığı gösterirse i indisi, integrasyonun herhangi bir satırındaki değerleri göstermek üzere,

$$h = z_{i+1} - z_i \quad \dots(2)$$

ve

$$v_{i+1} \approx v_i + hf_i \quad \dots(3)$$

yazılabilir. (3) formülünün şöyle bir dezavantajı vardır: h aralığı çok küçük değilse veya v fonksiyonu z ile lineer olarak değişmedikçe (o zaman sadece ikinci ve daha yüksek mertebeden türevlerin boşlanabildiği durum için) doğru olmaz. Eğer ek terimler, doğruluğu arttırmak için atılmasaydı, v 'nin daha yüksek mertebeden türevlerinin hesaplanmasının zor veya imkansız olduğu bulunurdu; örneği opaklık katsayısına ilişkin türevin sayısal değerini gerektiren terimlerle karşılaşılacaktı. Bundan dolayı, türevlerden daha çok (Runge-Kutta yöntemi), $f = dv/dz$ fonksiyonunun çizelgelenmiş değerlerinin farklarına dayanan bir yöntem kullanılacaktır. Bu hesaplama adımları (formatı) Çizelge 3 'de gösterilmektedir ki bu hesaplamada

$$\begin{aligned}\Delta_i^1 &= hf_i - hf_{i-1} \\ \Delta_i^2 &= \Delta_i^1 - \Delta_{i-1}^1 \\ \Delta_i^3 &= \Delta_i^2 - \Delta_{i-1}^2 \\ \Delta_i^4 &= \Delta_i^3 - \Delta_{i-1}^3 \\ \dots &= \dots - \dots\end{aligned}$$

alınmaktadır.

Böylece,

$$v_{i+1} = v_i + hf_i + a_1\Delta_i^1 + a_2\Delta_i^2 + a_3\Delta_i^3 + \dots \dots(4)$$

şeklinde bir ifade bulunur ki burada a_1, a_2, a_3, \dots 'ler sabitlerdir. Yine, z 'nin z_0 denilen değerindeki $v, f, \Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \dots$ 'nın başlangıç değerleri bilinmelidir. Başlangıç değerleri ile onların hesaplanması için gerekli olan diğer nicelikler Çizelge 3 de koyu-kırmızı yazı ile gösterilmektedir.

Hesaplanan her bir yeni satır, integrasyonun bir sonraki hesaplama satırı için bir başlangıç satırı rolünde olduğu için notasyon (yani işlem numaralandırması), integrasyonun son bilinen satırı için 0 indisi ve bulunacak bir sonraki satır için 1 indisi kullanımı ile basitleştirilmektedir.

Katsayıların sayısal değerlerini içeren (4) denklemini çıkarmak için hf fonksiyonu bir φ polinomu ile temsil edilir. Bu polinomun n derecesi, en azından istenen en büyük farkın mertebesi kadar büyük olmalıdır. O zaman,

$$\varphi = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)(z - z_{-1}) + c_3(z - z_0)(z - z_{-1})(z - z_{-2}) + \dots + c_n(z - z_0)(z - z_{-1})\dots(z - z_{-n}).$$

İstenilen şey, φ 'nin, $z_0, z_{-1}, z_{-2}, \dots, z_{-n}$ noktalarındaki hf 'ye eşit olmasıdır. Bu durumdan, aşağıdaki gibi katsayılar hesaplanabilir:

$z = z_0$ da,

$$hf_0 = \varphi(z_0) = c_0$$
$$\therefore c_0 = hf_0$$

$z = z_{-1}$ de,

$$hf_{-1} = \varphi(z_{-1}) = c_0 + c_1(z_{-1} - z_0)$$
$$c_1 = \frac{hf_{-1} - c_0}{z_{-1} - z_0} = \frac{hf_{-1} - hf_0}{-h}$$
$$\therefore c_1 = \frac{\Delta_0^1}{h}$$

$z = z_{-2}$ de,

$$hf_{-2} = \varphi(z_{-2}) = c_0 + c_1(z_{-2} - z_0) + c_2(z_{-2} - z_0)(z_{-2} - z_{-1})$$
$$hf_{-2} = hf_0 + \frac{\Delta_0^1}{h}(-2h) + c_2(-2h)(-h)$$
$$c_2 = \frac{hf_{-2} - hf_0 + 2\Delta_0^1}{2h^2} = \frac{hf_{-2} - hf_0 + 2(hf_0 - hf_{-1})}{2h^2}$$
$$c_2 = \frac{(hf_0 - hf_{-1}) - (hf_{-1} - hf_{-2})}{2h^2} = \frac{\Delta_0^1 - \Delta_{-1}^1}{2h^2}$$
$$\therefore c_2 = \frac{\Delta_0^2}{2h^2}$$

$z = z_{-2}$ de,

$$hf_{-3} = \varphi(z_{-3}) = c_0 + c_1(z_{-3} - z_0) + c_2(z_{-3} - z_0)(z_{-3} - z_{-1}) + c_3(z_{-3} - z_0)(z_{-3} - z_{-1})(z_{-3} - z_{-2})$$

$$hf_{-3} = hf_0 + \frac{\Delta_0^1}{h}(-3h) + \frac{\Delta_0^2}{2h^2}(-3h)(-2h) + c_3(-3h)(-2h)(-h)$$

$$c_3 = \frac{hf_{-3} - hf_0 + 3\Delta_0^1 - 3\Delta_0^2}{-3!h^3}$$

$$\Delta_0^2 = \Delta_0^1 - \Delta_{-1}^1 = \Delta_0^1 - (hf_{-1} - hf_{-2})$$

olduğu için

$$c_3 = \frac{hf_{-3} - hf_0 + 3\Delta_0^1 - 3\Delta_0^2 + 3(hf_{-1} - hf_{-2})}{-3!h^3}$$

$$c_3 = \frac{-(hf_0 - hf_{-1}) + (hf_{-1} - hf_{-2}) - (hf_{-2} - hf_{-3}) + (hf_{-1} - hf_{-2})}{-3!h^3}$$

$$c_3 = \frac{-(\Delta_0^1 - \Delta_{-1}^1) - (\Delta_{-2}^1 - \Delta_{-1}^1)}{-3!h^3} = \frac{-(\Delta_0^2 - \Delta_{-1}^2)}{-3!h^3}$$

$$\therefore c_3 = \frac{\Delta_0^3}{3!h^3}$$

Genel olarak,

$$c_n = \frac{\Delta_0^n}{n!h^n}$$

Böylece,

$$h \frac{dv}{dz} = hf = \varphi = hf_0 + \frac{\Delta_0^1}{h} (z - z_0) + \frac{\Delta_0^2}{2h^2} (z - z_0)(z - z_{-1}) + \frac{\Delta_0^3}{3!h^3} (z - z_0)(z - z_{-1})(z - z_{-2}) + \dots \quad \dots(5)$$

Bu, geriye doğru olan interpolasyona ilişkin Newton formülüdür. v_{+1} 'i bulmak için, bu denklemin integralini almak gerekir. Şöyle ki;

$$h(v_{+1} - v_0) = \int_{z_0}^{z_1} \left(h \frac{dv}{dz} \right) dz$$

$$h(v_{+1} - v_0) = \int_{z_0}^{z_1} \left[hf_0 + \frac{\Delta_0^1}{h} (z - z_0) + \frac{\Delta_0^2}{2h^2} (z - z_0)(z - z_{-1}) + \frac{\Delta_0^3}{3!h^3} (z - z_0)(z - z_{-1})(z - z_{-2}) + \dots \right] dz$$

Değişken dönüşümü ile sonuç basitleştirilebilir. Şöyle ki;

$$u = \frac{z - z_0}{h}, \quad du = \frac{dz}{h}$$

olsun. O zaman integralin üst ve alt sınırları $u = 1$ ve $u = 0$ olurken,

$$z - z_{-1} = (z - z_0) + (z_0 - z_{-1}) = hu + h = h(u + 1)$$

ve

$$z - z_{-2} = (z - z_0) + (z_0 - z_{-1}) + (z_{-1} - z_{-2}) = hu + h + h = h(u + 2)$$

olur. Bundan dolayı,

$$h(v_{+1} - v_o) = \int_0^1 \left[hf_o + \Delta_o^1 u + \frac{\Delta_o^2}{2} u(u+1) + \frac{\Delta_o^3}{3!} u(u+1)(u+2) + \dots \right] h du$$

$$h(v_{+1} - v_o) = h^2 f_o u \Big|_0^1 + \frac{1}{2} h \Delta_o^1 u^2 \Big|_0^1 + \frac{\Delta_o^2}{2} h \left[\frac{1}{3} u^3 + \frac{1}{2} u^2 \right] \Big|_0^1 + \frac{\Delta_o^3}{3!} h \left[\frac{1}{4} u^4 + u^3 + u^2 \right] \Big|_0^1 + \dots$$

$$h(v_{+1} - v_o) = h^2 f_o + \frac{1}{2} h \Delta_o^1 + \frac{5}{12} h \Delta_o^2 + \frac{3}{8} h \Delta_o^3 + \dots$$

veya

$$v_{+1} = v_o + hf_o + \frac{1}{2} \Delta_o^1 + \frac{5}{12} \Delta_o^2 + \frac{3}{8} \Delta_o^3 + \dots$$

$$v_{+1} = v_o + hf_o + 0.5 \Delta_o^1 + 0.41667 \Delta_o^2 + 0.3750 \Delta_o^3 + 0.3486 \Delta_o^4 + 0.3299 \Delta_o^5 + \dots \quad \dots (6)$$

Bu son denklem aranılan denklemdir.

$z_{+1}, z_o, z_{-1}, z_{-2}, \dots$ yi ve z_{+1} deki farklar ile türevleri (bilinmeyen) kullanarak benzer bir çıkarma,

$$v_{+1} = v_o + hf_{+1} - \frac{1}{2} \Delta_{+1}^1 - \frac{1}{12} \Delta_{+1}^2 - \frac{1}{24} \Delta_{+1}^3 - \frac{19}{720} \Delta_{+1}^4 - \dots$$

$$v_{+1} = v_o + hf_{+1} - 0.5 \Delta_{+1}^1 - 0.08333 \Delta_{+1}^2 - 0.04167 \Delta_{+1}^3 - 0.02639 \Delta_{+1}^4 - 0.01875 \Delta_{+1}^5 - \dots \quad \dots (7)$$

sonucunu verir.

En son formül, hızlıca (daha hızlı) yaklaşma avantajına sahiptir. Öyle ki, daha az terim gerekmede ve daha büyük farklarda biriken aktarımlı/birikimli hataların sonuca daha az etkisi olmaktadır. Açıkça görülen dezavantaj ise, z_{+1} deki farkların ve türevlerin bilinmemesidir. Bu nedenle, hf_{+1} 'i kestirmek, Δ_{+1}^1 , Δ_{+1}^2 , Δ_{+1}^3 , ... farklarını hesaplamak, sonra (7) formülünden v_{+1} 'i hesaplamak ve son olarak v_{+1} 'in bu değerini kullanarak hf_{+1} 'i hesaplamak gerekir. Eğer hf_{+1} 'in hesaplanan ve kestirilen değerleri uyuşmuyor ise, yeni bir kestirim yapılmalı ve işlem tekrarlanmalıdır.

Şimdi bu sayısal integrasyon yönteminden yararlanarak, ortalama optik derinliğe bağlı şekilde basınç değerlerinin model atmosfer hesabındaki uygulama adımlarına bakalım:

4. $P(\bar{\tau})$ için Sayısal İntegrasyon:

Belli bir optik derinlikteki düzeyden bir sonraki optik derinliğe karşılık gelen P 'nin değeri,

$$\frac{dP}{d\bar{\tau}} = \frac{g}{\bar{\kappa}}$$

Diferansiyel denklemin sayısal integrasyonu ile elde edilir. Örneğin Çizelge 4 'te $\bar{\tau} = 0.175$ 'deki girdi verileri kullanılarak hesaplamanın nasıl yapıldığını aşağıda belirtildiği gibi gösterebiliriz:

Çizelge 4. $dP/d\bar{\tau}$ integrasyonu (Dışa doğru).

$\bar{\tau}$	$P \times 10^{-4}$ (dyn cm ⁻²)	$h \frac{dP}{d\bar{\tau}} \times 10^{-4}$	$\Delta^1 \times 10^{-4}$	$\Delta^2 \times 10^{-4}$	$\Delta^3 \times 10^{-4}$	$\Delta^4 \times 10^{-4}$	$\Delta^5 \times 10^{-4}$	$\Delta^6 \times 10^{-4}$
0.300		-0.290						
0.275		-0.305	-0.015					
0.250		-0.322	-0.017	-0.002				
0.225		-0.339	-0.017	0.000	+0.002*			
0.200	4.607	-0.359	-0.020	-0.003	-0.003*			
0.175	4.237	-0.392	-0.033	-0.013	-0.010			
0.150	3.819	-0.426	-0.034	-0.001	+0.012*			
0.125	3.376	-0.469	-0.043	-0.009	-0.008			
0.100	2.878	-0.535	-0.066	-0.023	-0.014	-0.006		
0.075	2.293	-0.653	-0.118	-0.052	-0.029	-0.015	-0.009	
0.050	1.541	-0.902	-0.249	-0.131	-0.079	-0.050	-0.035	-0.026

* Bu farklar integrasyon işleminde kullanılmadı.

$$(i) \quad v_{+1} = v_o + hf_o + 0.5\Delta_o^1 + 0.41667\Delta_o^2 + 0.3750\Delta_o^3 + 0.3486\Delta_o^4 + 0.3299\Delta_o^5 + \dots \quad \dots (6)$$

denklemini kullanarak,

$$P_{+1} = [4.607 - 0.359 + 0.5(-0.020) + 0.417(-0.003)]x10^4$$

$$P_{+1} = 4.237x10^4 \quad dyn \, cm^{-2}$$

sonucu elde edilir. $\bar{\tau} = 0.175$ e karşılık gelen $\theta = 0.9745$ değerini (bkz. Çizelge 2) dikkate alarak Şekil 2 'den bu P değeri için $\bar{\kappa} = 0.1795$ olan değeri bulunur. Böylece,

$$\left(h \frac{dP}{d\bar{\tau}} \right)_{+1} = h \frac{g}{\bar{\kappa}} = -0.025x \frac{2.741x10^4}{0.1795} = 0.382x10^4$$

ve,

$$\Delta_{+1}^1 = -0.033$$

$$\Delta_{+1}^2 = -0.013$$

$$\Delta_{+1}^3 = -0.010$$

Sonucu elde edilir. Bu integrasyon satırı böylece tamamlanmış olur ki bundan sonra artık integrasyon işlemi, $\bar{\tau} = 0.150$ 'ye doğru sürdürülebilecektir. Bu yöntem kullanılarak, aşağıda Çizelge 5 ve 6 'da listelenmiş hesap sonuçları elde edilir.

Çizelge 5. $dP/d\bar{\tau}$ integrasyonu (içer doğru).

$\bar{\tau}$	Γ (dync cm ⁻²)	$h \frac{dP}{d\bar{\tau}} = h \frac{g}{\bar{\tau}}$	${}^1\Delta$	${}^2\Delta$	${}^3\Delta$
0.200	4.607×10^4	0.359×10^4			*
0.225	4.919	0.339	-0.020×10^4		
0.250	5.216	0.322	-0.017	$+0.003 \times 10^4$	
0.275	5.499	0.305	-0.017	0.000	-0.003×10^4
0.300	5.772	0.290	-0.015	+0.002	+0.002
0.325	6.055	0.277	-0.013	+0.002	0.000
0.350	6.326	0.266	-0.011	+0.002	0.000
0.375	6.587	0.255	-0.011	0.000	-0.002
0.400	6.837	0.245	-0.010	+0.001	-0.001
0.425	7.077	0.235	-0.010	0.000	-0.001
0.450	7.307	0.228	-0.007	+0.003	-0.003
0.475	7.533	0.221	-0.007	0.000	-0.003
0.500	7.750				
Continue at double interval:					
0.30		0.580			
0.35		0.532	-0.048		
0.40		0.490	-0.042	+0.006	
0.45		0.456	-0.034	+0.008	+0.002
0.50	7.750	0.425	-0.031	+0.003	-0.005
0.55	8.161	0.397	-0.028	+0.003	0.000
0.60	8.545	0.372	-0.025	+0.003	0.000
0.65	8.906	0.351	-0.021	+0.004	+0.001
0.70	9.248	0.328	-0.023	-0.002	-0.006
0.75	9.564	0.308	-0.020	+0.003	+0.005
0.80	9.863	0.291	-0.017	+0.003	0.000
0.85	10.147	0.275	-0.016	+0.001	-0.002
0.90	10.414	0.261	-0.014	+0.002	+0.001
0.95	10.669	0.248	-0.013	+0.001	-0.001
1.00	10.911				
Continue at double the preceding interval:					
0.60		0.744			
0.70		0.656	-0.088		
0.80		0.582	-0.074	+0.014	
0.90		0.522	-0.060	+0.014	0.000
1.00	10.911	0.475	-0.047	+0.013	-0.001
1.10	11.368	0.431	-0.044	+0.003	-0.010
1.20	11.778	0.392	-0.039	+0.005	+0.002
1.30	12.153	0.356	-0.036	+0.003	-0.002
1.40	12.492	0.321	-0.035	+0.001	-0.002
1.50	12.796	0.289	-0.032	+0.003	+0.002
1.60	13.070	0.259	-0.030	+0.002	-0.001
1.70	13.315	0.233	-0.026	+0.004	+0.002
1.80	13.537	0.211	-0.022	+0.004	0.000
1.90	13.739	0.193	-0.018	+0.004	0.000
2.00	13.925				

*Üçüncü farklar integrasyonda kullanılmamıştır.

Çizelge 6. $\bar{\kappa}(\bar{\tau})$ ve $\Delta(\bar{\kappa})$ fark değerleri.

$\bar{\tau}$	$\bar{\kappa}$ ($\text{cm}^2 \text{ gm}^{-1}$)	${}^1\Delta(\bar{\kappa})$ ($h=0.025$)	${}^1\Delta(\bar{\kappa})$ ($h=0.050$)	$\bar{\tau}$	$\bar{\kappa}$ ($\text{cm}^2 \text{ gm}^{-1}$)	${}^1\Delta(\bar{\kappa})$ ($h=0.050$)	${}^1\Delta(\bar{\kappa})$ ($h=0.10$)	${}^2\Delta(\bar{\kappa})$ ($h=0.10$)
0.050	0.076			0.55	0.345	0.023		
0.075	0.105	0.029		0.60	0.368	0.023		
0.100	0.128	0.023		0.65	0.391	0.023		
0.125	0.146	0.018		0.70	0.418	0.027		
0.150	0.161	0.015		0.75	0.445	0.027		
0.175	0.175	0.014		0.80	0.471	0.026	0.053	
0.200	0.191	0.016		0.85	0.498	0.027		
0.225	0.202	0.011		0.90	0.526	0.028	0.055	0.002
0.250	0.213	0.011	0.022	0.95	0.552	0.026		
0.275	0.225	0.012		1.00	0.577	0.025	0.051	-0.004
0.300	0.236	0.011	0.023					
0.325	0.247	0.011		1.10	0.636		0.059	0.008
0.350	0.258	0.011	0.022	1.20	0.700		0.064	0.005
0.375	0.269	0.011		1.30	0.771		0.071	0.006
0.400	0.280	0.011	0.022	1.40	0.855		0.084	0.013
0.425	0.291	0.011		1.50	0.950		0.095	0.009
0.450	0.301	0.010	0.021	1.60	1.060		0.110	0.015
0.475	0.310	0.009		1.70	1.177		0.117	0.007
0.500	0.322	0.012	0.021	1.80	1.298		0.121	0.004
				1.90	1.423		0.125	0.004
				2.00	1.549		0.126	0.001

(ii) Diğer bir seçenek olarak $\bar{\tau} = 0.175$ 'deki girdi verileri,

$$v_{+1} = v_o + hf_{+1} - 0.5\Delta_{+1}^1 - 0.08333\Delta_{+1}^2 - 0.04167\Delta_{+1}^3 - 0.02639\Delta_{+1}^4 - 0.01875\Delta_{+1}^5 - \dots \quad \dots (7)$$

denklemini kullanılarak bulunabilirler. İlk önce hf_{+1} ve farkları bulunmalı. Eğer,

$$\Delta_{+1}^3 = 0$$

olduğu varsayılırsa, o zaman

$$\begin{aligned}\Delta_{+1}^2 &= -0.003 \\ \Delta_{+1}^1 &= -0.023 \\ hf_{+1} &= -0.382\end{aligned}$$

olur. Bu değerler ile P 'nin kestirimi

$$\begin{aligned}P_{+1} &= [4.607 - 0.382 - 0.5(-0.023) - 0.0833(-0.003)]x10^4 \\ P_{+1} &= 4.237x10^4 \quad dyn \, cm^{-2}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu sonucun geçerliliğini denetlemek için, Şekil 2 'den $\bar{\kappa} = 0.1795$ elde eder ve sonra aşağıdaki hesaplama işlemleri yapılır:

$$hf_{+1} = -0.025x \frac{2.741x10^4}{0.1795} = -0.382x10^4$$

$$hf_{+1} = -0.382$$

$$\Delta_{+1}^1 = -0.033$$

$$\Delta_{+1}^2 = -0.013$$

$$\Delta_{+1}^3 = -0.010$$

Sonra,

$$P_{+1} = [4.607 - 0.382 - 0.5(-0.0303) - 0.0833(-0.013) - 0.0417(-0.010)]x10^4$$

$$P_{+1} = 4.233x10^4 \quad dyn \ cm^{-2}$$

bulunur. P 'ye ilişkin bu ikinci kestirim yine $\bar{\kappa} = 0.1795$ vermekte, sonuç olarak, birinci kestirimde olduğu gibi hf_{+1} , Δ_{+1}^1 , Δ_{+1}^2 , Δ_{+1}^3 için aynı değerler elde edilmiştir. O zaman Çizelge 4 'te verilen $\bar{\tau} = 0.175$ deki adımda/satırda, sadece 4.237 yerine 4.233 olarak bulunan P 'nin değerinde farklılık olacaktır. Dördüncü anlamlı rakamdaki bu 0.004 lük fark önemsizdir. Çünkü $\bar{\kappa}$, aslında üç anlamlı rakamdan daha hassas bir şekilde okunamamaktadır, ancak üç anlamlı rakam duyarlığında okunup belirlenebilmektedir.

Çizelge 6 'da, her bir integrasyon adımı yapıldıkça $\bar{\kappa}$ ve $\Delta^1(\bar{\kappa})$ değerleri yazılmıştır. Bu çizelge, $\bar{\kappa}$ değişiminin düzenliliğini denetlemede yararlı olur. $\bar{\kappa}$ 'nın değişimi Şekil 2 'de gösterilmektedir. Şekil 2 de gösterilen eğrilerdeki belirsizliklerden (ya da hatalardan) dolayı küçük dalgalanmalar beklenmelidir.

$dP/d\bar{\tau}$ integrasyonunu yüzeye doğru sürdürmek için (bkz. Çizelge 4) daha küçük bir aralık gerekecektir. İntegrasyon $\bar{\tau} = 0$ 'a kadar olan tüm yol boyunca yapılamaz. Çünkü $\bar{\tau}$ 'nın sıfıra yaklaşması $dP/d\bar{\tau}$ 'nın sonsuza doğru artmasına neden olacaktır.