<u>NOT:</u> BU DERS NOTLARI SAYIN PROF. DR. YILMAZ AKDİ'NİN İZNİYLE "MATEMATİKSEL İSTATİSTİĞE GİRİŞ – YILMAZ AKDİ" KİTABINDAN DERLENMİŞTİR. KULLANILAN ŞEKİLLERİN VE NOTLARIN TELİF HAKKI KİTABIN YAZARI VE BASIM EVİNE AİTTİR.

<u>HAFTA 1</u>

TEMEL OLASILIK KAVRAMLARI

1.1. Kümeler

İstatistik, adına veri (data) denilen sayısal değerlerin derlenmesi, analizlerinin yapılması ve analiz sonuçlarının yorumlanmasında gerekli bilgileri sağlayan bir bilim dalıdır. Aslında istatistik, doğadaki bu üç problemin çözümüne yardımcı olmaktadır. Verilerin derlenmesi, analizlerin ve analiz sonuçlarının yorumlanması ise belli kurallara bağlıdır.

Bir paranın atılması deneyinde sonuç, yazı ya da turadır. Ancak hangisinin geleceği hakkında kesin bir şey söylenemez. Yani, deneyin sonucu tamamen rastlantıya bağlıdır. Bu bağlamda istatistik, rasgelelik içeren olaylar, süreçler ve sistemler hakkında modeller kurmada, bu modellerden sonuçlar çıkarmada gerekli bilgileri sağlayan bir bilim dalıdır (Öztürk, 1993). Aşağıda ayrıntılarına girmeden temel olasılık kavramları ile ilgili kısa bilgiler verilecektir.

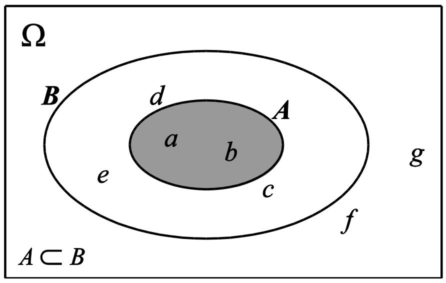
Bir deney yapıldığında, gerçekleşebilecek bütün sonuçların kümesine *örnek uzay* denir. Örnek uzay, Ω ya da S ile gösterilir. Bir paranın atılması deneyinde örnek uzay, sadece iki elemandan oluşan bir kümedir. Bunu $\Omega = \{Y, T\}$ şeklinde gösterebiliriz. Bir zarın atılması deneyi için örnek uzay, $\Omega = \{w_1, w_2, ..., w_6\}$ şeklindedir. Burada w_i, üzerinde i tane nokta bulunan zarı ifade etmektedir.

Örnek uzay bir kümedir. Kümenin net bir tanımı olmasa da, hakkında düşündüğümüz ne ise buna *küme* diyeceğiz. Kümeler büyük harfler ile gösterilecektir. Aşağıda, kümeler ile ilgili bazı temel kavramlar özetlenmiştir.

Boş Küme: Elemanı olmayan kümeye *boş küme* denir ve $\varnothing$ ile gösterilir.

Alt Küme: A ve B iki küme olmak üzere, A nın her elemanı aynı zamanda B nin de bir elemanı ise, A kümesi B kümesinin *alt kümesidir* denir ve $A \subset B$ ile gösterilir. Matematiksel olarak, $A \subset B \Leftrightarrow \forall\, x \in A$ için $x \in B$ şeklinde ifade edilir.

$\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ve Ω nın iki alt kümesi $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ olsun. Buna göre, A nın her elemanı aynı zamanda B nin de bir elemanı olup $A \subset B$ dir. $A \subset B$ bağıntısı şematik olarak Şekil (1.1.1) de verilmiştir.



Şekil 1.1.1 Altküme bağıntısı

A ve B kümeleri için $A \subset B$ ve $B \subset A$ kapsama bağıntıları sağlanıyorsa, A ve B *kümeleri eşittir* denir ve $A = B$ yazılır. Yani, A ve B eşit kümelerdir.

Arakesit (kesişim) Kümesi**:** Her iki kümeye de ait elemanların oluşturduğu kümedir. *Arakesit kümesi* matemetiksel olarak $A \cap B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ ve } x \in B\}$ şeklinde ifade edilir. Yani arakesit kümesi, ortak elemanların oluşturduğu kümedir.

Birleşim Kümesi: A ve B gibi iki kümeden en az birine ait elemanların oluşturduğu kümedir. *Birleşim kümesi* de $A \cup B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ veya } x \in B\}$ şeklinde ifade edilir.

Tümleme: Evrensel kümede olup da A kümesinde olmayan elemanların kümesi, A nın *tümleyen kümesidir* ve A^c ile gösterilir. A^c kümesi $A^c = \{x \in \Omega : \ x \notin A\}$ ile ifade edilir. Ayrıca, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ ve $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ dir.

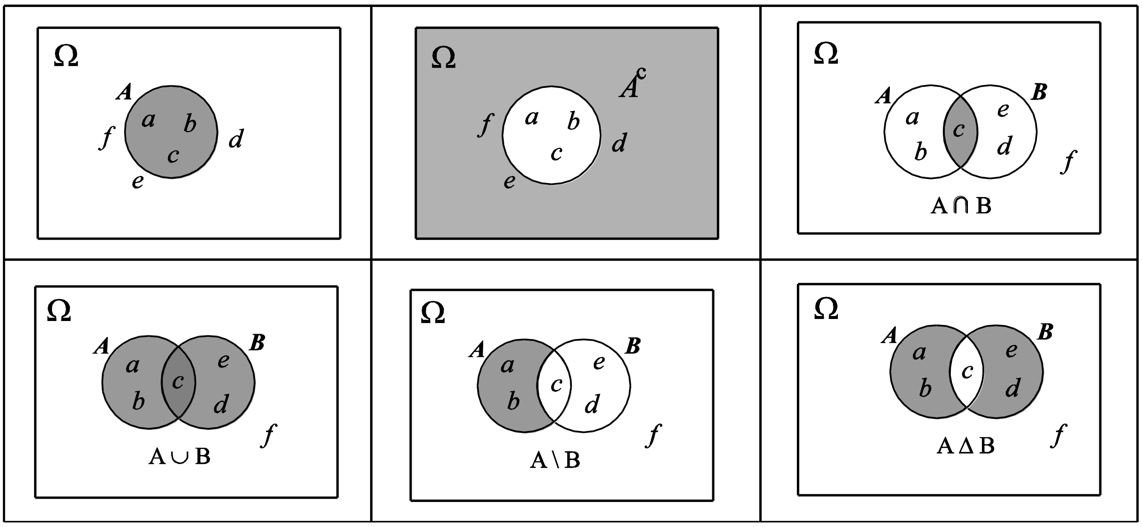
Fark Kümesi: Kümelerden birinde olup da diğerinde olmayan elemanların oluşturduğu kümedir ve $A \setminus B$ ile gösterilir. *Fark kümesi* bazen $A \cap B^c$ şeklinde de ifade edilir. Burada, $A \setminus B = A \cap B^c = \{x \in \Omega : x \in A \text{ ve } x \notin B\}$ dir.

Simetrik Fark Kümesi:: İki fark kümesinin birleşim kümesidir ve $A \Delta B$ ile gösterilir. *Simetrik fark kümesi* $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ veya $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$ şeklinde de ifade edilebilir.

$\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$ olmak üzere Ω nın $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{c, d, e\}$ alt kümelerini seçelim. Bu alt kümeler kullanılarak yukarıdaki işlemler Şekil (1.1.2) de gösterilmiştir. Bu kümeler,

$A^c = \{d, e, f\}$, $\quad A \cap B = \{c\}$, $\quad A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$,
$A \setminus B = \{a, b\}$, $\quad A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{a, b, d, e\}$

şeklindedir.



Şekil 1.1.2 Kümeler ve küme işlemleri (tararı alan ilgili kümeyi göstermektedir)

Kümeler üzerindeki bütün işlemler arakesit ve birleşim işlemlerine bağlıdır. Sayılabilir sayıdaki kümelerin bir dizisi $n \geq 1$ için A_n olsun. A_n lerin *sayılabilir birleşim kümesi*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in \Omega: \text{ en az bir } i \text{ için } x \in A_i\},$$

sayılabilir arakesit kümesi ise

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in \Omega: \text{ her } i \text{ için } x \in A_i\}$$

şeklinde ifade edilir. Diğer taraftan, kümelerin sayılabilir birleşimlerinin (ve arakesitlerinin) tümleyeni,

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \quad \text{ve} \quad \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$$

şeklinde olup dağılma kuralları

birleşimin kesişim üzerine dağılma özelliği: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

kesişimin birleşim üzerine dağılma özelliği: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

şeklindedir.

Tanım 1.1.1 Örnek uzayın bazı alt kümelerinin oluşturduğu bir kolleksiyona *sınıf* denir⊗

Sınıflar için $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{C}$ veya $\mathcal{A}$ gibi semboller kullanılacaktır. Bir paranın atılması deneyinde örnek uzay $\Omega = \{Y, T\}$ olup, $\mathcal{U}_1 = \{\Omega, \varnothing, \{Y\}\}$ ve $\mathcal{U}_2 = \{\Omega, \{T\}\}$ birer sınıftır. Örnek uzay $\Omega = \{a, b, c, d\}$ ise $\mathcal{U} = \{\Omega, \varnothing, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{b, c\}\}$ de bir sınıftır.

Tanım 1.1.2 Bir kümenin bütün alt kümelerinin oluşturduğu sınıfa o kümenin *kuvvet kümesi* denir⊗

Kuvvet kümesi $\sigma(\Omega)$ ile gösterilecektir. Bir kümenin n tane elemanı varsa kuvvet kümesindeki alt kümelerin sayısı 2^n dir. A kümesinin elemanlarının sayısı $n(A)$ ile gösterilecektir.

Örnek 1.1.1 $\Omega=\{a,b,c,d\}$ ise kuvvet kümesinde 16 tane alt küme vardır. Bunlar;

$$\sigma(\Omega)=\{\ \Omega,\ \emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{d\},\ \{a,b\},\ \{a,c\},\ \{a,d\},\ \{b,c\},$$
$$\{b,d\},\ \{c,d\},\ \{a,b,c\},\ \{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}\ \}$$

dir. Örnek uzayın elemanlarının sayısı sonlu sayıda olabilir. Ayrıca, örnek uzayın elemanları sayılabilir sonsuz çoklukta olabileceği gibi, sayılamayan çoklukta da olabilir. Böyle durumlarda, örnek uzayın kuvvet kümesi yukarıda olduğu gibi yazılamaz$\oplus$

Tanım 1.1.3 Ω boş olmayan bir küme, $\mathcal{U}$ da Ω nın bazı alt kümelerinden oluşan bir sınıf olsun. $\mathcal{U}$ sınıfı,

a) $\Omega\in\mathcal{U}$

b) her $A\in\mathcal{U}$ için $A^c\in\mathcal{U}$

c) her $A,\ B\in\ \mathcal{U}$ için $A\cup B\in\mathcal{U}$

özelliklerini sağlıyorsa, $\mathcal{U}$ sınıfına bir *cebir* denir. $\mathcal{U}$ sınıfı (c) yerine

c*) $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $A_n\in\mathcal{U}$ için $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\in\mathcal{U}$

özelliğini sağlıyorsa $\mathcal{U}$ sınıfına bir $\sigma-$*cebir* (*sigma cebir*) denir. $\mathcal{U}$ nun her elemanına bir *olay*, $(\Omega,\mathcal{U})$ ikilisine de *ölçülebilir bir uzay* denir$\otimes$

Tanımdan da anlaşılacağı gibi her $\sigma-$cebir aynı zamanda bir cebir olmasına rağmen tersi doğru değildir. Ancak, örnek uzay sonlu elemanlı ise cebir aynı zamanda $\sigma-$cebirdir.

Örnek 1.1.2 a) Kuvvet kümesi tanımdaki üç koşulu sağladığından bir $\sigma-$cebirdir. $\mathcal{U}=\sigma(\Omega)$ denirse, $\Omega\subset\Omega$ olduğundan $\Omega\in\mathcal{U}$ dır. Diğer taraftan, $A\in\mathcal{U}$ ise $A\subset\Omega$ olup, $A^c\subset\Omega$ olduğundan $A^c\in\mathcal{U}$ dur. Son olarak, $n\geq 1$ için $A_n\in\mathcal{U}$ ise her n için $A_n\subset\Omega$ ve Ω evrensel küme olduğundan $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\subset\Omega$ dır. Yani, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\in\mathcal{U}$ olup kuvvet kümesi bir sigma cebirdir.

b) $\Omega=\{a,b,c,d\}$ olsun. $\mathcal{U}_a=\{\Omega,\ \emptyset,\ \{a\},\ \{b,c,d\}\}$ sınıfı bir cebirdir. Bu cebir aynı zamanda $\sigma-$cebirdir. Ayrıca, $\mathcal{U}_b=\{\Omega,\ \emptyset,\ \{b\},\ \{a,c,d\}\}$ sınıfı da bir sigma cebirdir.

c) Ω sonsuz elemanlı herhangi bir küme olmak üzere $\mathcal{U}_1$ sınıfı

$\mathcal{U}_1=\{A\subset\Omega : A \text{ veya } A^c \text{ sonlu elemanlıdır}\}$

olarak tanımlansın. Bu sınıf bir cebir olmasına rağmen $\sigma-$cebir değildir. Önce $\mathcal{U}_1$ sınıfının bir cebir olduğunu gösterelim. $\Omega^c = \varnothing$ olup, $\varnothing$ nin eleman sayısı sonludur. O halde, $\Omega \in \mathcal{U}_1$ dir. Ayrıca, $A \in \mathcal{U}_1$ ise A ya da A^c sonlu elemanlıdır. A sonlu elemanlı ise, $(A^c)^c = A$ olup $A^c \in \mathcal{U}_1$ dir. A^c sonlu elemanlı ise, sonlu elemanlı kümeler $\mathcal{U}_1$ sınıfında olacağından $A^c \in \mathcal{U}_1$ dir. Son olarak, $\mathcal{U}_1$ deki herhangi iki küme A ve B olsun. Burada üç farklı durum olabilir: i) kümelerin ikisi de sonlu elemanlı ii) kümelerin her ikisinin de tümleyeni sonlu elemanlı iii) kümelerden birinin kendisi sonlu elemanlı diğerinin tümleyeni sonlu elemanlı olabilir. Her üç durumda da $A \cup B$ veya $(A \cup B)^c$ sonlu elemanlı olduğunun gösterilmesi gerekir. Şimdi bunları ayrı ayrı inceleyelim.

i) A ve B nin her ikiside sonlu elemanlı ise $A \cup B$ de sonlu elemanlıdır. Kendisi sonlu elemanlı kümeler $\mathcal{U}_1$ de olduğundan $A \cup B \in \mathcal{U}_1$ dir.

ii) A ve B nin her ikisinin de tümleyeli sonlu elemanlı ise $A^c \cap B^c$ de sonlu elemanlıdır ($(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ olup sonlu elemanlı kümelerin arakesiti de sonlu elemanlıdır). Yani, $A \cup B$ nin tümleyeni sonlu elemanlıdır. Tümleyeni sonlu elemanlı kümeler $\mathcal{U}_1$ de olduğundan $A \cup B \in \mathcal{U}_1$ dir.

iii) Son olarak A sonlu elemanlı, B nin de tümleyeni sonlu elemanlı olsun. Buna göre, $A^c \cap B^c$ de sonlu elemanlıdır ($(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \subset B^c$ olup sonlu elemanlı bir kümenin alt kümesi de sonlu elemanlıdır). Yani, $A \cup B$ nin tümleyeni sonlu elemanlıdır. O halde, $A \cup B \in \mathcal{U}_1$ dir.

Burada tanımlanan $\mathcal{U}_1$ sınıfı cebir olma koşullarını sağladığı için bir cebirdir. Bu sınıf bir cebir olmasına rağmen $\sigma-$cebir değildir. Bunu göstermek için tersine bir örnek vermek yeterlidir. Örnek uzay doğal sayılar kümesi ($\Omega = \mathbb{N}$) olsun. Her n için, $A_n = \{2n\}$ denirse, tek elemanlı kümeler $\mathcal{U}_1$ sınıfındadır (kendileri sonlu elemanlı). Bu sınıfın bir $\sigma-$cebir olabilmesi için bu kümelerin sayılabilir birleşimlerinin de bu sınıfta olması gerekir. Oysa sayılabilir birleşim kümesi ve tümleyeni

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{2, 4, 6, 8, \ \ldots \ \} \text{ ve } \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c = \{1, 3, 5, 7, \ \ldots \ \}$$

şeklinde olduğundan, her iki küme de sonlu elemanlı değildir. O halde, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \notin \mathcal{U}_1$ olup $\mathcal{U}_1$ sınıfı bir $\sigma-$cebir değildir.

d) Ω sayılamayan sonsuzlukta elemanı olan bir küme olsun. Ω nın bazı alt kümelerinden oluşan bir sınıf da

$$\mathcal{U}_2 = \{A \subset \Omega : A \text{ veya } A^c \text{ sayılabilir elemanlı}\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu sınıf $\sigma-$cebirin tanımındaki koşulları sağlar. Önce, $\Omega^c = \varnothing$ olup $\varnothing$ nin eleman sayısı sıfırdır. O halde $\Omega \in \mathcal{U}_2$ dir. Şimdi $A \in \mathcal{U}_2$ olsun. Buna göre, A ya da A^c sayılabilir elemanlı kümelerdir. A sayılabilir ise, $(A^c)^c = A$ olduğundan $A^c \in \mathcal{U}_2$ (tümleyeni sayılabilir) dir. A^c sayılabilir ise kendisi sayılabilir olan kümeler $\mathcal{U}_2$ sınıfına aittir ($A^c \in \mathcal{U}_2$) dir. Son olarak, bütün $n \geq 1$ için $A_n \in \mathcal{U}_2$ olsun. Seçilen A_n ler üç farklı durumda olabilir. Bütün n ler için A_n ler sayılabilir olabilir. Bu durumda, sayılabilir kümelerin sayılabilir birleşimleri de sayılabilir olduğundan $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{U}_2$ dir. Diğer taraftan, bütün n ler için A_n lerin tümleyenleri sayılabilir ise $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$ de sayılabilirdir. Buna göre,

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$$

eşitliğinden $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{U}_2$ dir. Son olarak, seçilen alt kümelerin bazılarının kendileri, diğerlerinin de tümleyeni sayılabilir olabilir. Kendileri sayılabilen olanları B_n, tümleyenleri sayılabilenleri de C_n ile gösterelim. Buna göre,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right)$$

olup $\bigcap_{j=1}^{\infty} C_j^c$ kümesi sayılabilirdir. Ayrıca,

$$\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right]^c = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k^c\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} C_j^c\right) \subset \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} C_j^c\right)$$

olduğundan sayılabilir bir kümenin her alt kümesi de sayılabilirdir. Buradan, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ kümesinin tümleyeni sayılabilir olup $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{U}_2$ dır. Yani, $\mathcal{U}_2$ sınıfı $\sigma-$cebir tanımındaki bütün koşullarını sağladığından bir $\sigma-$cebirdir$\oplus$

Teorem 1.1.1 Ω boş olmayan bir küme, $\mathcal{U}$ da Ω üzerinde bir sigma cebir olsun. Buna göre,

a) $\varnothing \in \mathcal{U}$

b) her n için $A_n \in \mathcal{U}$ ise $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{U}$

c) $A, B \in \mathcal{U}$ ise $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{U}$

dir.

İspat: a) $\mathcal{U}$ bir sigma cebir olduğundan $\Omega \in \mathcal{U}$ ve $\mathcal{U}$ daki her elemanın tümleyeni de $\mathcal{U}$ da olacağından $\Omega^c = \varnothing \in \mathcal{U}$ dur.

b) $\mathcal{U}$ bir sigma cebir olduğundan her elemanının tümleyeni de $\mathcal{U}$ dadır. Yani, bütün $n \geq 1$ için $A_n \in \mathcal{U}$ ise $A_n^c \in \mathcal{U}$ dir. Yine $\mathcal{U}$ bir sigma cebir olduğundan bunların sayılabilir birleşimleri de $\mathcal{U}$ dadır. Yani, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathcal{U}$ dir. Yine, sigma cebirin tanımından bu elemanın tümleyeni de $\mathcal{U}$ nun bir elemanıdır. Buradan da

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c \in \mathcal{U}$$

elde edilir.

c) $A, B \in \mathcal{U}$ için $A, B^c \in \mathcal{U}$ olup (b) den $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{U}$ dur$\lozenge$

Teorem 1.1.2 Ω kümesi üzerindeki iki sigma cebir $\mathcal{U}_1$ ve $\mathcal{U}_2$ olsun. Bu durumda $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ de bir sigma cebirdir.

İspat: Sigma cebirlerin arakesitlerinden oluşan $\mathcal{U}$ sınıfının bir sigma cebir olabilmesi için tanımdaki üç koşulu sağlaması gerekir. $\mathcal{U}_1$ ve $\mathcal{U}_2$ birer sigma cebir olduğundan $\Omega \in \mathcal{U}_1$ ve $\Omega \in \mathcal{U}_2$ olup $\Omega \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ dir. Ayrıca, $A \in \mathcal{U}$ ise $A \in \mathcal{U}_1$ ve $A \in \mathcal{U}_2$ dir. $\mathcal{U}_1$ ve $\mathcal{U}_2$ birer sigma cebir olduğundan $A^c \in \mathcal{U}_1$ ve $A^c \in \mathcal{U}_2$ dir. Yani, $A^c \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ olup, $A^c \in \mathcal{U}$ dur. Son olarak, $n \geq 1$ için $A_n \in \mathcal{U}$ ise arakesitin özelliğinden her n için $A_n \in \mathcal{U}_1$ ve $A_n \in \mathcal{U}_2$ olup, $\mathcal{U}_1$ ve $\mathcal{U}_2$ sigma cebir olduğundan $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{U}_1$ ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{U}_2$ dir. Buradan da $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{U}$ elde edilir. $\mathcal{U}$ sınıfı tanımdaki bütün koşulları sağladığından bir sigma cebirdir ◊

Teoremin genel hali aşağıda ispatsız olarak verilmiştir. İspat için herhangi bir olasılık teorisi kitabına bakılabilir (Öztürk, 1993).