HAFTA 4

1.3. Bağımsız Olaylar ve Koşullu Olasılık

$(\Omega,\mathcal{U},P)$ bir olasılık uzayı ve $B\in\mathcal{U}$ için $P(B)>0$ olsun. $\mathcal{U}$ sigma cebiri üzerinde P_B küme fonksiyonu,

$$P_B:\mathcal{U}\to[0,1]$$
$$A\to P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

şeklinde tanımlanan P_B küme fonksiyonu bir olasılık ölçüsüdür. Gerçekten, P bir olasılık ölçüsü olup her $A\in\mathcal{U}$ için $P(A)\geq 0$ ve $A\in\mathcal{U}$ için $P_B(A)=P(A\cap B)/P(B)\geq 0$ olduğu açıktır. Diğer taraftan, $\Omega\in\mathcal{U}$ olup $P_B(\Omega)=P(\Omega\cap B)/P(B)=P(B)/P(B)=1$ dir. Son olarak, $n\in\mathbb{N}$ için $A_n\in\mathcal{U}$ için A_n ler ayrık olayların bir dizisi olsun. Bu durumda, $C_n=A_n\cap B$ olaylar dizisi de ayrıktır. Buradan,

$$P_B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\frac{P\left(\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right]\cap B\right)}{P(B)}=\frac{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B)\right)}{P(B)}=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n\cap B)}{P(B)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(A_n\cap B)}{P(B)}=\sum_{n=1}^{\infty}P_B(A_n)$$

elde edilir. Dolayısı ile, P_B küme fonksiyonu bir olasılık ölçüsüdür. Bu olasılık ölçüsüne, B olayına göre koşullu olasılık ölçüsü denir.

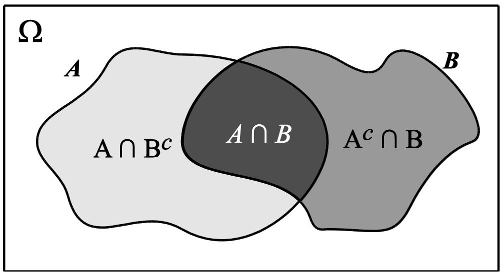
Tanım 1.3.1 $(\Omega,\mathcal{U},P)$ bir olasılık uzayı ve $A\in\mathcal{U}$ olsun. Yukarıdaki şekilde tanımlanan P_B olasılık ölçüsü için, $P_B(A)$ sayısına B bilindiğinde A nın *koşullu olasılığı* denir $\otimes$

$P_B(A)$ koşullu olasılığı için genellikle $P(A|B)$ gösterimi kullanılır. Tanıma göre, B verildiğinde A olayının koşullu olasılığı $P(A|B)=P(A\cap B)/P(B)$ dir. Buradan, $A\cap B$ olayının olasılığı $P(A\cap B)=P(B)P(A|B)$ şeklinde hesaplanabilir.

$A, B\in\mathcal{U}$ olayları $A=(A\cap B)\cup(A\cap B^c)$ ve $B=(A\cap B)\cup(A^c\cap B)$ şeklinde yazılabilir (Şekil (1.3.1)). Ayrıca, $(A\cap B)$ ve $(A\cap B^c)$ ayrık olaylar olup $B\in\mathcal{U}$ ve $0<P(B)<1$ olmak üzere,

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^c)=P(B)P(A|B)+P(B^c)P(A|B^c)$$

dir.



Şekil: 1.3.1 Bir olayın ayrık olaylar türünden yazılması

Daha genel olarak, $B_1, B_2, B_3, ..., B_n$ olayları Ω örnek uzayının bir parçalanması olsun (yani, B_j ler ayrık ve $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup ... \cup B_n = \Omega$). Eğer $i = 1, 2, ..., n$ için $P(B_i) > 0$ ise herhangi bir $A \in \mathcal{U}$ olayının olasılığı,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\, P(A|B_i)$$

şeklinde hesaplanır. $B_1, B_2, B_3, ..., B_n$ olayları Ω örnek uzayının bir parçalanması olmak üzere herhangi bir $A \in \mathcal{U}$ olayı,

$$A = A \cap \Omega = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup ... \cup B_n) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

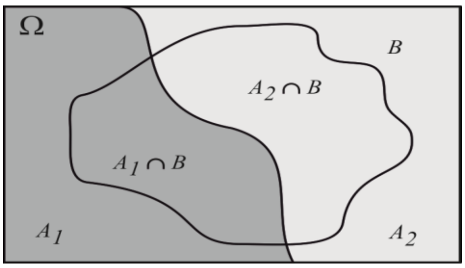
olarak yazıldığında, *Bayes formülü* olarak da bilinen $P(B_1 | A)$ koşullu olasılığı

$$P(B_1 | A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)} = \frac{P(B_1)\, P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\, P(A|B_i)}$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 1.3.1 İki kavanozdan birincisinde 5 sarı 5 de mavi top vardır. İkinci kavanozda ise 10 sarı 5 mavi top vardır. Birinci kavanozdan rasgele bir top çekilip ikinci kavanoza atılıyor. Daha sonra ikinci kavanozdan bir top çekiliyor. İkinci kavanozdan çekilen topun mavi olduğu verildiğinde, birinci kavanozdan çekilen topun mavi olması olasılığını hesaplayalım.

Kavanozlar K_1 ve K_2 olsun. $A_1 = \{K_1$ den Mavi top$\}$, $A_2 = \{K_1$ den Sarı top$\}$ ve $B = \{K_2$ den Mavi top$\}$ olaylarını tanımlayalım.



Şekil: 1.3.2 Bir olayın ayrık olaylar türünden yazılması

A_1 ile A_2 ayrık ve $A_1 \cup A_2 = \Omega$ olduğundan A_1 ve A_2, Ω nın bir parçalanmasını oluşturur. Buradan herhangi bir B kümesi ($B \subset \Omega$),

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)$$

şeklinde yazılabilir (Şekil (1.3.2)). Buna göre B olayının olasılığı da,

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2)$$
$$= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = (1/2)\,(6/16) + (1/2)\,(5/16) = (11/32)$$

olarak hesaplanmış olur. Dolayısı ile aranan olasılık

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{(1/2)(6/16)}{(11/32)} = \frac{(6/32)}{(11/32)} = \frac{6}{11}$$

dir.

Şimdi deneyi değiştirelim. Rasgele bir kavanoz seçip bu kavanozdan bir top çekelim. Çekilen topun mavi olduğu verildiğinde bunun birinci kavanozdan çekilmiş olması olasılığını hesaplayalım. Kavanozlar K_1 ve K_2 olmak üzere bu olaylar (Şekil (1.3.2))

$A_1 = \{K_1\text{'in seçilmesi}\}$, $A_2 = \{K_2\text{'nin seçilmesi}\}$ ve $B = \{\text{Mavi top çekilmesi}\}$

şeklinde yazılır. Yine, A_1 ile A_2 ayrık olaylar olup $A_1 \cup A_2 = \Omega$ dir. A_1 ve A_2 olayları Ω örnek uzayının bir parçalanması olduğundan herhangi bir $B \subset \Omega$ için B olayını

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)$$

şeklinde yazabiliriz. Buna göre, B olayının olasılığı

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = \frac{1}{2}\frac{5}{10} + \frac{1}{2}\frac{5}{15} = \frac{5}{12}$$

olup aranan olasılık bu defa,

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{(1/2)(5/10)}{(5/12)} = \frac{(1/4)}{(5/12)} = \frac{3}{5}$$

olur $\oplus$

Tanım 1.3.1 $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayı olsun. $A, B \in \mathcal{U}$ olayları için $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ise A ve B olayları *bağımsızdır* denir. $i = 1, 2, \ldots, n$ için $A_i \in \mathcal{U}$ olmak üzere,

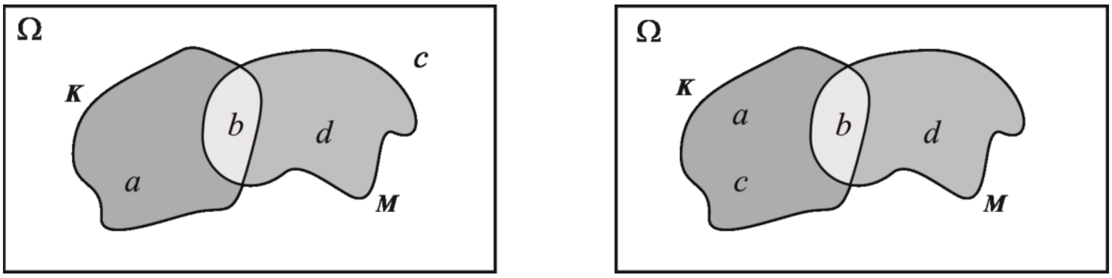
$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

oluyorsa, $A_1, A_2, ..., A_n$ olayları $n-$li bağımsızdır denir $\otimes$

Örnek 1.3.2 $\Omega = \{a,b,c,d\}$ ve $\mathcal{U} = \sigma(\Omega)$ olsun. $\mathcal{U}$ sigma cebiri açık olarak

$$\mathcal{U} = \{\varnothing, \Omega, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\} \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\} \{a,b,c\}, \\ \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}\}$$

şeklinde yazılır. $A \in \mathcal{U}$ için $P(A) = n(A)/4$ denirse $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayı olur. $A = \{a,b\}$ ve $B = \{b,d\}$ olayları için $P(A) = P(B) = 1/2$ dir. $A \cap B = \{b\}$ olup $P(A \cap B) = 1/4$ dür. Buradan, $P(A \cap B) = 0.25 = (0.5)(0.5) = P(A)P(B)$ olup A ve B olayları bağımsızdır.



Şekil: 1.3.3 Bağımlı ve bağımsız olaylar

Ancak $K = \{a,b,c\}$ ile $M = \{b,d\}$ olayları bağımsız değildir. $A \cap B = \{b\}$ olup, $P(A) = 3/4$, $P(B) = 1/2$ ve $P(A \cap B) = 1/4$ dir. Buradan

$$P(A \cap B) = 0.25 \neq (3/4)(1/2) = P(A)P(B)$$

dir. Yani, K ve M olayları bağımsız değildir $\oplus$

Örnek 1.3.3 $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayı ve $A, B \in \mathcal{U}$ olsun. A ve B bağımsız ise,

a) A^c ile B b) A ile B^c c) A^c ile B^c

olayları da bağımsızdır.

a) $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ ve $(A \cap B)$ ile $(B \setminus A)$ ayrık olaylardır. Dolayısı ile,

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap A^c) = P(A)P(B) + P(B \cap A^c)$$

eşitliği düzenlendiğinde

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)[1 - P(A)] = P(A^c)P(B)$$

bulunur. Buradan, A^c ile B olayları bağımsızdır.

b) Benzer şekilde, $A=(A\cap B)\cup(A\setminus B)$ olduğundan yine $(A\cap B)$ ile $(A\setminus B)$ ayrık olaylar olup $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^c)=P(A)P(B)+P(B^c\cap A)$ dir. Buradan,

$$P(A\cap B^c)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)[1-P(B)]=P(A)\,P(B^c)$$

olduğundan, A ile B^c olayları bağımsızdır.

c) A^c ile B^c olaylarının bağımsızlığı için $P(A^c\cap B^c)=P(A^c)P(B^c)$ olduğunun gösterilmesi gerekir. Kolayca görüleceği gibi,

$$\begin{aligned}P(A^c\cap B^c)&=P\left[(A\cup B)^c\right]=1-P(A\cup B)=1-\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]\\&=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)\\&=\left[1-P(A)\right]\left[1-P(B)\right]=P(A^c)P(B^c)\end{aligned}$$

dir. Yani, A^c ile B^c olayları bağımsızdır⊕

Örnek 1.3.4 $(\Omega,\mathcal{U},P)$ bir olasılık uzayı olsun. Ω ile $\varnothing$ nin herhangi bir $A\in\mathcal{U}$ olayı ile bağımsız olduğu

$$P(A\cap\Omega)=P(A)=P(A).1=P(A)\,P(\Omega)$$

ve

$$P(A\cap\varnothing)=P(\varnothing)=P(A).0=P(A)\,P(\varnothing)$$

eşitliklerinden açıktır⊕

Teorem 1.3.1 $(\Omega,\mathcal{U},P)$ bir olasılık uzayı ve $n\in\mathbb{N}$ için $A_n\in\mathcal{U}$ olsun. Bu durumda,

a) $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<\infty$ ise $P\left(\lim_{n\to\infty}\sup A_n\right)=0$

b) $A_n\in\mathcal{U}$ olayları bağımsız ve $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\infty$ ise $P\left(\lim_{n\to\infty}\sup A_n\right)=1$

dir.

İspat a) $\lim_{n\to\infty}\sup A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\subset\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$ olduğundan

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\sup A_n\right)=P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)\le P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)\le\sum_{k=n}^{\infty}P(A_k)$$

yazılır. $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$ yakınsak ($\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<\infty$) ise serinin kalan terimi sıfıra gider. Yani, $n\to\infty$ iken, $\sum_{k=n}^{\infty}P(A_n)\to 0$ dır. Buradan $n\to\infty$ iken,

$$0 \le P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \le P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \le \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \to 0$$

elde edilir. O halde, $P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0$ dır.

b) Önce, $0 < x < 1$ için $e^{-x} \ge 1 - x$ olduğunu hatırlayalım. Ayrıca, A_n dizisinin üst limitinin tanımı ile $C_m = \bigcup_{k=n}^{m} A_k$ dizisinin artan olduğu dikkate alındığında,

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right)$$

yazılır. Diğer taraftan, A_n ler bağımsız olaylar ise A_n^c ler de bağımsızdır. Buradan,

$$P\left(\left[\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right]^c\right) = P\left(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c\right) = \prod_{k=n}^{m} P(A_k^c) = \prod_{k=n}^{m} \left[1 - P(A_k)\right]$$

$$\le \prod_{k=n}^{m} e^{-P(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{m} P(A_k)}$$

elde edilir. $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ olduğundan ıraksak bir serinin kalan terimi sonsuza gider. Yani, $m \to \infty$ iken $\sum_{k=n}^{m} P(A_n) \to \infty$ olup $e^{-\sum_{k=n}^{m} P(A_k)} \to 0$ olur. Buradan, $m \to \infty$ iken

$$P\left(\left[\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right]^c\right) \to 0$$

yazılır. O halde,

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right)$$

olduğu dikkate alındığında, $m \to \infty$ iken,

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right) = 1 - P\left(\left[\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right]^c\right) \to 1$$

olup, $P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1$ elde edilir ◊