HAFTA 3

Teorem 1.2.3 $(\Omega,\mathcal{U},P)$ bir olasılık uzayı ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için $A_n\in\mathcal{U}$ olsun. A_n ler $\mathcal{U}$ daki artan ya da azalan olayların bir dizisi ise,

$$P\left(\lim_{n\to\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$$

dir.

İspat: A_n dizisi olsun. Teorem (1.2.2) ye göre, A_n dizisinin limiti vardır ve $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ dir. A_n dizisine bağlı olarak, B_n ayrık olayların bir dizisini

$$B_1=A_1 \text{ ve } n\geq 2 \text{ için } B_n=A_n\setminus A_{n-1}$$

şeklinde tanımlayalım. Önce, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$ eşitliğinin doğru olduğunu görelim. Bunun için $\forall n\in\mathbb{N}$ için $B_n\subset A_n$ olduğundan

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$$

yazılır. Diğer taraftan,

$$x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n \Rightarrow \exists n_0 \text{ için } x\in A_{n_0} \text{ ve } x\notin A_{n_0-1} \Rightarrow x\in B_{n_0} \Rightarrow x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$$

olduğundan $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$ elde edilir. Bu iki sonuç birleştirildiğinde sayılabilir birleşim kümelerinin eşit olduğu görülür. Yani, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$ dir. Diğer taraftan, her $n\in\mathbb{N}$ için $B_n\subset A_n$ olduğundan,

$$P(B_n)\leq P(A_n) \text{ ve } P(B_n)=P(A_n\setminus A_{n-1})=P(A_n)-P(A_{n-1})$$

dir. Ayrıca, olasılık ölçüsünün tanımından B_n ayrık olayları için

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n)$$

dır. Buradan,

$$P\left(\lim_{n\to\infty}A_n\right)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}P(B_k)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)+\ldots+P(B_{n-1})+P(B_n)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[P(A_1)+P(A_2\setminus A_1)+P(A_3\setminus A_2)+\ldots+P(A_{n-1}\setminus A_{n-2})+P(A_n\setminus A_{n-1})\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)+P(A_3)-P(A_2)+\ldots+P(A_n)-P(A_{n-1})\right] \qquad \text{elde}$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

edilir. Dolayısı ile, A_n olaylarının dizisi artan ise,

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

dir. Şimdi, A_n dizisi azalan (yani, $\forall n\in\mathbb{N}$ için $A_{n+1}\subset A_n$) olsun. O zaman, A_n^c dizisi artandır. Dolayısı ile, $P\left(\lim_{n\to\infty} A_n^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n^c)$ dir. Ayrıca, A_n azalan ve A_n^c artan olduğundan, Teorem (1.2.2) ye göre,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad , \qquad \lim_{n\to\infty} A_n^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$$

dir. Buna göre,

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right]^c\right) = 1-P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)$$

$$= 1-\lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = 1-\lim_{n\to\infty}\left[1-P(A_n)\right] = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

olduğu kolayca görülür ◊

Şimdi yukarıda ifade edilen ve ispatı birçok olasılık kitabında bulunan(Örneğin, Feller, 1970, sayfa 110-111) Fatou lemmasını ifade ve ispat edelim.

Teorem 1.2.4 (*Fatou Lemması*) $(\Omega,\mathcal{U},P)$ bir olasılık uzayı ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için $A_n\in\mathcal{U}$ olsun. Bu durumda,

$$P\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \le \liminf_{n\to\infty} P\left(A_n\right) \le \limsup_{n\to\infty} P\left(A_n\right) \le P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)$$

dir.

İspat: Herhangi bir a_n reel sayı dizisi için $\liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n$ olduğu açıktır (bir dizinin alt sınırlarının en büyüğü üst sınırlarının ek küçüğünden küçük ya da eşittir). Ayrıca, A_n olaylar dizisi için limit infimum ve limit supremum tanımlarından,

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{ve} \quad \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

olup Teorem (1.2.3) den A_n olaylarının dizisi artan ya da azalan ise limit ile olasılık ölçüsü yer değiştirebilir. Yani A_n ler artan ya da azalan ise $P\left(\lim\limits_{n\to\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$ dir.

$B_n = \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ denirse B_n ler artan olup $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf A_n$ dir. Buradan, B_n ler artan olduğundan $P\left(\lim\limits_{n\to\infty} B_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P(B_n)$ dir. Diğer taraftan, herhangi bir reel sayı dizisinin limiti varsa, bu limit aynı zamanda limit infimum (ya da limit supremum) değerine eşittir. Buradan $P\left(\lim\limits_{n\to\infty} B_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \inf P(B_n)$ yazılabilir. Ayrıca, her $n \in \mathbb{N}$ için $B_n \subset A_n$ dir. Yani, $P(B_n) \le P(A_n)$ dir. Bu sonuçlar birleştirildiğinde,

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \inf A_n\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} \inf P(B_n) \le \lim_{n\to\infty} \inf P(A_n)$$

elde edilir. Yani, $P\left(\lim\limits_{n\to\infty} \inf A_n\right) \le \lim\limits_{n\to\infty} \inf P(A_n)$ dir.

Benzer şekilde $D_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ denirse, D_n ler azalan olup $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n$ ve $P\left(\lim\limits_{n\to\infty} D_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P(D_n)$ dir. Ayrıca, her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \subset D_n$ olup $P(A_n) \le P(D_n)$ dir. Diğer taraftan, herhangi bir reel sayı dizisinin limiti varsa, bu limit aynı zamanda limit supremum değerine (ya da limit infimum) eşittir. Bu sonuçlar birleştirildiğinde de,

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \sup A_n\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} D_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(D_n) = \lim_{n\to\infty} \sup P(D_n) \ge \lim_{n\to\infty} \sup P(A_n)$$

eşitliği elde edilir. Buradan da,

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \inf A_n\right) \le \lim_{n\to\infty} \inf P\left(A_n\right) \le \lim_{n\to\infty} \sup P\left(A_n\right) \le P\left(\lim_{n\to\infty} \sup A_n\right)$$

şeklinde aranan eşitsizlik elde edilmiş olur ◊