

## HAFTA 5

### **1.4. Permütasyonlar ve Kombinasyonlar**

#### **1.4.1 Permütasyonlar**

Olasılık hesaplarında çok kullanılan kavramlardan biri de hiç şüphesiz nesnelerin tamamının ya da belli bir kısmının farklı sıralanmalarının sayısıdır. *Permütasyonun* Latince’de “*yer değiştirme*” anlamına gelen “*permütare*” sözcüğünden türediği sanılmaktadır (Oruç, 1982). Örneğin  $A, B$  ve  $C$  gibi üç nesnenin değişik sıralamaları  $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB$  ve  $CBA$  şeklinde olacaktır. Yani, değişik sıralamaların sayısı 6 dır. Benzer şekilde, bu üç nesnenin ikişerli sıralamaları,  $AB, AC$  ve  $BC$  şeklinde olabilir. Ancak, önce  $A$  sonra  $B$  sıralaması ( $AB$ ) ile önce  $B$  sonra  $A$  sıralamaları farklı ise, sıralamalar;  $AB, BA, AC, CA, BC$  ve  $CB$  şeklinde olur. Bu durumdaki sıralamaların sayısı ise 6 dır.

Dört öğretim üyesi arasında üç kişilik bir jüri oluşturmak istendiğini düşünelim. Bu dört öğretim üyesi  $A, B, C$  ve  $D$  olarak adlandırılmış olsun. Bu durumda,  $ABC$  sıralaması ile  $ACB$  aynı olacağından olası jüri üyeleri  $ABC, ABD, ACD$  ve  $BCD$  şeklinde olabilir. Yani, dört farklı şekilde jüri oluşturulabilir. Ancak, ilk seçilen jüri başkanı olacak denirse,  $ABC$  ile  $BAC$  farklı olacaktır. Bu durumda, farklı oluşumlar  $ABC, ABD, ADC, BAC, BAD, BDC, CAB, CAD, CBD, DAB, DAC, DBC$  şeklindedir (sayısı 12). Burada, sonraki seçilen iki kişi arasındaki sıralama önemli değildir. Bunların uzun uzun yazılması yerine, farklı oluşumların toplam sayılarının formülize edilmesi gerekir.

**Tanım 1.4.1 a)** 1 den  $n$  ye kadar pozitif tam sayıların çarpımına  $n - \text{faktöriyel}$  (ya da  $n - \text{çarpansal}$ ) denir ve  $n!$  ile gösterilir.

**b)** Nesnelerin kümesinin bir kısmının ya da tamamının belli bir sıralanmasına (ya da düzenlenmesine) *permütasyon* denir  $\otimes$

Tümü birlikte kullanılan  $n$  nesnenin permütasyonları sayısı  $n!$  dir. Bu sayı  $P(n, n)$  ile gösterilmiştir.  $n$  nesneden bir defada alınan  $r$  nesnenin permütasyonları (sıralanmalarının) sayısı ise  $P(n, r)$  ile gösterilir.

$n$  nesneden  $r$  tanesi  $r$  tane kutucuğa yerleştirilmek istensin. Bu durumda birinci kutucuğa  $n$  nesneden herhangi biri yerleştirilebilir (yani ilk kutucuk için  $n$  farklı seçim yapılabilir). Sonra ikinci kutucuk, geri kalan  $n - 1$  nesneden herhangi biri ile doldurulabilir (yani, ikinci kutucuk için

$n-1$  farklı seçim yapılır). Böyle devam edilirse, son kutucuk için geri kalan  $n-(r-1)$  nesneden biri ile doldurulur. Buna göre, farklı sıralamaların sayısı

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-(r-1)) = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!} = P(n,r)$$

olur. Elimizde bulunan  $n$  nesnenin ya hepsi farklıdır, ya da bazıları aynıdır. Buna göre,  $n$  nesnenin permütasyonlarının sayısı için bu iki durum farklı değerlendirilmelidir.

a) Birbirinden farklı  $n$  nesnenin permütasyonları sayısı:  $n=1$  ise, bu nesne bir tek biçimde yazılabilir ve permütasyon sayısı 1 dir. Yani,  $1!=1$  dir. Şimdi,  $n=2$  olsun. Bu nesnelere  $A$  ve  $B$  ise, sıralamalar,  $AB$  ve  $BA$  şeklinde olup, sayısı 2 dir. Yani, 2 nesnenin permütasyonları sayısı  $2!=2$  dir.  $n=3$  için sıralamalar;  $ABC$ ,  $ACB$ ,  $BAC$ ,  $BCA$ ,  $CAB$  ve  $CBA$  şeklinde olur ve sayısı  $3!=6$  dir. Tümevarım yöntemine göre,  $n-1$  nesnenin permütasyonları sayısı  $(n-1)!$  olsun.  $n$ .nci nesne geri kalan  $n-1$  nesne arasına  $n$  farklı şekilde yerleştirilebilir. O zaman, çarpma kuralı gereğince, bu sıralamaların sayısı da  $n(n-1)!$  olur. Bu değer de  $n!$  dir.

b) Şimdi,  $n$  nesneden  $n_1$  tanesi bir tür, geri kalanlardan  $n_2$  tanesi başka bir tür olmak üzere,  $n_k$  tanesi de başka bir türden nesne olsun. Yani, bu  $n$  nesne  $k$  farklı türden oluşsun. Bu durumda,  $k < n$  ve  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$  olduğu açıktır. Buna göre,  $n_1$  tane nesne aynı olduğundan sıralanışta  $n_1!$  tane sıralanış aynı, benzer nedenle  $n_2!$  sıralanış aynı olacaktır. Böylece,  $n$  nesnenin permütasyonları sayısı  $n! / (n_1! n_2! \dots n_k!)$  olur.

**Örnek 1.4.1** 1,2,3,4 ve 5 rakamlarının tümü kullanılarak toplam  $5!=120$  farklı sayı yazılabilir. Bunlardan;

a) Kaç tanesinde çift rakamlar tek rakamlardan önce gelir? Bu rakamlar dizisi içinde 3 tane tek (1,3 ve 5), 2 tane (2 ve 4) de çift rakam vardır. Çift rakamlar kendi aralarında  $2!$  sayıda sıralanır. Sonra tek rakamlar da kendi aralarında  $3!$  farklı şekilde sıralanabilir. O zaman toplam sayı  $2!(3!)=12$  dir. Bu sayılar,

24135 24153 24315 24351 24513 24531  
42135 42153 42315 42351 42513 42531

şeklinde dir.

b) Kaç tanesinde 2, 1 den hemen sonra gelir? (1,2) ikilisi beraber alınarak, toplam dört rakam varmış gibi düşünüldüğünde, farklı permütasyonların sayısı  $P(4,4) = 4! = 24$  dir.

c) Kaç tanesinde 2 rakamı 1 den önce gelir? Permütasyonlar içinde, 1 in 2 den önce geldiği sayıda 2 de 1 den önce gelir. O zaman aranan cevap,  $P(5,5)/2 = 5!/2 = 60$  dir.

d) kaç tanesinde 1 ve 2 rakamları 3 ve 4 rakamlarından önce gelir? Önce, 1, 2, 3 ve 4 rakamları kendi aralarında 4! Sayıda sıralanır. Oysa, toplam 5 tane rakam vardır. Koşullara uyan sıralamalar

1 2 3 4

1 2 4 3

2 1 3 4

2 1 4 3

olup 5 rakamının nereye geldiği önemli değildir. Buradaki her bir sıralama için 5 rakamı her bir sıralamadaki 5 farklı yere gelebilir. O zaman aranan sıralamaların sayısı  $4(5)=20$  dir. e)

Kaç tanesinde 1, 2 den önce, 2 de 3 den önce gelir? 1,2 ve 3 rakamlarının permütasyonları sayısı  $3!=6$  dir. O halde toplam sayı  $(5!/3!)=20$  dir.

f) Beş basamaklı sayılardan kaç tanesinde ilk iki rakamın toplamı 6 dan küçüktür? Bunun için, Birinci yerde 1 varsa, ikinci yer için 3 seçim (2,3,4) yapılabilir, Birinci yerde 2 varsa, ikinci yer için 2 seçim (1,3) yapılabilir, Birinci yerde 3 varsa, ikinci yer için 2 seçim (1,2) yapılabilir Birinci yerde 4 varsa, ikinci yer için 1 seçim (1) yapılabilir.

İlk iki basamağa yazılacak rakamlar önemli olup diğerlerinin sıralaması önemli değildir. İlk iki basamak doldurulduktan sonra geriye kalan 3 rakam ( $3!$  farklı şekilde yazılabilir) herhangi bir şekilde doldurulur. O zaman aranan sayı  $(3+2+2+1)3!=48$  dir.

g) Rakamlar yinelenmeden 4 basamaklı kaç sayı yazılabilir? Bunun için, birinci yere herhangi bir rakam (5 tanesinden biri) yazılır. Yani, birinci yer 5 farklı şekilde doldurulur. İkinci yer geri kalan 4 tanesinden biri ile, üçüncü yer geri kalan 3 tanesinden biriyle ve son yer de geri kalan 2 rakamdan biri ile doldurulur. Aranan sayı  $5.4.3.2=120$  dir.

h) Rakamlar yinelenebilir ise 4 basamaklı 625 sayı yazılabilir. Yani, birinci yer 5 farklı şekilde doldurulabilir. Aynı şekilde ikinci yer de 5 farklı şekilde doldurulabilir.

i) Rakamlar yinelenmeden 4 basamaklı tek sayıların sayısını bulalım. O zaman, elde edilecek sayı tek olacağından son basamak 3 farklı şekilde (1 3 ve 5) doldurulabilir. Birinci yer geri kalan 4 rakamdan biri ile, ikinci yer geri kalan 3 rakamdan biri ile ve üçüncü yer de geri kalan 2 rakamdan biri ile doldurulur. Yani, toplam sayı  $(4)(3)(2)(3)=72$  dir.

j)  $A, A, B, B, B, C, C, D, D, D$  nesnelere kaç farklı şekilde sıralanabilir. Dört farklı türden 10 nesne vardır. Buna göre, farklı sıralamaların sayısı için,  $n = 10, n_1 = n_4 = 2$  ve  $n_2 = n_3 = 3$  olup permütasyonların sayısı

$$10! / (2!3!3!2!) = 3628800 / (144) = 25200$$

dür  $\oplus$

Bir çember üzerindeki  $n$  farklı nesnenin permütasyonları sayısı  $(n-1)!$  dir. Örneğin, yuvarlak bir masa etrafına 4 kişi  $(4-1)! = 6$  farklı şekilde sıralanabilir. Burada, insanların saat yönünde hareket ettiği düşünülürse, bir kişi sabit tutularak diğerlerinin birer kaydırılması ile aranan permütasyonların sayısı bulunur.

### 1.4.2 Kombinasyonlar

**Tanım 1.4.2** Birbirinden farklı  $n$  nesne verilmiş olsun. Bu  $n$  nesneden  $k$  tanesinin farklı çekiliş sayısına  $n$  nesnenin  $k$  li kombinasyonu denir  $\otimes$

Tanımdan da anlaşılacağı gibi, burada iki durum vardır. 1) çekilen nesne geri konmadan (iadesiz) yeni bir çekiliş yapılır ya da 2) çekilen yerine konup (iadelî) yeni bir çekiliş yapılır.

**1) İadesiz (Yinelemesiz) Kombinasyon:**  $n$  nesneden  $k$  tanesi seçilmek istensin.  $k = 1$  ise  $n$  nesne içinde  $n$  farklı şekilde seçim yapılabilir.  $k = 2$  için nesneleri  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ile gösterelim. Buna göre seçimler,

$$a_1a_2, a_1a_3, \dots, a_1a_n, a_2a_1, a_2a_3, \dots, a_2a_n, a_3a_1, a_3a_2, \dots, a_3a_n, \dots, a_na_1, a_na_2, \dots, a_na_{n-1}$$

şeklinde olup sayısı  $n(n-1) = n!/(n-2)!$  dir.  $k = 3$  olsun. İlk çekilişte  $a_1, a_2, \dots, a_n$  den biri çekilir. Geriye  $n-1$  nesne kalır.  $n-1$  nesneden 2-li  $(n-1)(n-1-1) = (n-1)(n-2)$  kombinasyon yapılabilir.  $n$  nesnenin 3-lü kombinasyon sayısı  $n(n-1)(n-2) = n!/(n-3)!$  olur. O halde,  $n$  nesnenin  $(k-1)$ -li kombinasyonlarının sayısının

$$\frac{n!}{(n-(k-1))!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-2))$$

olduğunu kabul edelim ve  $k$ -li kombinasyonlarının sayısını bulalım.  $n$  nesnenin 1-li kombinasyonlarının sayısı  $n$  dir. Geriye  $n-1$  nesne kalır.  $(n-1)$  nesnenin  $(k-1)$ -li kombinasyonlarının sayısı,

$$\frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!}$$

dir. Bu son ifadenin her iki tarafı  $n$  ile çarpılırsa,

$$\frac{n(n-1)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

sayısı,  $n$  nesnenin  $k$ -li kombinasyon sayısı olur. Herhangi bir nesnenin çekiliş sırası önemli değilse, her  $k!$  çekiliş aynı olacağından aranan sayı,

$$C(n, r) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

dir.

2) **İadeli (Yinelemeli) Kombinasyon** 1,2,3 ve 4 rakamları ile kullanılan rakam bir daha kullanılmamak üzere 2 basamaklı sayı yazmak isteyelim. Bunların sayısının

$$P(4, 2) = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

olduğunu biliyoruz. Bu sayılar; 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43 dir. Kullanılan rakam bir daha kullanılabilir ise, 11, 22, 33 ve 44 sayıları da buna eklenmelidir. O zaman toplam sayı 16 olur. Yani,  $2^4$  tane farklı sayı yazılabilir. Yinelemeli kombinasyonda, iki farklı durum (sıra önemli ve sıra önemsiz) ayrı ayrı değerlendirilmelidir.

Birbirinden farklı  $n$  nesneden  $r$  tanesinin çekiliş sayısı,  $n$  nesnenin  $r$  li kombinasyonu olup sayısı  $C(n, r)$  veya  $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$  dir.  $n$  nesne  $r!$  yolla düzenlenebileceğinden,  $C(n, r)$  kombinasyonlarından herbiri için  $r!$  permütasyon olduğundan permütasyonların sayısı  $r!C(n, r) = P(n, r) = n!/(n-r)!$  olur. Ayrıca,  $C(n, r) = C(n, n-r)$  dir.

**Örnek 1.4.2 a)** Dört kişi arasından üç kişiden oluşan bir komisyon seçilmek isteniyor. Bu dört kişi  $A, B, C$  ve  $D$  olsun. Bu oluşumlar,  $ABC, ABD, ACD$  ve  $BCD$  şeklinde olur. Bunlar kendi aralarında  $3!$  şekilde sıralanabilir. Örneğin,  $A, B, C$  kişileri kendi aralarında  $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$  şeklinde sıralanabilir. Burada  $ABC$  ile  $ACB$  aynı komisyondur. Bu dört kişiden oluşacak üçlü kombinasyon ve permütasyonlar aşağıdaki şekilde oluşturulabilir.

Kombinasyonlar	Permütasyonlar
$ABC$	$ABC \ ACB \ BAC \ BCA \ CAB \ CBA$
$ABD$	$ABD \ ADB \ BAD \ BDA \ DAB \ DBA$
$ACD$	$ACD \ ADC \ CAD \ CDA \ DAC \ DCA$
$BCD$	$BCD \ BDC \ CBD \ CDB \ DBC \ DCB$

Burada, kombinasyonların sayısı,

$$C(4, 3) = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

permütasyonların sayısı (yani sıralama önemli) ise,

$$P(4, 3) = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

olup,  $P(4, 3) = 24 = 3!4 = 3!C(4, 3)$  dir.

b) 4 Fizikçi, 4 Kimyacı ve 2 Biyolog arasından 3 kişilik bir komisyon. hiç bir koşul olmadan  $C(10,3) = 120$  farklı şekilde seçilebilir.

i) Kurulda en az 1 biyolog olacak şekilde kaç farklı seçim yapılabilir. Bunun için önce hiç biyolog bulunmaması durumunu hesaplayalım. Kurulda 3 fizikçi olabilir, 3 kimyacı olabilir, 2 fizikçi 1 kimyacı veya 1 fizikçi 2 kimyacı olabilir. Buna göre,

$$3 \text{ fizikçi } C(4,3) = 4$$

$$3 \text{ kimyacı } C(4,3) = 4$$

$$2 \text{ fizikçi, 1 kimyacı } C(4,2)C(4,1) = 6(4) = 24$$

$$2 \text{ kimyacı 1 fizikçi } C(4,2)C(4,1) = 6(4) = 24$$

farklı şekilde seçilebilir. Bunların toplam sayısı 56 olup, en az 1 biyolog bulunduran kombinasyonların sayısı  $120 - 56 = 64$  dır.

ii) Kurulda her branştan 1 kişinin olabileceği kombinasyonların sayısı ise

$$C(4,1)C(4,1)C(2,1) = 4(4)2 = 32$$

dir  $\oplus$

$n$  nesnenin  $r_1$  tanesi birinci çeşit,  $r_2$  tanesi ikinci çeşit ve  $r_k$  tanesi de  $k$ .nci çeşit olsun. Yani, nesnelere tümü birbirinden farklı olmasın. Bu durumda,  $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$  olmak üzere, tümü birlikte alınan  $n$  nesnenin permütasyonları sayısı,

$$P(n; r_1, r_2, \dots, r_k) = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!} = \binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k}$$

dir.  $r$  ve  $n$  pozitif tamsayılar olmak üzere  $0 \leq r \leq n$  için,  $C(n+1, r) = C(n, r-1) + C(n, r)$  dir (Pascal kuralı). Yani,

$$\begin{aligned} C(n, r-1) + C(n, r) &= \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!(n-r+1)} + \frac{n!}{(r-1)!r(n-r)!} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \left[ \frac{1}{n-r+1} + \frac{1}{r} \right] \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \frac{n+1}{r(n-r+1)} = \frac{n!}{(r)!(n+1-r)!} = \binom{n+1}{r} = C(n+1, r) \end{aligned}$$

dir.

**Örnek 1.4.3 a)** 52 lik bir oyun kağıdı 4 oyuncuya

$$\binom{52}{13,13,13,13} = \frac{52!}{13!13!13!13!} = \binom{52}{13} \binom{39}{13} \binom{26}{13} \binom{13}{13}$$

farklı şekilde dağıtılabilir.

**b)** 2 kırmızı, 3 siyah ve 5 beyaz top sıraya dizilmek istensin. Aynı rekli toplar benzer ve aynı büyüklüktedir. Bu toplar,  $n = 10$ ,  $r_1 = 5$ ,  $r_2 = 3$  ve  $r_3 = 2$  olmak üzere bu toplar,

$$\binom{10}{5,3,2} = \frac{10!}{5!3!2!} = 2520$$

farklı şekilde sıraya dizilebilir.

**c)**  $n$  tane  $A$  ve  $r$  tane  $B$  ile, her dizide  $A$  ların tümü kullanılmak üzere  $A$  ve  $B$  lerden kaç farklı dizi oluşturulabilir.

$$\text{dizide } n \text{ tane } A \text{ ve } 0 \text{ tane } B \text{ ile } \binom{n}{0} = 1$$

$$\text{dizide } n \text{ tane } A \text{ ve } 1 \text{ tane } B \text{ ile } \binom{n+1}{1} = \frac{(n+1)!}{n!1!} = (n+1)$$

$$\text{dizide } n \text{ tane } A \text{ ve } 2 \text{ tane } B \text{ ile } \binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)!}{2!n!}$$

.....

$$\text{dizide } n \text{ tane } A \text{ ve } r \text{ tane } B \text{ ile } \binom{n+r}{r} = \frac{(n+r)!}{r!n!}$$

farklı dizi oluşturulabilir. Bunların toplam sayısı ise Pascal kuralına göre,

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+r}{r} = \binom{n+r+1}{r}$$

dir.

**d)** Bir sınıfta 12 kız ve 10 erkek öğrenci vardır. Sınıf, kızlar ve erkekler boy uzunluklarına göre sıralanacak biçimde kaç farklı yolla düzenlenebilir.

Kızlar ve erkekler kendi aralarında permütasyona tabii olmayacağından birbirinin benzeri gibi düşünülebilir. Buna göre 22 nesnenin permütasyonu,

$$\binom{22}{12,10} = \frac{22!}{12!10!} = 646646$$

dir  $\oplus$

Bir  $A$  kümesinde  $n$  tane nesne bulunsun.  $A$  kümesinin  $A_1, A_2, \dots, A_k$  formunda farklı parçalanmalarının sayısı,  $A_1$  de  $r_1$ ,  $A_2$  de  $r_2$  ve  $A_k$  de  $r_k$  nesne ve  $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$  olmak üzere,

$$\binom{n}{r_1, r_2, r_3, \dots, r_k} = \frac{n!}{r_1! r_2! r_3! \dots r_k!}$$

dir. Şimdi bunu gösterelim. Önce, nesnelere  $A_1$  içine  $C(n, r_1)$  farklı seçim yapılabilir. Sonra, geri kalan  $n - r_1$  nesneden  $A_2$  içine  $r_2$  tane nesne  $C(n - r_1, r_2)$  farklı seçim yapılabilir. Bu şekilde devam ettiğinde,  $i = 1, 2, 3, \dots, k$  için  $A_i$  içine  $r_i$  tane nesne  $C(n - r_1 - r_2 - \dots - r_{i-1}, r_i)$  farklı şekilde seçilebilir. O halde,  $A$  nın farklı parçalanmalarının sayısı  $(n - r_1 - r_2 - \dots - r_k) = 0! = 1$  olduğundan,

$$\binom{n}{r_1} \binom{n-r_1}{r_2} \binom{n-r_1-r_2}{r_3} \dots \binom{n-r_1-r_2-\dots-r_{k-1}}{r_k} \\ = \frac{n!}{r_1!(n-r_1)!} \frac{(n-r_1)!}{r_2!(n-r_1-r_2)!} \dots \frac{(n-r_1-r_2-\dots-r_{k-1})!}{r_k!(n-r_1-r_2-\dots-r_k)!} = \frac{n!}{r_1!r_2!r_3!\dots r_k!}$$

dir.

**Örnek 1.4.4 a)** 10 oyuncak 3 kardeş arasında en küçüğü 4 diğerleri üçer tane olmak üzere

$$\frac{10!}{4!3!3!} = 4200$$

farklı şekilde dağıtılabılır.

b) Bir kavanozda 1 den 7 ye kadar numaralandırılmış 7 top vardır. Önce 2 sini sonra 3 ünü en sonunda da 2 sini olmak üzere kaç farklı şekilde seçebiliriz. Başka bir ifade ile, 7 top 2 si  $A_1$  kutusuna, üçü  $A_2$  kutusuna ve geri kalan ikisi de  $A_3$  kutusuna kaç farklı şekilde yerleştirilebilir. Burada,  $(\{1,2\}, \{3,4,5\}, \{6,7\})$  ile  $(\{6,7\}, \{3,4,5\}, \{1,2\})$  farklı olduğundan bunlar sıralı parçalanmalardır. Buna göre, 7 toptan 2 si  $A_1$  kutusuna  $C(7,2)$  farklı şekilde, geri kalan 5 toptan üçü  $A_2$  kutusuna  $C(5,3)$  farklı şekilde ve son ikisi de  $A_3$  kutusuna  $C(2,2)$  farklı şekilde yerleştirilir. Yani, toplam sayı,

$$\binom{7}{2} \binom{5}{3} \binom{2}{2} = \frac{7!}{2!5!} \frac{5!}{3!2!} \frac{2!}{2!0!} = 210$$

dur  $\oplus$

**Sırasız Parçalanma a)** Bir sınıfta 12 öğrenci vardır. Her takımında 4 öğrenci olacak şekilde 12 öğrenci  $A_1, A_2$  ve  $A_3$  gruplarına ayrılmak istensin. Öğrencilerin her bir  $\{A_1, A_2, A_3\}$  parçalanma sayısı  $3! = 6$  dir. Buna göre, farklı parçalanmaların sayısı,

$$\binom{12}{4} \binom{8}{4} \binom{4}{4} \frac{1}{3!} = \binom{12}{4,4,4} \frac{1}{3!} = \frac{12!}{4!4!4!} \frac{1}{3!} = 5775$$

dir.



b) 10 öğrenci, biri 4 diğerleri üçer kişilik 3 gruba kaç farklı şekilde ayrılabilir. Burada,  $\{A_1, A_2, A_3\}$  grubu ile  $\{A_1, A_3, A_2\}$  grupları aynıdır. Buna göre farklı parçalanmaların sayısı,

$$\binom{10}{4} \binom{6}{3} \binom{3}{3} \frac{1}{2!} = \binom{10}{4,3,3} \frac{1}{2!} = \frac{12!}{4!3!3!} \frac{1}{2!} = 2100$$

dür  $\oplus$

**Binom Teoremi:**  $n$  pozitif bir tamsayı olmak üzere,

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n \\ &= \binom{n}{0} b^n + \binom{n}{1} b^{n-1} a^1 + \binom{n}{2} b^{n-2} a^2 + \dots + \binom{n}{n} a^n \end{aligned}$$

dir. Buradaki,  $\binom{n}{i}$  katsayılarına *Binom katsayıları* denir. Eşitlikte  $a = b = 1$  alınırsa,

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

elde edilir. Ayrıca,  $a = 1, b = -1$  denirse,

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

bulunur. Birinci eşitlikten ikinci eşitlik çıkartılırsa ( $n$  tek)

$$2 \left[ \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots + \binom{n}{n} \right] = 2^n \Rightarrow \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots + \binom{n}{n} = 2^{n-1}$$

iki terimin taraf tarafa toplanması ile ( $n$  çift)

$$2 \left[ \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n} \right] = 2^n \Rightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n} = 2^{n-1}$$

elde edilir. Burada  $n$  nin tek veya çift olması dikkate alınmalıdır. Diğer taraftan,

$$\binom{k}{0} \binom{r}{n} + \binom{k}{1} \binom{r}{n-1} + \binom{k}{2} \binom{r}{n-2} + \dots + \binom{k}{n} \binom{r}{0} = \binom{k+r}{n}$$

ya da,

$$\sum_{i=0}^n \binom{k}{i} \binom{r}{n-i} = \binom{k+r}{n}$$

olup, eşitlikte  $k = r = n$  alındığında

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

eşitliği elde edilmiş olur.