HAFTA 6

RASGELE DEĞİŞKENLER VE DAĞILIMLARI

2.1. Rasgele Değişkenler

İstatistik rasgelelik içeren olaylar, sistemler ve süreçler hakkında model kurmak ve bu modellerden sonuç çıkarmada gerekli bilgileri sağlayan bir bilim dalıdır (Öztürk, 1993). Bütün bilimlerin ortak amaçlarından biri, gerçek dünya hakkında bilgi sahibi olmaktır. Örneğin, yazı tura oynayan iki kişiden birinin çoğunlukla yazı atması, diğer oyuncuda paranın hileli olabileceği düşüncesi oluşabilir. O zaman, paranın hileli olup olmadığının sınanması gerekir. Böyle bir durumda, para atma deneyi tekrar edilerek düzgün bir paranın atılması halinde beklenen turaların sayısı ile karşılaştırma yapılır. Para havaya atıldığında, yazı ya da tura gelecektir. Ancak deney gerçekleşmeden önce hangisinin geleceği kesinlikle söylenemez. Para atma deneyinde Y paranın yazı gelen yüzünü, T de tura gelen yüzünü göstermek üzere örnek uzay $\Omega=\{Y,T\}$ olup, bu gözlemler ile herhangi bir matematiksel işlem yapılamaz. Yani, yazı ile tura ne toplanabilir ne de çıkartılabilir. Bu deney belli sayıda tekrar edildiğinde, kaç defa tura geleceği de söylenemez. Ancak kaç defa tura geleceği beklentisi verilebilir. Yani, deney sonunda gerçekleşen olaylar bilinen bir uzaya (reel sayılar) aktarılabilirse, bu uzayda işlemler yapılabilir. Örneğin para atma deneyinde X fonksiyonu yazı gözlendiğinde 0 tura gözlendiğinde 1 değerini alıyorsa, X in değer kümesi reel sayıların bir altkümesi olup, X in değer kümesinde matematiksel işlemler yapılabilir.

Tanım 2.1.1 $(\Omega,\mathcal{U},P)$ bir olasılık uzayı olmak üzere,

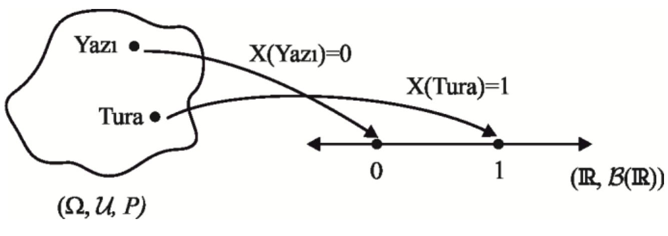
$$X:\Omega\to\mathbb{R}$$
$$w\to X(w)$$

şeklinde tanımlanan X fonksiyonu,

$$\forall a\in\mathbb{R} \text{ için } \{w:\ X(w)\le a\}\in\mathcal{U}$$

özelliğini sağlıyorsa, X fonksiyonuna bir *rasgele değişken* denir $\otimes$

Buradaki, $\{w: X(w)\le a\}\in\mathcal{U}$ kümesi $X^{-1}(-\infty,a]$ şeklinde de ifade edilebilir. Bir rasgele değişkenin değer kümesi $\mathbb{R}$ nin bir alt kümesidir ve D_X ile gösterilir.



Şekil 2.1.1 Rasgele değişkenin tanım ve değer kümesi

Rasgele değişken, örnek uzaydaki olayları reel sayılara aktaran bir fonksiyondur. Para atma deneyinde, 0 ve 1 değerleri gözlenmez. Gözlenenler yazı veya turadır. Dolayısı ile, analizler X in değer kümesinde yapılır.

Örnek 2.1.1 a) Bir paranın üç defa atılması deneyi için örnek uzay,

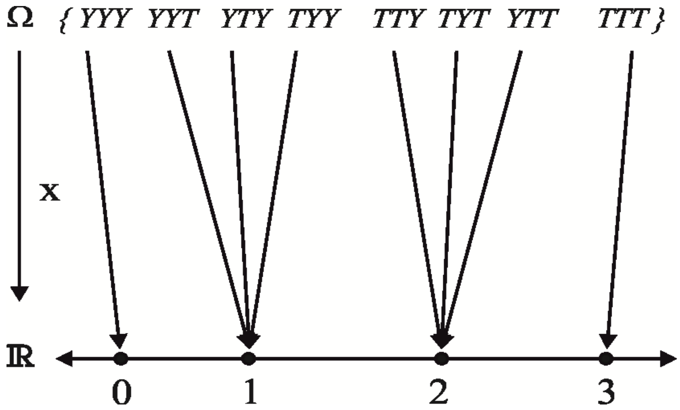
$$\Omega = \{YYY, YYT, YTY, TYY, TTY, TYT, YTT, TTT\}$$

dir. Sigma cebir de kuvvet kümesi ($\mathcal{U} = \sigma(\Omega)$) olmak üzere, örnek uzaydan reel sayılara giden X fonksiyonu da

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$w \to X(w) = \begin{cases} 0 & , \quad w = YYY \\ 1 & , \quad w = YYT, YTY, TYY \\ 2 & , \quad w = TTY, TYT, YTT \\ 3 & , \quad w = TTT \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Fonksiyonun değer kümesi $D_X = \{0,1,2,3\}$ olup $D_X \subset \mathbb{R}$ dir.



Şekil 2.1.2 Bir paranın üç defa atılması deneyi için rasgele değişkenin tanımı

Bu fonksiyon, bir para üç defa atıldığında gelen turaları sayan bir fonksiyondur. Şimdi bu fonksiyonun bir rasgele değişken olduğunu gösterelim. Bunun için, her $a \in \mathbb{R}$ için $X^{-1}(-\infty, a] = \{w : X(w) \leq a\} \in \mathcal{U}$ olduğunun gösterilmesi gerekir. $\mathcal{U} = \sigma(\Omega)$ olduğu için Ω nın bütün alt kümeleri $\mathcal{U}$ sigma cebirin bir elemanıdır. Buna göre,

$$a < 0 \Rightarrow \{w : X(w) \leq a\} = \varnothing \in \mathcal{U}$$
$$0 \leq a < 1 \Rightarrow \{w : X(w) \leq a\} = \{YYY\} \in \mathcal{U}$$
$$1 \leq a < 2 \Rightarrow \{w : X(w) \leq a\} = \{YYY, YYT, YTY, TYY\} \in \mathcal{U}$$
$$2 \leq a < 3 \Rightarrow \{w : X(w) \leq a\} = \{YYY, YYT, YTY, TYY, TTY, TYT, YTT\} \in \mathcal{U}$$
$$a \geq 3 \Rightarrow \{w : X(w) \leq a\} = \Omega \in \mathcal{U}$$

olduğundan, X fonksiyonu bir rasgele değişkendir.

b) $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayı ve $A \in \mathcal{U}$ olmak üzere, X fonksiyonu

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$w \to X(w) = \begin{cases} 1 & , \quad w \in A \\ 0 & , \quad w \notin A \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Fonksiyonun değer kümesi $D_X = \{0,1\}$ dir (fonksiyon gösterge veya indikatör (indicator) fonksiyonu olarak bilinir ve genellikle $I_A(w)$ ile gösterilir). Gösterge fonksiyonunun da bir rasgele değişken olduğunu gösterelim. Bunun için, her $a \in \mathbb{R}$ için $\{w : X(w) \leq a\} \in \mathcal{U}$ olduğunun gösterilmesi gerekir. Kolayca görüleceği gibi,

$$a < 0 \quad \Rightarrow \{w : X(w) \leq a\} = \varnothing \in \mathcal{U}$$
$$0 \leq a < 1 \Rightarrow \{w : X(w) \leq a\} = A^c \in \mathcal{U}$$
$$a \geq 1 \quad \Rightarrow \{w : X(w) \leq a\} = \Omega \in \mathcal{U}$$

dir. Yani, her $a \in \mathbb{R}$ için $\{w : X(w) \leq a\} \in \mathcal{U}$ olup, X bir rasgele değişkendir.

c) $\Omega = [-1,1]$, $\mathcal{U} = \mathcal{B}(\Omega)$ ve $A \in \mathcal{U}$ için $P(A) = "A$ nın aralık uzunluğu$"/2$ olarak tanımlandığında $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayıdır. X fonksiyonu,

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$w \to X(w) = w^2$$

olarak tanımlansın. Fonksiyonun değer kümesi $D_X = [0,1]$ olup bu fonksiyon da bir rasgele değişkendir. Şimdi bunu gösterelim. Önce, $X(w)$ pozitif bir reel sayı olduğundan $a < 0$ için $\{w : X(w) \leq a\} = \varnothing \in \mathcal{U}$ olduğu açıktır. Diğer taraftan, $0 \leq a < 1$ için,

$$\{w : X(w) \leq a\} = \{w : w^2 \leq a\} = \{w : -\sqrt{a} \leq w \leq \sqrt{a}\} = \{w : w \leq \sqrt{a}\} \setminus \{w : w \leq -\sqrt{a}\} \in \mathcal{U}$$

dır (Problem 2.7.1). Ayrıca, $a \geq 1$ için, $\{w : X(w) \leq a\} = \Omega \in \mathcal{U}$ olduğu açıktır. Buna göre X fonksiyonu, her $a \in \mathbb{R}$ için $\{w : X(w) \leq a\} \in \mathcal{U}$ koşulunu sağladığından bir rasgele değişkendir $\oplus$

Yukarıdaki örnekte de görüldüğü gibi rasgele değişkenlerin değer kümesi, reel sayıların bazen sayılabilir, bazen de sayılamayan bir alt kümesidir.

Tanım 2.1.2 Bir X rasgele değişkeninin değer kümesi D_X,
reel sayıların sayılabilir bir alt kümesi ise X e *kesikli* bir rasgele değişken,
reel sayıların sayılamayan bir alt kümesi ise X e *sürekli* bir rasgele değişken
denir $\otimes$

Bu tanıma göre, Örnek (2.1.1) de verilen rasgele değişkelerden, (a) ve (b) dekiler kesikli, (c) deki ise süreklidir. Bir paranın n defa atılması deneyinde gelen turaları sayan rasgele değişken kesikli bir rasgele değişkendir. Ayrıca, bir paranın tura gelinceye kadar atılması deneyinde yapılan denemeleri sayan fonksiyon da kesikli bir rasgele değişkendir. Diğer taraftan, bir kişinin ağırlığı veya boy uzunluğu sürekli rasgele değişkenlerdir.

Bir deney sonunda, olabilecek bütün sonuçların kümesi sayılabilir olabilir. Bu küme sonlu elemanlı bir küme de olabilir. Ayrıca, örnek uzay $\Omega=[0,1]$ gibi sayılamayan bir küme olabilir. Böyle bir durumda, Ω dan $\mathbb{R}$ ye kesikli bir rasgele değişken tanımlanabilir. Örneğin,

$$X:\Omega\to\mathbb{R}$$

$$w\to X(w)=\begin{cases}0 & , \quad 0\le w\le 0.5\\ 1 & , \quad 0.5<x\le 1\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonunun değer kümesi $D_X=\{0,1\}$ dir. $\Omega=[0,1]$, $\mathcal{U}=\mathcal{B}(\Omega)$ ve $A\in\mathcal{U}$ için $P(A)=$"A nın aralık uzunluğu" olarak tanımlandığında $(\Omega,\mathcal{U},P)$ bir olasılık uzayı olup Ω sayılamayan bir küme olmasına rağmen, X fonksiyonu kesikli bir rasgele değişkendir. Rasgele değişkenin kesikli ya da sürekli olması fonksiyonun tanımı ile ilgili görünse de, örnek uzayın yapısına da bağlıdır.

Bir hasta doktora gittiğinde doktor koyduğu teşhisten sonra vereceği ilaçları kullanması ile hastaya ateşinin düşeceğini söyleyebilir. Buna rağmen hastanın ateşi düşmeyebilir veya beklediği derecede düşmeyebilir. Bu sadece bir beklenti olup ateşin ne kadar düşeceği konusunda kesin bir şey söylenemez. Bu sadece istatistiki bulguların bir sonucudur. Bununla birlikte, ilaçların düzenli bir şekilde kullanılması ile ateşin 2 ile 3 derece arasında düşebileceği söylenebilir. Böyle bir deney için, ölçülen ateşin derecesi sürekli bir rasgele değişkendir.

Örnek 2.1.2 X ve Y herhangi iki rasgele değişken ve c ($c\in\mathbb{R}$) de sabit bir reel sayı olsun. Buna göre,

a) cX	b) $X+Y$	c) $\lvert X\rvert$	d) XY
e) X^2	f) $\max\{X,Y\}$	g) $\min\{X,Y\}$	

fonksiyonları da birer rasgele değişkendir (Öztürk, 1993) . Bunlardan (c), (d), (e), (f) ve (g) de verilen fonksiyonların birer rasgele değişken olduğunu gösterelim.

c) X bir rasgele değişken olduğundan, her $a\in\mathbb{R}$ için $\{w:X(w)\le a\}\in\mathcal{U}$ dır. $|X|$ fonksiyonunun bir rasgele değişken olduğunu göstermek için, her $a\in\mathbb{R}$ için

$$\{w:|X|(w)\le a\}=\{w:|X(w)|\le a\}\in\mathcal{U} \ , \forall a\in\mathbb{R}$$

olduğunun gösterilmesi gerekir. Buna göre, $a<0$ ise $\{w:|X(w)|\le a\}=\varnothing\in\mathcal{U}$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $a\ge 0$ için $\{w:X(w)\le a\}\in\mathcal{U}\Leftrightarrow\{w:X(w)<a\}\in\mathcal{U}$ olduğundan (Problem (2.7.1))

$$\{w:|X(w)|\le a\}=\{w:-a\le X(w)\le a\}=\{w:X(w)\le a\}\setminus\{w:X(w)<-a\}\in\mathcal{U}$$

dir. Yani, $|X|$ de bir rasgele değişkendir.

d) $a<0$ ise, $\{w: X^2(w) \le a\} = \varnothing \in \mathcal{U}$ olduğu açıktır. $a \ge 0$ için $\{w: X^2(w) \le a\} \in \mathcal{U}$ olduğunun da gösterilmesi gerekir. Bunun için,

$$\{w: X^2(w) \le a\} = \{w: X(w) \le \sqrt{a}\ \} \setminus \{w: X(w) < -\sqrt{a}\ \} \in \mathcal{U}$$

olduğundan X bir rasgele değişken ise X^2 de bir rasgele değişkendir.

e) Kolayca görüleceği gibi, (a), (b) ve (d) de verilen fonksiyonlar birer rasgele değişken ise XY,

$$X\,Y = ((X+Y)^2 - (X-Y)^2)/4$$

olarak yazılabildiğinden, $X\,Y$ de bir rasgele değişkendir.

f) X ve Y nin her ikisi de rasgele değişken olduğundan, her $a \in \mathbb{R}$ için

$$\{w: X(w) \le a\} \in \mathcal{U} \text{ ve } \{w: Y(w) \le a\} \in \mathcal{U}$$

dır. Buna göre, her $a \in \mathbb{R}$ için $\max\{X,Y\}(w) = \max\{X(w), Y(w)\}$ olmak üzere,

$$\{w: \max\{X,Y\}(w) \le a\} = \{w: X(w) \le a\} \cap \{w: Y(w) \le a\} \in \mathcal{U}$$

olup $\max\{X,Y\}$ de bir rasgele değişkendir.

g) Benzer şekilde, her $a \in \mathbb{R}$ için $\min\{X,Y\}(w) = \min\{X(w), Y(w)\}$ olmak üzere,

$$\{w: \min\{X,Y\}(w) \le a\} = \{w: X(w) \le a\} \cup \{w: Y(w) \le a\} \in \mathcal{U}$$

olduğundan $\min\{X,Y\}$ de bir rasgele değişkendir $\oplus$

2.2. Dağılım Fonksiyonları

Bir rasgele değişkenin özelliklerini incelemek için, o rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu bilinmelidir. Dağılım fonksiyonu, rasgele değişkeni en iyi karakterize eden fonksiyondur. Diğer bütün özellikler dağılım fonksiyonu ile ilgilidir.

Tanım 2.2.1 $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayı, X de Ω üzerinde tanımlı bir rasgele değişken olmak üzere, P olasılık ölçüsü yardımı ile reel sayılardan $[0,1]$ aralığına,

$$F: \mathbb{R} \to [0,1]$$
$$x \to F(x) = P(\{w: X(w) \le x\})$$

şeklinde tanımlanan F fonksiyonuna, X rasgele değişkeninin *dağılım fonksiyonu* (birikimli dağılım fonksiyonu) denir $\otimes$

Dağılım fonksiyonu genellikle, $F(x) = P(X \le x)$ şeklinde gösterilir. Bir X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu için öncelikle $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ olasılık uzayının belirli olması gerekir.

$(\Omega,\mathcal{U},P)$ bir olasılık uzayı, X de Ω üzerinde tanımlı bir rasgele değişken olsun. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ reel sayılar üzerindeki Borel cebirini göstermek üzere,

$$X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))=\{A\in\mathcal{U}:A=\{w\in\Omega:X(w)\in B\},B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

şeklinde tanımlanan $X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sınıfı Ω üzerinde bir sigma cebirdir (Öztürk, 1993).

Teorem 2.2.1 $(\Omega,\mathcal{U},P)$ bir olasılık uzayı, X bir rasgele değişken, F de X in dağılım fonksiyonu olsun. Buna göre,

a) F azalmayan bir fonksiyondur.

b) F sağdan süreklidir.

c) $\lim_{x\to-\infty} F(x)=0$ ve $\lim_{x\to\infty} F(x)=1$.

İspat a) $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ olmak üzere, $x_1\le x_2$ ise $\{w:X(w)\le x_1\}\subset\{w:X(w)\le x_2\}$ olup Teorem (1.2.1d) ye göre ($A\subset B$ ise $P(A)\le P(B)$ dir),

$$F(x_1)=P(\{w:X(w)\le x_1\})\le P(\{w:X(w)\le x_2\})=F(x_2)$$

yazılır. Yani, $x_1\le x_2$ ise $F(x_1)\le F(x_2)$ dir. Bu da F nin azalmayan olduğunu gösterir.

b) Fonksiyonun sağdan sürekli olduğunu göstermek için $\lim_{h\to0^+} F(x+h)=F(x)$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Bunun için, $A_n=\{w:X(w)\le x+1/n\}$ şeklinde azalan olayların bir dizisini tanımlayalım. Bu durumda Teorem (1.2.2) ye göre A_n dizisinin limiti vardır ve

$$\lim_{n\to\infty} A_n=\lim_{n\to\infty}\{w:X(w)\le x+1/n\}=\{w:X(w)\le x\}$$

dir. A_n ler azalan olayların bir dizisi olduğundan limit ile olasılık ölçüsü yer değiştirilebilir (Teorem (1.2.3)). Buna göre $h=1/n$ için,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0^+} F(x+h)&=\lim_{n\to\infty} F(x+1/n)=\lim_{n\to\infty} P\left(\{w:X(w)\le x+1/n\}\right)=\lim_{n\to\infty} P\left(A_n\right)\\&=P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)=P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{w:X(w)\le x+1/n\}\right)=P\left(\{w:X(w)\le x\}\right)=F(x)\end{aligned}$$

olduğundan F dağılım fonksiyonu sağdan süreklidir.

c) $A_n=\{w:X(w)\le n\}$ seçildiğinde, A_n artan olayların bir dizisi olup limiti vardır (Teorem (1.2.2)). Buna göre $\lim_{n\to\infty} A_n=\lim_{n\to\infty}\{w:X(w)\le n\}=\Omega$ olup limit ile olasılık ölçüsü yer değiştirebilir. Buradan da,

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(n) = \lim_{n\to\infty} P\left(\{w : X(w) \le n\}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = P(\Omega) = 1$$

elde edilir. $\mathrm{B}_n = \{w : X(w) \le -n\}$ azalan bir dizi olup, $\lim_{n\to\infty} B_n = \varnothing$ dir. Buradan da,

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} F(-x) = \lim_{n\to\infty} F(-n) = \lim_{n\to\infty} P\left(\{w : X(w) \le -n\}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} P(\mathrm{B}_n) = P\left(\lim_{n\to\infty} \mathrm{B}_n\right) = P(\varnothing) = 0$$

şeklinde aranan sonuç elde edilmiş olur ◊

Teorem 2.2.2 X bir rasgele değişken, F de X in dağılım fonksiyonu olsun. Bu durumda,

a) $a,b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ ise $P(\{w:\ a < X(w) \le b\}) = F(b) - F(a)$

b) $a \in \mathbb{R}$ için, $P(\{w:\ X(w) = a\}) = F(a^+) - F(a^-)$

dır. Burada $F(a^+)$ ve $F(a^-)$ sırası ile fonksiyonun a noktasındaki sağdan ve soldan limitlerini göstermektedir.

İspat a) $a,b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ için, $\{w:\ X(w) \le b\}$ kümesi

$\{w : X(w) \le b\} = \{w : X(w) \le a\} \cup \{w : a < X(w) \le b\}$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, $\{w:\ X(w) \le a\}$ ile $\{w : a < X(w) \le b\}$ kümeleri ayrıktır. Buradan,

$$F(b) = P(\{w:\ X(w) \le b\}) = P(\{w:\ X(w) \le a\}) + P(\{w:\ a < X(w) \le b\})$$
$$= F(a) + P(\{w:\ a < X(w) \le b\})$$

olup aranan eşitlik $P(\{w:\ a < X(w) \le b\}) = F(b) - F(a)$ şeklinde bulunur.

b) $A_n = \{w : a - (1/n) < X(w) \le a + (1/n)\}$ seçildiğinde A_n azalan bir dizi olup Teorem (1.2.2) ye göre $\lim_{n\to\infty} A_n = \{w : X(w) = a\}$ dır. Ayrıca, Teorem (1.2.3) e göre, olasılık ölçüsü ile limit yer değiştirebilir. Teoremdeki (a) sonucu kullanıldığında,

$$P\left(\{ w : X(w) = a \}\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$
$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\left\{w : a - \frac{1}{n} < X(w) \le a + \frac{1}{n}\right\}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[F\left(a + \frac{1}{n}\right) - F\left(a - \frac{1}{n}\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} F\left(a + \frac{1}{n}\right) - \lim_{n\to\infty} F\left(a - \frac{1}{n}\right) = F(a^+) - F(a^-)$$

şeklinde aranan sonuç elde edilir ◊

Örnek 2.2.1 a) Bir paranın üç defa atılması deneyi için Örnek (2.1.1a) daki gelen turaları sayan rasgele değişkenin dağılım fonksiyonunu bulalım. Bu deney için örnek uzay,

$$\Omega = \{YYY, YYT, YTY, TYY, TTY, TYT, YTT, TTT\}$$

olup sigma cebir, kuvvet kümesi ($\mathcal{U} = \sigma(\Omega)$) olsun. $A \in \mathcal{U}$ için $P(A) = n(A)/8$ olasılık ölçüsü tanımlandığında, $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayıdır. Rasgele değişkenin değer kümesi $D_X = \{0,1,2,3\}$ dir. Bu rasgele değişkenin dağılım fonksiyonunu bulalım. Önce, $x < 0$ için $\{w : X(w) \le x\} = \emptyset$ olduğundan, $F(x) = 0$ ve $x \ge 3$ için $\{w : X(w) \le x\} = \Omega$ olup $F(x) = 1$ olduğu açıktır. Fonksiyonun diğer değerleri,

$0 \le x < 1$ için, $F(x) = P(\{w : X(w) \le x\}) = P(\{YYY\}) = 1/8$

$1 \le x < 2$ için, $F(x) = P(\{w : X(w) \le x\}) = P(\{YYY, YYT, YTY, TYY\}) = 4/8$

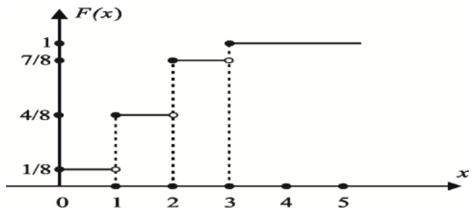
$2 \le x < 3$ için,

$F(x) = P(\{w : X(w) \le x\}) = P(\{YYY, YYT, YTY, TYY, TTY, TYT, YTT\}) = 7/8$

şeklindedir. Buna göre, X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu,

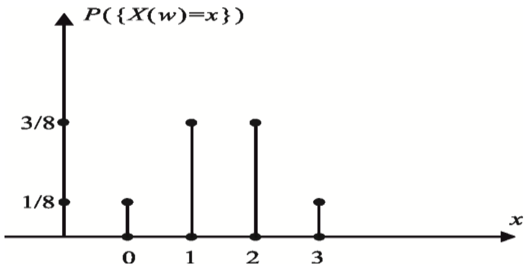
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1/8 & , \quad 0 \le x < 1 \\ 4/8 & , \quad 1 \le x < 2 \\ 7/8 & , \quad 2 \le x < 3 \\ 1 & , \quad x \ge 3 \end{cases}$$

grafiği de Şekil (2.2.1) de verildiği gibidir.



Şekil 2.2.1 Bir paranın üç defa atılması deneyi için tanımlanan rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu

Fonksiyonun açık ifadesinden ve grafiğinden görüldüğü gibi, dağılım fonksiyonu azalmayan ve sağdan süreklidir.



Şekil 2.2.2 Bir paranın üç defa atılması deneyi için tanımlanan rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu

Teorem(2.2.2b) ye göre, rasgele değişkenin 0,1,2 ve 3 değerleri için,

$P(\{w: X(w)=0\}) = (1/8) - 0 = 1/8,\qquad P(\{w: X(w)=1\}) = (4/8) - (1/8) = 3/8$
$P(\{w: X(w)=2\}) = (7/8) - (4/8) = 3/8,\qquad P(\{w: X(w)=3\}) = 1 - (7/8) = 1/8$

olasılıkları hesaplanır. Bununla birlikte $x \in \mathbb{R} \setminus D_X$ için, $P(\{w: X(w) \le x\}) = 0$ olduğu açıktır.

Kesikli rasgele değişkenlerde olasılık fonksiyonu bazen $x \in D_X$ için

$\{w: X(w)=x\}$	0	1	2	3
$P(\{w: X(w)=x\})$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

şeklinde tablo halinde verilir.

Örnek 2.2.2 $\Omega = [-1,1]$, sigma cebir de Ω üzerindeki Borel cebiri ($\mathcal{U} = \mathcal{B}(\Omega)$) olsun. Olasılık ölçüsü, $A \in \mathcal{U}$ için $P(A) =$ "A nın aralık uzunluğu"$/2$ olarak tanımlandığında, $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayı olur. Buna göre,

a)

$X : \Omega \to \mathbb{R}$
$w \to X(w) = |w|$

b)

$Y : \Omega \to \mathbb{R}$
$w \to Y(w) = w^2$

şeklinde tanımlanan X ve Y rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonlarını bulalım.

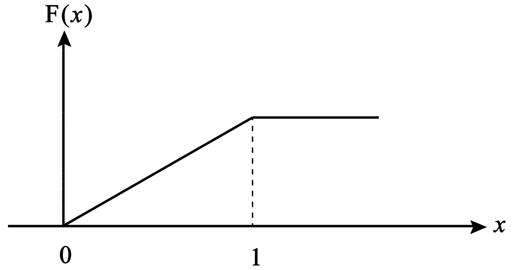
a) $D_X = [0,1]$ olup $x < 0$ ise $F(x) = 0$ ve $x \ge 1$ ise $F(x) = 1$ olduğu açıktır. Diğer taraftan, $0 \le x < 1$ için,

$$F(x) = P\left(\{w: X(w) \le x\}\right) = P\left(\{w: |w| \le x\}\right) = P\left(\{w: -x \le w \le x\}\right) = (2x)/2 = x$$

dir. Buradan, X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ x & , \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & , \quad x \ge 1 \end{cases}$$

olup grafiği de Şekil (2.2.3a) de verilmiştir.

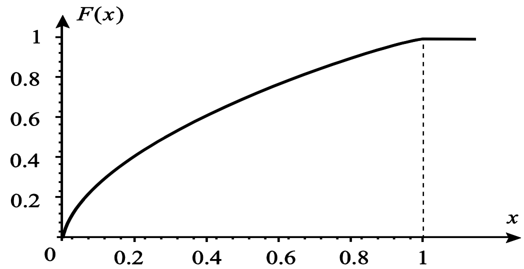


Şekil 2.2.3a Örnek (2.2.2a) deki dağılım fonksiyonunun grafiği

b) Benzer şekilde, $D_Y = [0,1]$ olup, yine $y < 0$ ise $F(y) = 0$ ve $y \ge 1$ ise $F(y) = 1$ olduğu açıktır. $0 \le y < 1$ ise dağılım fonksiyonunun değeri,

$$F(y)=P(\{w:Y(w)\le y\})=P(\{w:w^2\le y\})=P(\{w:-\sqrt{y}\le w\le\sqrt{y}\})=(2\sqrt{y})/2=\sqrt{y}$$

dir.



Şekil 2.2.3b Örnek (2.2.2b) deki dağılım fonksiyonunun grafiği

Buna göre, rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu,

$$F(y)=\begin{cases}0 & , \quad y<0\\ \sqrt{y} & , \quad 0\le y<1\\ 1 & , \quad y\ge 1\end{cases}$$

olup grafiği Şekil (2.2.3b) de verildiği gibidir $\oplus$

Örnek 2.2.3 $\Omega=[-1,\,2]$ ve $\mathcal{U}=\mathcal{B}(\Omega)$ olsun. $A\in\mathcal{U}$ için olasılık ölçüsü de

$P(A)=$"A nın aralık uzunluğu"$/3$

olarak tanımlandığında, $(\Omega,\mathcal{U},P)$ bir olasılık uzayıdır. X ve Y rasgele değişkenleri

a)
$X:\Omega\to\mathbb{R}$
$w\to X(w)=w^2$

b)
$Y:\Omega\to\mathbb{R}$
$w\to Y(w)=w^2-2w$

şeklinde tanımlansın. Bu rasgele değişkenlerin dağılım fonksiyonlarını bulalım. Rasgele değişkenlerin değer kümeleri grafiklerden (Şekil 2.2.4a ve 2.2.4b) de görüldüğü gibi, $D_X=[0,4]$ ve $D_Y=[-1,\,3]$ dir. Şimdi bu rasgele değişkenlerin dağılım fonksiyonlarını bulalım.

a) $x<0$ ise $F_X(x)=0$ ve $x\ge 4$ ise $F_X(x)=1$ olduğu açıktır. Fonksiyonun grafiği de dikkate alınarak, fonksiyonunun diğer değerleri $0\le x<1$ için,

$$F_X(x)=P(\{w:X(w)\le x\})=P(\{w:w^2\le x\})=P(\{w:-\sqrt{x}\le w\le\sqrt{x}\})=(2\sqrt{x})/3$$

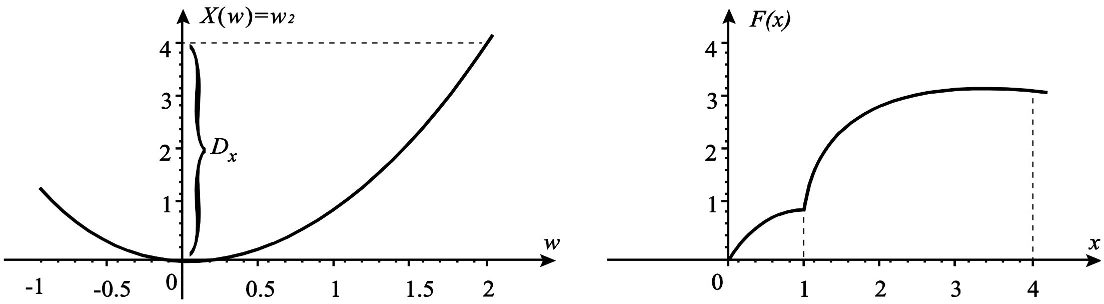
ve $1\le x<4$ için,

$$F_X(x)=P(\{w:X(w)\le x\})=P(\{w:w^2\le x\})=P(\{w:-1\le w\le\sqrt{x}\})=(1+\sqrt{x})/3$$

olarak heaplanmıştır. Buna göre, X in dağılım fonksiyonu

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x<0 \\ \dfrac{2\sqrt{x}}{3} & , \quad 0\le x<1 \\ \dfrac{1+\sqrt{x}}{3} & , \quad 1\le x<4 \\ 1 & , \quad x\ge 4 \end{cases}$$

olup grafiği rasgele değişkenin değer kümesi ile beraber Şekil (2.2.4a) de verilmiştir.



Şekil 2.2.4a Örnek (2.2.3a) da verilen rasgele değişkenin değer kümesi ile dağılım fonksiyonu

b) $D_Y=[-1,3]$ olduğundan, $y<-1$ ise $F_Y(y)=0$ ve $y\ge 3$ ise $F_Y(y)=1$ olduğu açıktır. Ayrıca $-1\le y<0$ için fonksiyonun değeri

$$F_Y(y)=P\left(\{w:Y(w)\le y\}\right)=P\left(\left\{w:w^2-2w\le y\right\}\right)=P\left(\left\{w:\frac{2-\sqrt{4+4y}}{2}\le w\le \frac{2+\sqrt{4+4y}}{2}\right\}\right)$$

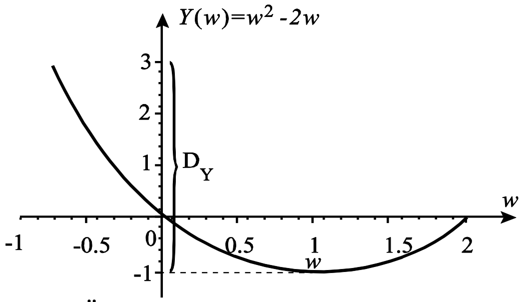
$$=P\left(\left\{w:\frac{2-2\sqrt{1+y}}{2}\le x\le \frac{2+2\sqrt{1+y}}{2}\right\}\right) = \frac{2\sqrt{1+y}}{3}$$

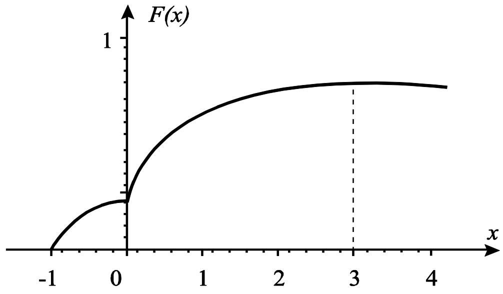
ve $0\le y<3$ için,

$$F_Y(y)=P\left(\{w:Y(w)\le y\}\right)=P\left(\left\{w:w^2-2w\le y\right\}\right)=P\left(\left\{w:\frac{2-\sqrt{4+4y}}{2}\le w\le 2\right\}\right)$$

$$=\frac{2-\dfrac{2-\sqrt{4+4y}}{2}}{3} = \frac{1+\sqrt{1+y}}{3}$$

olarak bulunmuştur.





Şekil 2.2.4b Örnek (2.2.3b) de verilen rasgele değişkenin değer kümesi ile dağılım fonksiyonu

Buradan Y rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu da,

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0 & , \quad y<-1 \\ \dfrac{2\sqrt{1+y}}{3} & , \quad -1\le y<0 \\ \dfrac{1+\sqrt{1+y}}{3} & , \quad 0\le y<3 \\ 1 & , \quad y\ge 3 \end{cases}$$

şeklinde olup, grafiği değişkenin tanım bölgesi ile beraber Şekil (2.2.4b) de verilmiştir $\oplus$

Rasgele değişkenleri kesikli ve sürekli olmak üzere iki ayrı gruba ayırmıştık. Rasgele değişkenin değer kümesi sayılabilir ise kesikli, aksi halde sürekli rasgele değişken demiştik. Dağılım fonksiyonunun sağdan sürekli olduğunu biliyoruz (Teorem 2.2.1). Yukarıdaki örneklerde de görüldüğü gibi, rasgele değişken sürekli ise dağılım fonksiyonu da süreklidir.

2.3. Olasılık (Yoğunluk) Fonksiyonu

Olasılık ve istatistikte rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu yerine, genellikle dağılım fonksiyonundan elde edilen olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılır. Aslında, dağılım fonksiyonu verildiğinde olasılık fonksiyonu, olasılık fonksiyonu verildiğinde de dağılım fonksiyonu bulunabilir.

Kesikli bir X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu F olsun. X in değer kümesi D_X olmak üzere, $x\in\mathbb{R}$ için Teorem (2.2.2) den $\{w: X(w)=x\}$ olayının olasılığının

$$P(\{w: X(w)=x\})=F(x^+)-F(x^-)$$

şeklinde hesaplandığını biliyoruz (Teorem 2.2.22b). Buna göre, $x\in D_X$ için,

$$P(\{w: X(w)=x\})=F(x^+)-F(x^-)$$

veya kısaca $P(X=x)=F(x^+)-F(x^-)$ olasılıkları hesaplanır. $x\in\mathbb{R}\setminus D_X$ için de $P(X=x)=0$ olduğu açıktır.

Tanım 2.3.1 Değer kümesi D_X olan kesikli bir X rasgele değişkeninin *olasılık fonksiyonu,*

$$f(x)=\begin{cases} P(X=x) & , \quad x\in D_X \\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

dir $\otimes$

Bir rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu, bütün reel sayılar kümesinde tanımlıdır. Fonksiyon değer kümesi dışında 0 olarak tanımlandığı için, rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu bazen $P(X=x)$ olarak da verilir. Ancak, bazı $x\in D_X$ için $P(X=x)=0$ olabilir. Herhangi bir rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu $f(x)$ aşağıdaki koşulları sağlar. Bu koşullar,

i) $f(x)\geq 0$, her $x\in\mathbb{R}$

ii) $\sum\limits_{x\in D_X} P(X=x)=1$

dir.

Örnek 2.3.1 a) X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases} c\,x & , \quad x=1,2,3,4,5 \\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olarak verilmiş olsun. Bu fonksiyonun bir olasılık fonksiyonu olabilmesi için c sabitinin değerini bulalım. Her $x\in\mathbb{R}$ için $f(x)\geq 0$ olduğundan $c\,x\geq 0$ ve $\sum\limits_{x\in D_X} P(X=x)=1$ olması gerekir. Buradan, c sabitinin değeri

$$1=\sum_{x\in D_X} P(X=x)=\sum_{x=1}^{5} P(X=x)=\sum_{x=1}^{5} cx=15c\Rightarrow c=\frac{1}{15}$$

olarak bulunur. Yani, X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases} x/15 & , \quad x=1,2,3,4,5 \\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

dir. Buna göre, $P(X\geq 3)$ olasılığı da

$$P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=\frac{1}{15}\left(3+4+5\right)=\frac{4}{5}$$

olarak hesaplanmış olur.

b) $\lambda>0$ olmak üzere, X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases} c\,\lambda^{x}/x! & , \quad x=0,1,2,3,\ldots \\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olarak verildiğinde c sabitinin değerini bulalım. Yine, her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \geq 0$ olması gerektiğinden $c \geq 0$ olmalıdır. Ayrıca, e^{λ} fonksiyonunun Taylor serisi açılımından c sabitinin değeri

$$\sum_{x \in D_X} P(X=x) = \sum_{x=0}^{\infty} P(X=x) = c \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = c\,e^{\lambda} \Rightarrow c = e^{-\lambda}$$

dir. Yani, X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\lambda}\,\lambda^x / x! & , \quad x = 0,1,2,3,\ldots \\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklindedir $\oplus$

Kesikli rasgele değişkenlerde, dağılım fonksiyonu verildiğinde, olasılık fonksiyonu $P\left(X=x\right) = F(x^+) - F(x^-)$ eşitliği ile bulunur. Rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu verildiğinde dağılım fonksiyonu da,

$$F(x) = \sum_{t \leq x} P(X=t)$$

şeklinde bulunur.

Bir önceki örnekte verilen olasılık fonksiyonunu ele alalım. Olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} x/15 & , \quad x = 1,2,3,4,5 \\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olup dağılım fonksiyonunu bulmak için olasılık fonksiyonunu,

$X=x$	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	$1/15$	$2/15$	$3/15$	$4/15$	$5/15$

şeklinde yazalım. Buradan dağılım fonksiyonunun değerleri

$$x < 1 \Rightarrow F(x) = \sum_{t \leq x} P(X=t) = 0,$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow F(x) = \sum_{t \leq x} P(X=t) = P(X=1) = \frac{1}{15},$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow F(x) = \sum_{t \leq x} P(X=t) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{3}{15},$$

$$3 \leq x < 4 \Rightarrow F(x) = \sum_{t \leq x} P(X=t) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{6}{15},$$

$$4 \le x < 5 \Rightarrow F(x) = \sum_{t \le x} P(X = t) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{10}{15},$$

$$x \ge 5 \Rightarrow F(x) = \sum_{t \le x} P(X = t) = 1$$

olarak bulunur. Buna göre, dağılım fonksiyonu açık olarak,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ 1/15 & , \quad 1 \le x < 2 \\ 3/15 & , \quad 2 \le x < 3 \\ 6/15 & , \quad 3 \le x < 4 \\ 10/15 & , \quad 4 \le x < 5 \\ 1 & , \quad x \ge 5 \end{cases}$$

şeklinde yazılır.

X sürekli ise dağılım fonksiyonu da süreklidir. O halde, X sürekli ise her $x \in \mathbb{R}$ için $P(X = x) = F(x^+) - F(x^-) = 0$ dir. Ayrıca X sürekli ise, rasgele değişkenin olasılık fonksiyonunu kesikli olasılık fonksiyonlardan ayırmak için "*olasılık yoğunluk fonksiyonu*" ifadesi kullanılır. Sürekli rasgele değişkenlerin dağılım fonksiyonları, sürekli olmasına rağmen dağılım fonksiyonunun türevlenemediği yerler olabilir.

Tanım 2.3.2 Değer kümesi D_X olan sürekli bir X rasgele değişkeninin dağlım fonksiyonu $F(x)$ olsun. X in *olasılık yoğunluk fonksiyonu,*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{d\,F(x)}{dx} & , \quad F \text{ nin türevlenebildiği yerlerde} \\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

dir $\otimes$

X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$,

i) $f(x) \ge 0,$ her $x \in \mathbb{R}$

ii) $\displaystyle\int_{x \in D_X} f(x)\,dx = 1$

koşullarını sağlar. Diğer taraftan, $P(\{w : X(w) \in A\})$ olasılığı (veya $P(X \in A)$ olasılığı)

$$P(X \in A) = \int_A f(x)\,dx$$

integrali ile hesaplanır.

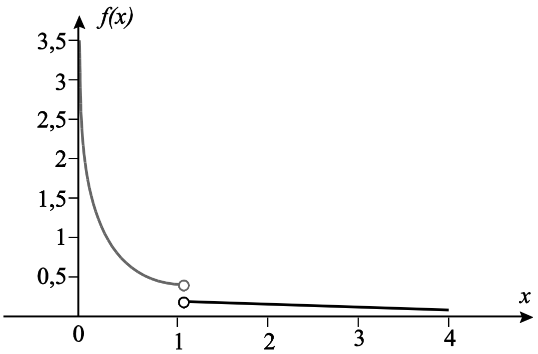
Örnek 2.3.2 $\Omega=[-1,2]$, $\mathcal{U}=\mathcal{B}(\Omega)$ ve $A\in\mathcal{U}$ için $P(A)=$ "A nın aralık uzunluğu"$/3$ olmak üzere, $(\Omega,\mathcal{U},P)$ bir olasılık uzayıdır.

$$X:\Omega\to\mathbb{R}$$
$$w\to X(w)=w^2$$

olarak verilen X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu (Örnek, 2.2.3a) sürekli olmasına rağmen, $x=0$, $x=1$ ve $x=4$ noktalarında türevlenemez. Dolayısı ile, X rasgele değişkeninin değer kümesi $D_X=[0,4]$ olup, olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt{x}} & , \quad 0<x<1\\ \dfrac{1}{6\sqrt{x}} & , \quad 1<x<4\\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

olup grafiği Şekil (2.3.1) de verilmiştir.



Şekil 2.3.1 Örnek (2.3.2) de verilen rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu

Bu fonksiyon, her $x\in\mathbb{R}$ için $f(x)\geq 0$ ve

$$\int_{D_X} f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{3\sqrt{x}}\,dx+\int_1^4\frac{1}{6\sqrt{x}}\,dx=\left.\frac{2\sqrt{x}}{3}\right|_{x=0}^{1}+\left.\frac{\sqrt{x}}{3}\right|_{x=1}^{4}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\sqrt{4}-\sqrt{1}\right)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$$

özelliklerini sağladığı için bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur. $P(\{w:0<X(w)\leq 2\})$ olasılığı ise,

$$P(\{w:0<X(w)\leq 2\})=\int_{D_X} f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{3\sqrt{x}}\,dx+\int_1^2\frac{1}{6\sqrt{x}}\,dx=\left.\frac{2\sqrt{x}}{3}\right|_{x=0}^{1}+\left.\frac{\sqrt{x}}{3}\right|_{x=1}^{2}$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{3}\cong 0.8047$$

olarak hesaplanmıştır. Sürekli rasgele değişkenlerde, aralık sınırları yazılırken uç noktaların önemi yoktur. Yani, $P(\{w: 0 < X(w) \le 2\})$ ile $P(\{w: 0 < X(w) < 2\})$ olasılıkları aynıdır $\oplus$

X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ verildiğinde, dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

integrali ile hesaplanır. Bir rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu verildiğinde, bu özelliği sağlayan bir f fonksiyonu varsa, bu fonksiyon rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Böyle bir fonksiyon bulunamayabilir veya bulunduğu zaman da fonksiyonu belirlemek kolay olmayabilir. Oysa, bir rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu her zaman vardır. Bu nedenle, rasgele değişkenlerin olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonları dağılım fonksiyonlarından elde edilmeye çalışıldı. Bir rasgele değişkenin aksi söylenmedikçe olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonunun var olduğu kabul edilecektir.

Kesikli dağılımlarda uç noktalar önemlidir. Örneğin, Örnek (2.3.1b) de verilen rasgele değişken için $P(X \le 2)$ ve $P(X < 2)$ olasılıkları farklıdır. Olasılık fonksiyonu, $\lambda > 0$ için $P(X = x) = e^{-\lambda} \lambda^{x} / x!$, $x = 0,1,2,3,\ldots$ olup olasılıklar,

$$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = e^{-\lambda}(1 + \lambda + \lambda^{2}/2)$$

ve

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = e^{-\lambda}(1 + \lambda)$$

olup, $P(X \le 2) \ne P(X < 2)$ dir.

Genel olarak, olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu verildiğinde olasılıklar

$$P(\{w : X(w) \in A\}) = P(X \in A) = \begin{cases} \sum\limits_{x \in A} P(X = x) & , \quad X \text{ kesikli} \\ \int\limits_{A} f(x)\,dx & , \quad X \text{ sürekli} \end{cases}$$

ile hesaplanır.