HAFTA 7

2.4. Çok Değişkenli Dağılım Fonksiyonları

Bu kısımda rasgele vektörler (veya vektör rasgele değişkenler) ve dağılım fonksiyonları ile ortak olasılık (veya ortak olasılık yoğunluk) fonksiyonları üzerinde durulacaktır. Bileşenleri $X_1, X_2, ..., X_k$ olan $k-$boyutlu bir rasgele değişken $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, ..., X_k)'$ şeklinde gösterilecektir. Böyle bir rasgele değişken (veya rasgele vektör)

$$(X_1, ..., X_k)' : \Omega \to \mathbb{R}^k$$

$$w \to (X_1(w), ..., X_k(w))'$$

şeklinde tanımlanır. $k-$boyutlu rasgele değişkenin ortak dağılım fonksiyonu,

$$F_{(X_1, X_2, ..., X_k)} \; : \; \mathbb{R}^k \to [0,1]$$

$$(x_1, ...x_k) \to F_{(X_1, X_2, ..., X_k)}(x_1, ...x_k) = P(\{w : X_1(w) \le x_1, ..., X_k(w) \le x_k\})$$

şeklinde tanımlanır. Karmaşıklığı önlemek için $k = 2$ alalım. O zaman, bileşenleri X ve Y olan iki boyutlu vektör rasgele değişkenin ortak dağılım fonksiyonu,

$$F(x, y) = P(\{w : X(w) \le x, Y(w) \le y\}) = P(X \le x, Y \le y)$$

şeklinde olur. Çok değişkenli dağılım fonksiyonları tek değişkenli dağılım fonksiyonlarında olduğu gibi benzer özelliklere sahiptir. Bunlardan bazıları aşağıdaki teoremde özetlenmiştir.

Teorem 2.4.1 $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayında tanımlı marjinalleri $F_X(x)$ ve $F_Y(y)$ olan $\underset{\sim}{X} = (X, Y)'$ iki boyutlu rasgele vektörün dağılım fonksiyonu $F(x, y)$ aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x, y) = F_Y(y)$, $\lim\limits_{y \to \infty} F(x, y) = F_X(x)$

ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = 0$, $\lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) = 0$

iii) $\lim\limits_{x \to \infty} \lim\limits_{y \to \infty} F(x, y) = 1.$

İspat: **i)** $\lim\limits_{x \to \infty} F(x, y) = F_Y(y)$ için $\lim\limits_{n \to \infty} F(n, y) = F_Y(y)$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

Bunun için, $A_n = \{w : X(w) \le n\}$ ve $B = \{w : Y(w) \le y\}$ kümelerini tanımlayalım. Buradaki A_n dizisi artan olup $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = \Omega$ dır. Dolayısı ile,

$$\lim_{n \to \infty} F(n, y) = \lim_{n \to \infty} P\left(\{w : X(w) \le n, Y(w) \le y\}\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n \cap B)$$

$$= P\left(\left(\lim_{n \to \infty} A_n\right) \cap B\right) = P(\Omega \cap B) = P(B) = P\left(\{w : Y(w) \le y\}\right) = F_Y(y)$$

dir. $B_n = \{w: Y(w) \le n\}$ ve $A = \{w: X(w) \le x\}$ alınarak $\lim_{y \to \infty} F(x,y) = F_X(x)$ elde edilir.

ii) $\lim_{x \to -\infty} F(x,y) = 0$ için $\lim_{n \to \infty} F(-n,y) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için de $A_n = \{w: X(w) \le -n\}$ ve $B = \{w: Y(w) \le y\}$ kümelerini tanımlayalım. A_n azalan olup $\lim_{n \to \infty} A_n = \varnothing$ dir. Ayrıca, A_n azalan olduğundan limit ile olasılık yer değiştirebilir. Buradan

$$\lim_{n \to \infty} F(-n,y) = \lim_{n \to \infty} P\left(\{w: X(w) \le -n, Y(w) \le y\}\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n \cap B)$$

$$= P\left(\left(\lim_{n \to \infty} A_n\right) \cap B\right) = P(\varnothing \cap B) = P(\varnothing) = 0$$

elde edilir. Yine benzer şekilde, $B_n = \{w: Y(w) \le -n\}$ ve $A = \{w: X(w) \le x\}$ alınarak $\lim_{y \to -\infty} F(x,y) = 0$, $A_n = \{w: X(w) \le -n\}$ ve $B_n = \{w: Y(w) \le -n\}$ küme dizileri kullanılarak da $\lim_{x \to -\infty} \lim_{y \to -\infty} F(x,y) = 0$ elde edilir.

iii) $A_n = \{w: X(w) \le n\}$ ve $B_n = \{w: Y(w) \le n\}$ küme dizilerini tanımlayalım. Her iki küme dizisi de artan olup, $\lim_{n \to \infty} A_n = \Omega$ ve $\lim_{n \to \infty} B_n = \Omega$ dir. Buradan da,

$$\lim_{x \to \infty} \lim_{y \to \infty} F(x,y) = \lim_{n \to \infty} \lim_{n \to \infty} F(n,n) = \lim_{n \to \infty} P\left(\{w: X(w) \le n, Y(w) \le n\}\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} P(A_n \cap B_n) = P\left(\left(\lim_{n \to \infty} A_n\right) \cap \left(\lim_{n \to \infty} B_n\right)\right) = P(\Omega \cap \Omega) = P(\Omega) = 1$$

elde edilir ◊

Bileşenleri X ve Y olan iki boyutlu vektör rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu $F(x,y)$ verildiğinde, X ve Y nin marjinal dağılım fonksiyonları sırası ile,

$$F_X(x) = F(x, +\infty) \text{ ve } F_Y(y) = F(+\infty, y)$$

şeklinde bulunur. Buradaki F_X ve F_Y fonksiyonları, X ve Y nin marjinal dağılım fonksiyonlarıdır. Buradan da, her bir rasgele değişkenin marjinal olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilir.

Tek değişkenli dağılım fonksiyonu azalmayan ve sağdan süreklidir. Vektörlerde sıralama bağıntısı olmadığından, çok değişkenli dağılım fonksiyonları azalmayandır veya artandır gibi ifadeler kullanılamaz. Ancak, çok değişkenli dağılım fonksiyonu her bir değişkenine göre sağdan sürekli ve azalmayandır. İki değişkenli dağılım fonksiyonunun bu özellikleri aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem 2.4.2 $(\Omega,\mathcal{U},P)$ bir olasılık uzayında tanımlı marjinalleri $F_X(x)$ ve $F_Y(y)$ olan $\underset{\sim}{X}=(X,Y)'$ iki boyutlu rasgele vektörün dağılım fonksiyonu $F(x,y)$ değişkenlerine göre sağdan sürekli ve azalmayandır.

İspat: Önce, fonksiyonun bileşenlerine göre sağdan sürekli olduğunu gösterelim. $F(x,y)$ fonksiyonunun x bileşenine göre sağdan sürekliliği için, $\lim\limits_{h\to 0^+} F(x+h,y)=F(x,y)$ veya $\lim\limits_{n\to\infty} F(x+(1/n),y)=F(x,y)$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Bunun için de

$$\lim_{n\to\infty}\left[F(x+(1/n),y)-F(x,y)\right]=0$$

olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Ayrıca $\lim\limits_{n\to\infty}\left[F(x+(1/n),y)-F(x,y)\right]$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[F(x+(1/n),y)-F(x,y)\right]&=\lim_{n\to\infty}\left[P(X\le x+(1/n),\ Y\le y)-P(X\le x,\ Y\le y)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left[P(x<X\le x+(1/n),\ Y\le y)\right]\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $A_n=\{w: x<X(w)\le x+(1/n)\}$ ve $B_n=\{w: Y(w)\le y\}$ kümeleri için, A_n küme dizisi azalan olup $\lim\limits_{n\to\infty} A_n=\varnothing$ dir. Buna göre,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[F(x+(1/n),y)-F(x,y)\right]&=\lim_{n\to\infty}\left[P(x<X\le x+(1/n),\ Y\le y)\right]=\lim_{n\to\infty}P(A_n\cap B)\\&=P\left(\lim_{n\to\infty}(A_n\cap B)\right)=\left(\left(\lim_{n\to\infty}A_n\right)\cap B)\right)=P(\varnothing\cap B)=P(\varnothing)=0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da, $F(x,y)$ fonksiyonunun x değişkenine göre sağdan sürekli olduğunu gösterir. Benzer düşünce ile, fonksiyonun y değişkenine göre de sağdan sürekli olduğu gösterilir. Şimdi de, fonksiyonun her iki değişkenine göre de sağdan sürekli olduğunu görelim. Bunun için de,

$$\lim_{n\to\infty}\left[F(x+(1/n),y+(1/n))-F(x,y)\right]=0$$

olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[F(x+(1/n),\ y+(1/n))-F(x,y)\right]&=\lim_{n\to\infty}\left[P(X\le x+1/n\ ,Y\le y+1/n)-P(X\le x\ ,\ Y\le y\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left[P(x<X\le x+1/n\ ,\ y<Y\le y+1/n)\right]\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $A_n=\{w: x<X(w)\le x+(1/n)\}$ ve $B_n=\{w: y<Y(w)\le y+(1/n)\}$ için, her iki küme dizisi de azalan olup, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n=\varnothing$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} B_n=\varnothing$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[F(x+(1/n),\ y+(1/n))-F(x,y)\right]&=\lim_{n\to\infty}\left[P(x<X\le x+1/n\ ,\ y<Y\le y+1/n)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}P(A_n\cap B_n)=P\left(\lim_{n\to\infty}(A_n\cap B_n)\right)=P\left(\left(\lim_{n\to\infty}A_n\right)\cap\left(\lim_{n\to\infty}B_n\right)\right)=P(\varnothing)=0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da fonksiyonun her iki değişkenine göre sağdan sürekli olduğunu gösterir. Şimdi, fonksiyonun her iki bileşenine göre *ayrı ayrı azalmayan* olduğunu gösterelim.

Fonksiyonun x e göre azalmayan olduğunu göstermek için, her $y \in \mathbb{R}$ ve $x_1 \le x_2$ için $F(x_1, y) \le F(x_2, y)$ olduğunun gösterilmesi gerekir. Bunun için de, $x_1 \le x_2$ ise

$$\{w: X(w) \le x_1\} \subset \{w: X(w) \le x_2\} \Rightarrow \{w: X(w) \le x_1, Y(w) \le y\} \subset \{w: X(w) \le x_2, Y(w) \le y\}$$

altküme bağıntısı yazılabilir. Buradan da, $x_1 \le x_2$ ise,

$$P(\{w: X(w) \le x_1, Y(w) \le y\}) \le P(\{w: X(w) \le x_2, Y(w) \le y\}) \Rightarrow F(x_1, y) \le F(x_2, y)$$

elde edilir. Bu da fonksiyonun, x değişkenine göre azalmayan olduğunu gösterir. Benzer şekilde fonksiyonun y bileşenine göre de azalmayan olduğu gösterilir. Yani, her $x \in \mathbb{R}$ ve $y_1 \le y_2$ için $F(x, y_1) \le F(x, y_2)$ dir $\Diamond$

Teorem 2.4.3 $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayında tanımlı marjinalleri $F_X(x)$ ve $F_Y(y)$ olan $\underset{\sim}{X} = (X, Y)'$ iki boyutlu rasgele vektörün dağılım fonksiyonu $F(x, y)$ olsun. Bu durumda,

$$\max\{F_X(x) + F_Y(y) - 1,\ 0\} \le F(x, y) \le \min\{F_X(x), F_Y(y)\}$$

dir (Frechet sınırları).

İspat: $A = \{w: X(w) \le x\}$, $B = \{w: Y(w) \le y\}$ altkümelerini tanımlayalım. Buradan,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \le 1 \quad \text{den} \quad P(A \cap B) \ge P(A) + P(B) - 1$$

yazılır. Buna göre,

$$\begin{aligned} P(A \cap B) \ge P(A) + P(B) - 1 &\Rightarrow P(X \le x, Y \le y) \ge P(X \le x) + P(Y \le y) - 1 \\ &\Rightarrow F(x, y) \ge F_X(x) + F_Y(y) - 1 \end{aligned}$$

elde edilir. $F_X(x) + F_Y(y) - 1$ değeri negatif olabileceği göz önüne alındığında,

$$F(x, y) \ge \max\{F_X(x) + F_Y(y) - 1\ ,\ 0\}$$

ifadesi yazılabilir. Diğer taraftan, $P(A \cap B) \le P(A)$ ve $P(A \cap B) \le P(B)$ özelliklerinden,

$$P(X \le x, Y \le y) \le P(X \le x) \ \text{ ve } \ P(X \le x, Y \le y) \le P(Y \le y)$$

dir. Yani, $F(x, y) \le F_X(x)$ ve $F(x, y) \le F_Y(y)$ olup, $F(x, y) \le \min\{F_X(x), F_Y(y)\}$ dir. Bu iki eşitsizlik birleştirildiğinde,

$$\max\{F_X(x) + F_Y(y) - 1,\ 0\} \le F(x, y) \le \min\{F_X(x), F_Y(y)\}$$

şeklinde aranan eşitsizlik elde edilmiş olur $\Diamond$

Tek değişkenli dağılım fonksiyonlarında, $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$ dır. Burada da benzer özellik geçerlidir.

Teorem 2.4.4. $(\Omega,\mathcal{U},P)$ bir olasılık uzayında tanımlı marjinalleri $F_X(x)$ ve $F_Y(y)$ olan $\underset{\sim}{X}=(X,Y)'$ iki boyutlu rasgele vektörün dağılım fonksiyonu $F(x,y)$ olsun. $x_1<x_2$ için $P(x_1<X\leq x_2, Y\leq y)=F(x_2,y)-F(x_1,y)$ dir.

İspat: $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ olmak üzere, $x_1<x_2$ ise $\{w: X(w)\leq x_2, Y(w)\leq y\}$ kümesi

$$\{w: X(w)\leq x_2, Y(w)\leq y\}=\{w: X(w)\leq x_1, Y(w)\leq y\}\cup\{w: x_1<X(w)\leq x_2, Y(w)\leq y\}$$

şeklinde iki ayrık kümenin birleşimi olarak yazılabilir. Buradan da,

$$P(\{w: X(w)\leq x_2, Y(w)\leq y\})=P(\{w: X(w)\leq x_1, Y(w)\leq y\})+P(\{w: x_1<X(w)\leq x_2, Y(w)\leq y\})$$

eşitliğinden $F(x_2,y)=F(x_1,y)+P(x_1<X\leq x_2, Y\leq y)$ bulunur. Bu da ispat için yeterlidir ◊

$(\Omega,\mathcal{U},P)$ bir olasılık uzayında tanımlı marjinalleri $F_X(x)$ ve $F_Y(y)$ olan $\underset{\sim}{X}=(X,Y)'$ iki boyutlu rasgele vektörün dağılım fonksiyonu $F(x,y)$ olsun. Bu durumda,

$$P(X>x, Y>y)=1-F_X(x)-F_Y(y)+F(x,y)$$

eşitliği için $A=\{w: X(w)\leq x\}$, $B=\{w: Y(w)\leq y\}$ kümelerini tanımlayalım. $F_X(x)=P(A)$, $F_Y(y)=P(B)$ ve $F(x,y)=P(A\cap B)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} P(X>x, Y>y) &= P(A^c\cap B^c)=P\left((A\cup B)^c\right)=1-P(A\cup B) \\ &= 1-\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]=1-F_X(x)-F_Y(y)+F(x,y) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Yani, $P(X>x, Y>y)=1-F_X(x)-F_Y(y)+F(x,y)$ dir.

Rasgele değişkenler kesikli ve sürekli olmak üzere iki gruba ayrılmıştı. Burada, her iki rasgele değişken kesikli veya sürekli olabildiği gibi biri kesikli diğeri sürekli de olabilir.

Her iki rasgele değişken de kesikli ise rasgele vektörün ortak olasılık fonksiyonu için bütün $x\in D_X$ ve $y\in D_Y$ için $P(X=x, Y=y)$ olasılıkları hesaplanır. Yani, kesikli X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu,

$$f(x,y)=\begin{cases} P(X=x, Y=y) & , \quad x\in D_X \ , \ y\in D_Y \\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklindedir.

Rasgele değişkenlerin her ikisi de sürekli ise, ortak dağılım fonksiyonu $F(x,y)$ olan X ve Y rasgele değişkenlerinin *ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu* da,

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y} & , \quad F \text{ nin türevlenebildiği yerlerde} \\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olarak bulunur. Rasgele değişkenlerden biri kesikli diğeri sürekli ise tek değişkenlilerde olduğu gibi olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonları bulunur. Marjinal olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonları ise aşağıdaki gibi bulunur.

a) X ve Y rasgele değişkenleri kesikli ve ortak olasılık fonksiyonu $P(X = x, Y = y)$ ise, marjinal olasılık fonksiyonları

$$P(X = x) = \sum_{y \in D_Y} P(X = x, Y = y) \ , \quad \text{bütün } x \in D_X$$

$$P(Y = y) = \sum_{x \in D_X} P(X = x, Y = y) \ , \quad \text{bütün y} \in D_Y$$

dir.

b) X ve Y rasgele değişkenleri sürekli ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x, y)$ ise marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları $x \in D_X$ ve $y \in D_Y$ için

$$f_X(x) = \int_{y \in D_Y} f(x, y)\, dy \quad \text{ve} \quad f_Y(y) = \int_{x \in D_X} f(x, y)\, dx$$

integralleri ile hesaplanır.

c) X kesikli, Y sürekli rasgele değişkenler ve ortak olasılık fonksiyonu $f(x, y)$ ise marjinal olasılık ve olasılık yoğunluk fonksiyonları $x \in D_X$ ve $y \in D_y$ için,

$$f_X(x) = P(X = x) = \int_{y \in D_Y} f(x, y)\, dy \quad \text{ve} \quad f_Y(y) = \sum_{x \in D_X} f(x, y)$$

şeklindedir. Ortak olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu verildiğinde, ortak dağılım fonksiyonları da

$$F(x, y) = \begin{cases} \sum\limits_{k \le x,\ \ell \le y} P(X = k, Y = \ell) & , \quad X \text{ ve } Y \text{ kesikli} \\ \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(s, t)\, d\,t\, d\,s & , \quad X \text{ ve } Y \text{ sürekli} \end{cases}$$

şeklinde bulunur.

Tanım 2.4.1 X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x, y)$, marjinal olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonları da sırası ile $f_X(x)$ ve $f_Y(y)$ olsun. Bütün $x \in D_X$ ve $y \in D_Y$ için

$$f(x, y) = f_X(x)\ f_Y(y)$$

ise X ve Y rasgele değişkenlerine *bağımsızdır* denir $\otimes$

Tanım 2.4.2 X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x,y)$, marjinal olasılık ve olasılık yoğunluk fonksiyonları da sırası ile $f_X(x)$ ve $f_Y(y)$ olsun. $Y = y$ verildiğinde X in *koşullu olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu,*

$$f_{X|Y=y}(x \mid y) = \begin{cases} \dfrac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} & , \quad P(Y = y) > 0, \text{ kesikli} \\ \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} & , \quad f_Y(y) > 0, \quad \text{sürekli} \end{cases}$$

dir$\otimes$

Örnek 2.4.1 a) Bir çift zarın aynı anda atılması deneyini ele alalım. X_1 birinci zarın üzerindeki noktaların sayısını, X_2 de ikinci zarın üzerindeki noktaların sayısını göstersin. Buna göre, örnek uzay (x ve y zarların üzerindeki nokta sayılarına göre şekilleri göstermek üzere), $\Omega = \{(x,y) : x = 1,2,..,6,\ y = 1,2,...,6\}$ olup sigma cebir de kuvvet kümesi $(\mathcal{U} = \sigma(\Omega))$ olsun. $A \in \mathcal{U}$ için $P(A) = n(A)/36$ denirse $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayı olur. X_1 ve X_2 birer rasgele değişken olup Örnek (2.1.2) gereğince $X = X_1 + X_2$ ve $Y = |X_1 - X_2|$ rasgele değişkendir. X ve Y nin değer kümeleri $D_X = \{2,3,4,...,12\}$ ve $D_Y = \{0,1,2,3,4,5\}$ olup, ortak olasılık fonksiyonu için olasılıklar ayrı ayrı hesaplanır. Aşağıda bu olasılıklardan birkaç tanesi hesaplanmış diğerleri de benzer şekilde hesaplanarak tablo halinde ortak olasılık fonksiyonu verilmiştir.

Önce, $P(X = 2, Y = 0)$ olasılığını hesaplayalım. Burada,

$$\{w : X(w) = 2\} = \{(1,1)\} \text{ ve } \{w : Y(w) = 0\} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

olup arakesit kümesi

$$\{w : X(w) = 2,\ Y(w) = 0\} = \{(1,1)\}$$

dir. Buradan, $P(X = 2, Y = 0)$ olasılığı,

$$P(X = 2, Y = 0) = P(w : X(w) = 2,\ Y(w) = 0\}) = P(\{(1,1)\}) = 1/36$$

olarak hesaplanır.

Benzer şekilde, $P(X = 5, Y = 3)$ olasılığı için

$$\{w : X(w) = 5\} = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$$

ve

$$\{w : Y(w) = 3\} = \{(1,4),(2,5),(3,6),(4,1),(5,2),(6,3)\}$$

olup arakesit kümesi,

$$\{w : X(w) = 5,\ Y(w) = 3\} = \{(1,4),(4,1)\}$$

dir. Buradan, $P(X=5,Y=3)$ olasılığının değeri

$$P(X=5,Y=3)=P(\{w: X(w)=5,\ Y(w)=3\})=P(\{(1,4),(4,1)\})=2/36$$

dır. Diğer olasılıklar benzer şekilde hesaplanarak aşağıda tablo halinde verilmiştir.

$X \rightarrow$ $Y \downarrow$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$P(Y=y)$
0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
1	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{10}{36}$
2	0	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	0	$\frac{8}{36}$
3	0	0	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	0	0	$\frac{6}{36}$
4	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	$\frac{4}{36}$
5	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

X ve Y nin ortak olasılık fonksiyonundan, marjinal olasılık fonksiyonları da

$$P(X=x)=\sum_{y\in D_Y} P(X=x,Y=y)\ ,\ \forall x\in D_X$$

ve

$$P(Y=y)=\sum_{x\in D_X} P(X=x,Y=y)\ ,\ \forall y\in D_Y$$

formülleri kullanılarak

$X=x$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$Y=y$	0	1	2	3	4	5
$P(Y=y)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

şeklinde bulunmuştur.

Koşullu olasılık fonksiyonları da koşullu olasılık fonksiyonunun tanımı kullanılarak hesaplanır. Örneğin, $X=5$ verildiğinde Y nin koşullu olasılık fonksiyonu $y \in D_Y$ için $P(Y=y \mid X=5)$ olasılıkları hesaplanarak bulunur. Bu koşullu olasılıklar

$$P(Y=0 \mid X=5)=\frac{P(X=5,Y=0)}{P(X=5)}=\frac{0}{4/36}=0$$
$$P(Y=1 \mid X=5)=\frac{P(X=5,Y=1)}{P(X=5)}=\frac{2/36}{4/36}=\frac{1}{2}$$
$$P(Y=2 \mid X=5)=\frac{P(X=5,Y=2)}{P(X=5)}=\frac{0}{4/36}=0$$
$$P(Y=3 \mid X=5)=\frac{P(X=5,Y=3)}{P(X=5)}=\frac{2/36}{4/36}=\frac{1}{2}$$
$$P(Y=4 \mid X=5)=\frac{P(X=5,Y=4)}{P(X=5)}=\frac{0}{4/36}=0$$
$$P(Y=5 \mid X=5)=\frac{P(X=5,Y=5)}{P(X=5)}=\frac{0}{4/36}=0$$

şeklinde hesaplanmış olup koşullu olasılık fonksiyonu,

$Y=y$	0	1	2	3	4	5
$P(Y=y \mid X=5)$	0	0.5	0	0.5	0	0

olarak elde edilmiştir.

$P(X=x,Y=y) \neq P(X=x)P(Y=y)$ olduğundan X ve Y bağımsız değildir.

b) X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & , \quad 0<x<y<\infty \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olarak verilmiş olsun (Casella ve Berger, 2002, sayfa 150). X ve Y nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları,

$$f_X(x)=\int_{y \in D_Y} f(x,y)\,dy=\int_{y=x}^{\infty} e^{-y}dy=-e^{-y}\Big|_{y=x}^{\infty}=e^{-x}$$
$$f_Y(y)=\int_{x \in D_X} f(x,y)\,dx=\int_{x=0}^{y} e^{-y}dx=\left(e^{-y}\right)x\Big|_{x=0}^{y}=ye^{-y}$$

integrallerinden

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x} & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases} \qquad \text{ve} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} ye^{-y} & , \quad y>0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

şeklinde bulunmuştur. Buradan da

$$e^{-y}=f(x,y) \neq f_X(x)\,f_Y(y)=(e^{-x})(ye^{-y})$$

olduğundan X ve Y bağımsız değildir. Koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonları da yine kesikli rasgele değişkenlerde olduğu gibi bulunur. $Y=y$ verildiğinde X in koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X|Y=y}(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{e^{-y}}{y\,e^{-y}}=\frac{1}{y}$$

eşitliğinden,

$$f_{X|Y=y}(x\,|\,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y} & , \quad 0<x<y\\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

şeklinde bulunmuştur.

c) X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu,

$$f(x,y)=\begin{cases}c\,y\,e^{-xy} & , \quad x>0,\ y=1,2,3\\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

olarak verilmiş olsun. Önce, fonksiyonun bir olasılık fonksiyonu olabilmesi için c sabitinin değeri bulunmalıdır. $f(x,y)$ bir olasılık fonksiyonu olduğundan toplam olasılık 1 olmalıdır. Yani,

$$1=\int_{x=0}^{\infty}\left(\sum_{y=1}^{3}f(x,y)\right)dx=\int_{x=0}^{\infty}\left(\sum_{y=1}^{3}c\,y\,e^{-xy}\right)dx=c\int_{x=0}^{\infty}\left(e^{-x}+2\,e^{-2x}+3e^{-3x}\right)dx=3c$$

eşitliğinden $c=1/3$ bulunur. Yani X ve Y nin ortak olasılık fonksiyonu,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}y\,e^{-xy} & , \quad x>0,\ y=1,2,3\\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

şeklindedir. Marjinal olasılık fonksiyonları için,

$$\sum_{y=1}^{3}f(x,y)=\sum_{y=1}^{3}\frac{1}{3}y\,e^{-xy}=\frac{1}{3}\left(e^{-x}+2e^{-2x}+3e^{-3x}\right)$$

ve

$$\int_{x\in D_X}f(x,y)\,dx=\int_{x=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}y\,e^{-xy}\right)dx=\frac{y}{3}\int_{x=0}^{\infty}e^{-xy}dx=\left(-\frac{1}{3}e^{-xy}\right)_{x=0}^{\infty}=\frac{1}{3}$$

integral ve toplamın sonuçlarından marjinal olasılık fonksiyonları sırası ile

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}(e^{-x}+2e^{-2x}+3e^{-3x}) & , \quad x>0\\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}\quad , \quad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3} & , \quad y=1,2,3\\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

olarak bulunmuştur.

d) Aynı marjinal olasılık (veya olasılık yoğunluk) fonksiyonlarını veren farklı ortak olasılık (veya olasılık yoğunluk) fonksiyonları bulunabilir. Örneğin, $\boldsymbol{X}_1=(X_1,Y_1)'$ nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_1(x,y)=\begin{cases}1 & , \quad 0<x,y<1\\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde}\end{cases}$$

ve $\boldsymbol{X}_2=(X_2,Y_2)'$ rasgele vektörünün ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu da,

$$f_2(x,y)=\begin{cases}1+\alpha(2x-1)(2y-1) & , \quad 0<x,y<1\,,\,0<\alpha<1\\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde}\end{cases}$$

şeklinde verildiğinde her iki ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu için marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları aynıdır. $\boldsymbol{X}_1=(X_1,Y_1)'$ rasgele vektörünün ortak olasılık yoğunluk fonksiyonundan marjinallerin,

$$f_{1,X_1}(x)=\begin{cases}1 & , \quad 0<x<1\\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde}\end{cases} \quad \text{ve} \quad f_{1,X_2}(x)=\begin{cases}1 & , \quad 0<y<1\\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde}\end{cases}$$

şeklinde olduğu açıktır. Buradan, her $x,y\in\mathbb{R}$ için, $f_1(x,y)=f_{1,X_1}(x)\,f_{1,Y_1}(y)$ olduğundan X_1 ve Y_1 bağımsızdır. Şimdi, $\boldsymbol{X}_2=(X_2,Y_2)'$ nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonundan

$$f_{1,X_2}(x)=\int_0^1\left[1+\alpha(2x-1)(2y-1)\right]dy=1 \text{ ve } f_{1,Y_2}(x)=\int_0^1\left[1+\alpha(2x-1)(2y-1)\right]d\,y=1$$

olduğundan X_2 ve Y_2 nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları da,

$$f_{2,X_2}(x)=\begin{cases}1 & , \quad 0<x<1\\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde}\end{cases} \quad \text{ve} \quad f_{2,Y_2}(x)=\begin{cases}1 & , \quad 0<y<1\\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde}\end{cases}$$

şeklinde olup, yukarıdaki marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları ile aynıdır. Ancak bu rasgele değişkenler $f_2(x,y)\neq f_{2,X_2}(x)\,f_{2,Y_2}(y)$ olduğundan bağımsız değildir$\oplus$

Örnek 2.4.2 X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak dağılım fonksiyonu $F(x,y)$ olsun (Öztürk, 1993, sayfa 174). $a_1,b_1,a_2,b_2\in\mathbb{R}$ olmak üzere,

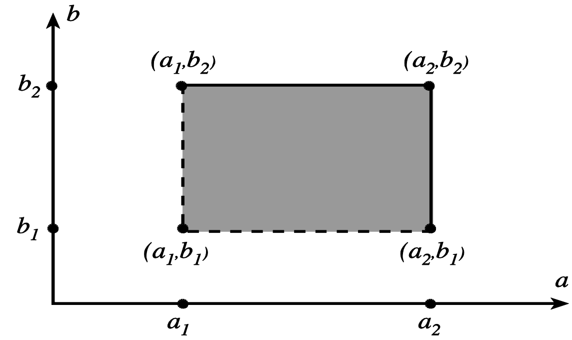
$$P(\{w:a_1<X(w)\le a_2\ ,\ b_1<Y(w)\le b_2\})=F(a_1,b_1)+F(a_2,b_2)-F(a_1,b_2)-F(a_2,b_1)$$

dir. Bunu göstermek için,

$$A=\{w:a_1<X(w)\le a_2\ ,\ b_1<Y(w)\le b_2\} \qquad B=\{w:X(w)\le a_1,Y(w)\le b_2\}$$

$$C=\{w:X(w)\le a_2,Y(w)\le b_1\} \qquad D=\{w:X(w)\le a_2,Y(w)\le b_2\}$$

olaylarını tanımlayalım. Fonksiyonun tanım kümesi Şekil (2.4.1) de verilmiştir.



Şekil 2.4.1 Örnek (2.4.2) de aranan olasılık (taralı alan)

Şekildeki taralı alan $\{w : a_1 < X(w) \le a_2 \ ,\ b_1 < Y(w) \le b_2\}$ kümesini göstermektedir. Buna göre,

$$B \cap C = \{w : X(w) \le a_1, Y(w) \le b_1\} \text{ ve } A \cap (B \cup C) = \varnothing \text{ ve } E = A \cup (B \cup C)$$

küme ilişkileri yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} P(D) = F(a_2,b_2) &= P(\{w : X(w) \le a_2, Y(w) \le b_2\}) = P(A \cup [B \cup C]) = P(A) + P(B \cup C) \\ &= P(A) + [P(B) + P(C) - P(B \cap C)] \\ &= P(\{w : a_1 < X(w) \le a_2, b_1 < Y(w) \le b_2\}) + P(\{w : X(w) \le a_1, Y(w) \le b_2\}) \\ &\quad + P(\{w : X(w) \le a_2, Y(w) \le b_1\}) - P(\{w : X(w) \le a_1, Y(w) \le b_1\}) \end{aligned}$$

olup $F(x,y) = P(\{w : X(w) \le x, Y(w) \le y\})$ tanımı da kullanıldığında,

$$F(a_2,b_2) = P(\{w : X(w) \le a_2, Y(w) \le b_2\}), \quad F(a_1,b_2) = P(\{w : X(w) \le a_1, Y(w) \le b_2\})$$
$$F(a_2,b_1) = P(\{w : X(w) \le a_2, Y(w) \le b_1\}), \quad F(a_1,b_1) = P(\{w : X(w) \le a_1, Y(w) \le b_1\})$$

eşitlikleri yazılır. Buradan da, $F(a_2,b_2)$ nin değeri

$$\begin{aligned} F(a_2,b_2) &= P(\{w : X(w) \le a_2, Y(w) \le b_2\}) \\ &= P(\{w : a_1 < X(w) \le a_2, b_1 < Y(w) \le b_2\}) + P(\{w : X(w) \le a_1, Y(w) \le b_2\}) \\ &\quad + P(\{w : X(w) \le a_2, Y(w) \le b_1\}) - P(\{w : X(w) \le a_1, Y(w) \le b_1\}) \\ &= P(\{w : a_1 < X(w) \le a_2, b_1 < Y(w) \le b_2\}) + F(a_1,b_2) + F(a_2,b_1) - F(a_1,b_1) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ifadeler birleştirildiğinde aranan eşitlik,

$$P(\{w : X(w) \le a_2, Y(w) \le b_1\}) = F(a_2,b_2) + F(a_1,b_1) - F(a_1,b_2) - F(a_2,b_1)$$

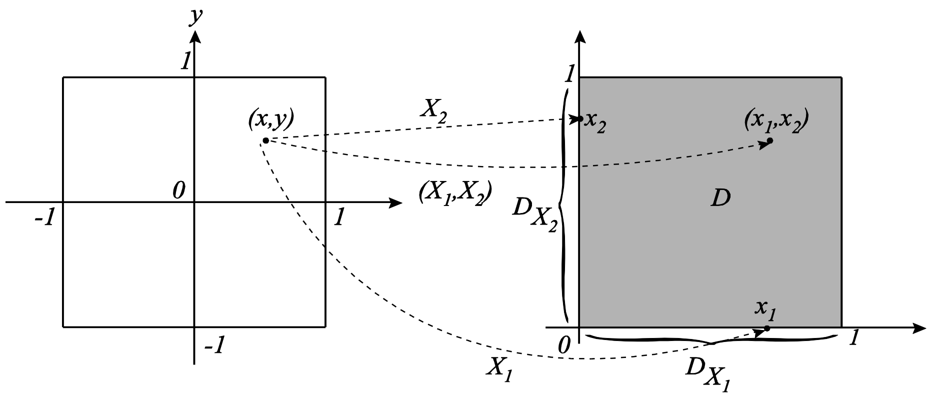
şeklinde elde edilmiş olur⊕

Örnek 2.4.3 $\Omega = \{(x,y) : -1 \le x \le 1\ ,\ -1 \le y \le 1\}$, $\mathcal{U} = \mathcal{B}(\Omega)$ ve $A \in \mathcal{U}$ için $P(A) =$ " A nın alanı "/ 4 olmak üzere, $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayıdır. $w = (x,y) \in \Omega$ olmak üzere,

$(X_1, X_2)' : \Omega \to \mathbb{R}^2$

$$w \to (X_1, X_2)'(w) = (X_1(w), X_2(w))' = (x^2, |y|)$$

şeklinde tanımlanan $(X_1, X_2)'$ rasgele vektörünün dağılım fonksiyonunu bulalım. $(X_1, X_2)'$ nin değer kümesi şekilde de görüldüğü gibi $D = \{(x_1, x_2) : 0 \le x_1, x_2 \le 1\}$ dir.



Şekil 2.4.2 İki boyutlu rasgele değişkenin tanım ve değer kümesi ($X_1(x) = x_1,\ X_2(x) = x_2$ *)*

Şimdi, $(X_1, X_2)'$ nin dağılım fonksiyonunu bulalım. Dağılım fonksiyonu,

$$F : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$$
$$(x_1, x_2) \to F(x_1, x_2) = P(\{w : X_1(w) \le x_1, X_2(w) \le x_2\}) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2)$$

şeklindedir. $(x_1, x_2) \in D$ için fonksiyonun değeri,

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= P(\{w : X_1(w) \le x_1, X_2(w) \le x_2\}) \\ &= P(\{(x, y) \in \Omega : x^2 \le x_1, |y| \le x_2\}) \\ &= P\left(\{(x, y) \in \Omega : -\sqrt{x_1} \le x \le \sqrt{x_1},\ -x_2 \le y| \le x_2\}\right) \\ &= \frac{(2x_2)(2\sqrt{x_1}}{4} = x_2\sqrt{x_1} \end{aligned}$$

dir. $D_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 < 0\ ,\ \ x_2 < 0\}$ olmak üzere $(x_1, x_2) \in D_1$ için

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= P(\{w : X_1(w) \le x_1, X_2(w) \le x_2\}) \\ &= P(\{(x, y) \in \Omega : x^2 \le x_1, |y| \le x_2\}) = P(\emptyset) = 0, \end{aligned}$$

$D_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \ge 1 \text{ veya } x_2 \ge 1\}$ olmak üzere $(x_1, x_2) \in D_2$ için fonksiyonu değeri,

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= P(\{w : X_1(w) \le x_1, X_2(w) \le x_2\}) \\ &= P(\{(x, y) \in \Omega : x^2 \le x_1, |y| \le x_2\}) = P(\Omega) = 1 \end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir. Şimdi $D_3 = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 1 \text{ ve } 0 \leq x_2 \leq 1\}$ kümesini tanımlayalım. $(x_1, x_2) \in D_3$ için fonksiyonun değeri yandaki taralı bölgenin alanının dörtle biridir. Yani,

$$
\begin{aligned}
F(x_1, x_2) &= P\left(\{w : X_1(w) \leq x_1, X_2(w) \leq x_2\}\right) \\
&= P\left(\{(x, y) \in \Omega : 0 \leq x \leq 1,\ -x_2 \leq y \leq x_2\}\right) \\
&= (2x_2)/4 = x_2/2
\end{aligned}
$$

dir.

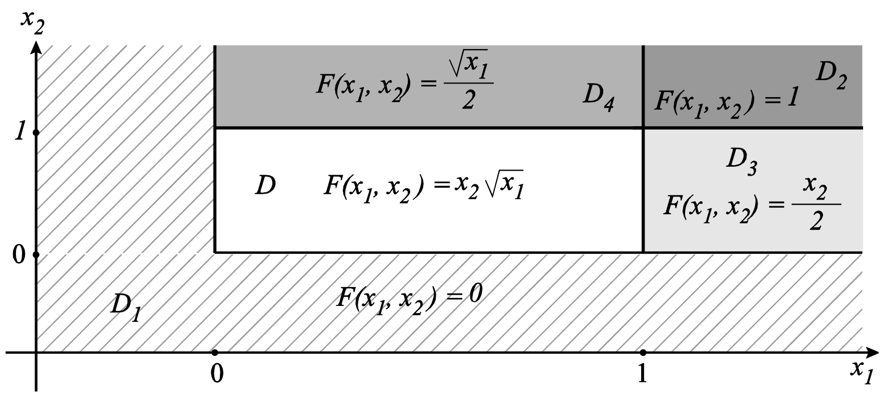
Son olarak $D_4 = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ ve } x_2 \geq 1\}$ olmak üzere $(x_1, x_2) \in D_3$ için $F(x_1, x_2)$ de şekilde gösterilen dikdörtgenin alanının dörtte biridir. Yani,

$$
\begin{aligned}
F(x_1, x_2) &= P\left(\{w : X_1(w) \leq x_1, X_2(w) \leq x_2\}\right) \\
&= P\left(\{(x, y) \in \Omega : x^2 \leq x_1,\ 0 \leq y \leq 1\}\right) \\
&= P\left(\{(x, y) \in \Omega : -\sqrt{x_1} \leq x \leq \sqrt{x_1},\ 0 \leq y \leq 1\}\right) \\
&= \frac{2\sqrt{x_1}}{4} = \frac{\sqrt{x_1}}{2}
\end{aligned}
$$

dir. Buna göre, $(X_1, X_2)'$ rasgele vektörünün dağılım fonksiyonu

$$
F : \mathbb{R}^2 \to [0,1]
$$

$$
(x_1, x_2) \to F(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & , \quad x_1 < 0 \text{ veya } x_2 < 0 \\ x_2\sqrt{x_1} & , \quad 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1 \\ x_2/2 & , \quad x_1 \geq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1 \\ \sqrt{x_1}/2 & , \quad 0 \leq x_1 \leq 1,\ x_2 \geq 1 \\ 1 & , \quad x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 1 \end{cases}
$$



Şekil 2.4.3 Örnek (2.4.3) de verilen iki değişkenli dağılım fonksiyonu

şeklinde olup ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x_1,x_2)=\frac{\partial^2 F(x_1,x_2)}{\partial x_1\,\partial x_2}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x_1}} & , \quad 0<x_1<1,\ 0<x_2<1\\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde}\end{cases}$$

şeklinde elde edilir $\oplus$