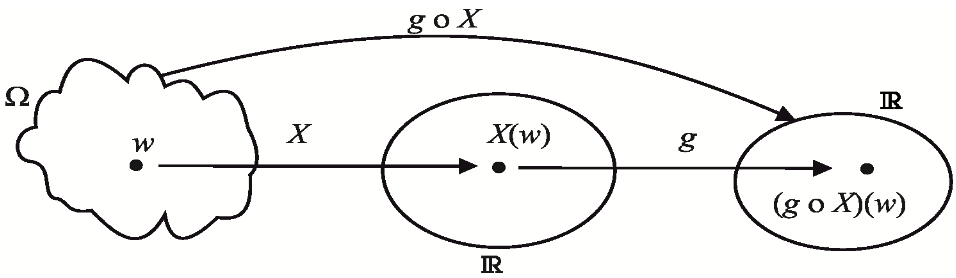
HAFTA 9

RASGELE DEĞİŞKENLERİN DÖNÜŞÜMLERİ VE DAĞILIM FONSİYONLARI

3.1. Tek Değişkenli Dönüşümler

Bir önceki bölümde, rasgele değişkenlerin dağılım fonksiyonları, olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonları ve momentlerine ilişkin bazı özellikleri incelendi. X bir rasgele değişken ise, X in herhangi bir fonksiyonu da bir rasgele değişkendir.

$(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayı, X de Ω üzerinde tanımlı bir rasgele değişken olsun. Reel sayılardan reel sayılara giden bir fonksiyon da g ($g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$) olmak üzere, $g\circ X$ fonksiyonu da Ω dan $\mathbb{R}$ ye giden bir fonksiyondur ($g\circ X:\Omega\to\mathbb{R}$). Yani, X bir rasgele değişken ise, $g\circ X$ bileşke fonksiyonu da aynı örnek uzay üzerinde tanımlı bir rasgele değişkendir (Öztürk, 1993, sayfa 139 ve Ash, 1970 sayfa 58). $X:\Omega\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ise $g\circ X:\Omega\to\mathbb{R}$ olup, $(g\circ X)(w) = g(X(w))$ dir. Bu bileşke fonksiyon şematik olarak aşağıda Şekil (3.1.1) de gösterilmiştir.



Şekil 3.1.1 Rasgele değişkenin dönüşümü

İkinci bölümde, rasgele değişkenleri kesikli ve sürekli olmak üzere iki gruba ayırmıştık. $g\circ X$ de bir rasgele değişken olduğuna göre, bu rasgele değişken de kesikli ya da sürekli olabilir. Ancak, X kesikli ise, $g\circ X$ kesikli veya sürekli olabilir. Benzer şekilde, X sürekli ise $g\circ X$ de kesikli veya sürekli olabilir. Örneğin X, değer kümesi $D_X = [0,2]$ olan sürekli bir rasgele değişken, $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bir g fonksiyonu da

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x\in[0,1) \\ 2 & , \quad x\in[1,2] \end{cases}$$

şeklinde tanımlandığında $g\circ X$, değer kümesi $D_{g\circ X} = \{1,2\}$ olan kesikli bir rasgele değişkendir. Bu kitapta aksi belirtilmedikçe, X kesikli ise $g\circ X$ de kesikli, X sürekli ise $g\circ X$ de sürekli rasgele değişken olarak ele alınacaktır. Ayrıca, $g\circ X$ rasgele değişkeni kısaca $g(X)$ ile gösterilecektir. Bu bölümde, herhangi bir X rasgele değişkeninin olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu verildiğinde $g(X)$ gibi rasgele değişkenlerin olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonlarının bulunma yöntemleri tartışılacaktır.

Kesikli rasgele değişkenlerin dönüşümlerinin olasılık fonksiyonlarının bulunması kolaydır. X kesikli ise, $g(X)$ in de kesikli olduğunu düşünürsek, $Y = g(X)$ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu için, her $y \in D_Y$ için $P(Y = y)$ olasılıklarının doğrudan hesaplanması en kolay yoldur. Bunu aşağıdaki örnek üzerinde açıklayalım.

Örnek 3.1.1 X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$X = x$	-2	-1	0	1	2
$P(X = x)$	$1/5$	$1/5$	$1/5$	$1/5$	$1/5$

şeklinde verilmiş olsun. $D_X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ olup $Y = X^2$ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulalım. Y nin değer kümesinin $D_Y = \{0, 1, 4\}$ olduğu açıktır. $y \in D_Y$ için $P(Y = y)$ olasılıkları,

$$P(Y = 0) = P(X = 0) = 1/5,$$

$$P(Y = 1) = P(X^2 = 1) = P(X = 1 \text{ veya } X = -1) = P(X = 1) + P(X = -1) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

$$P(Y = 4) = P(X^2 = 4) = P(X = 2 \text{ veya } X = -2) = P(X = 2) + P(X = -2) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

şeklinde hesaplanmıştır. Buna göre, $y \in \mathbb{R} \setminus D_Y$ için $P(Y = y) = 0$ ve $y \in D_Y$ içinde olasılıklar yukarıda verildiği gibidir. Buna göre, Y nin olasılık fonksiyonunu

$Y = y$	0	1	4
$P(Y = y)$	$1/5$	$2/5$	$2/5$

şeklinde yazabiliriz $\oplus$

Dağılım fonksiyonu $F_X(x)$, olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu da $f(x)$ olan X rasgele değişkenini göz önüne alalım. $Y = g(X)$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F_Y(y)$, X in dağılım fonksiyonu türünden

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da, Y kesikli bir rasgele değişken ise olasılık fonksiyonu, $y \in D_Y$ için olasılıklar

$$P(Y = y) = F_Y(y^+) - F_Y(y^-)$$

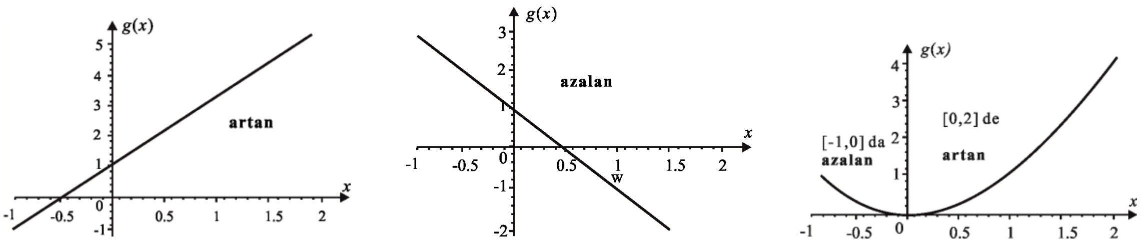
şeklinde hesaplanabilir. Y sürekli ise olasılık yoğunluk fonksiyonu $y \in D_Y$ için,

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{d\,F_Y(y)}{dy} & , \quad F_Y(y) \text{ nin türevlenebildiği yerlerde}\\ 0 & , \qquad\qquad d.y\end{cases}$$

şeklindedir. Ayrıca, Y nin dağılım fonksiyonu $F_Y(y)=F_X(g^{-1}(y))$ olup, bileşke fonksiyonun türevi (Y nin olasılık yoğunluk fonksiyonu),

$$f_Y(y)=\frac{d\,F_Y(y)}{dy}=\frac{d}{dy}F_X(g^{-1}(y))=f_X(g^{-1}(y))\frac{d\,g^{-1}(y)}{dy}$$

şeklindedir. $g(x)$ fonksiyonu monoton artan ise birinci türevi pozitif, monoton azalan ise negatiftir. Ancak, fonksiyon, bazı yerlerde artan, bazı yerlerde azalan olabilir (Şekil (3.1.2)).



Şekil 3.1.2 Monoton artan ve azalan dönüşümler

Buradan,

fonksiyon monoton artan ve türevlenebilir ise $\dfrac{d\,g^{-1}(y)}{dy}>0$

fonksiyon monoton azalan ve türevlenebilir ise $\dfrac{d\,g^{-1}(y)}{dy}<0$

olup seçilen fonksiyonun durumuna göre, Y in olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_Y(y)=\frac{d\,F_Y(y)}{dy}=\frac{d}{dy}F_X(g^{-1}(y))=f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{d\,g^{-1}(y)}{dy}\right|$$

şeklinde yazılmalıdır.

Örnek 3.1.2 X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases}2x & , \quad 0<x<1\\ 0 & , \qquad d.y.\end{cases}$$

olarak verilmiş olsun. $Y=3X+1$ ve $Z=-3X+1$ rasgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulalım. $D_Y=(1,\,4)$ olup $g(x)=3x+1$ fonksiyonu monoton artandır. Ayrıca,

$$g^{-1}(y)=\frac{y-1}{3} \text{ ve } \frac{d}{dy}g^{-1}(y)=\frac{1}{3}$$

olup $1<y<4$ için Y nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{d\,g^{-1}(y)}{dy}\right| = 2\left(\frac{y-1}{3}\right)\frac{1}{3} = \frac{2}{9}(y-1)$$

şeklindedir. Yani, Y nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{9}(y-1) & , \quad 1 < y < 4 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

şeklindedir. Diğer taraftan, Z nin değer kümesi $D_Z = (-2, 1)$ olup $h(x) = -3x+1$ fonksiyonu monoton azalandır. Ters dönüşüm ve türevi,

$$g^{-1}(z) = \frac{1-z}{3} \text{ ve } \frac{d}{dz}g^{-1}(z) = -\frac{1}{3}$$

olup,

$$f_Z(z) = f_X\left(g^{-1}(z)\right)\left|\frac{d\,g^{-1}(z)}{dz}\right| = 2\left(\frac{1-y}{3}\right)\left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{2}{9}(1-y)$$

eşitliğinden Z rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu da,

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{2}{9}(1-z) & , \quad -2 < z < 1 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olarak bulunmuştur $\oplus$

Herhangi bir X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$, dağılım fonksiyonu da $F_X(x)$ olsun. $Y = |X|$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $y \in D_Y$ için,

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(|X| \le y) = P(-y \le X \le y) = F_X(y) - F_X(-y)$$

ve dağılım fonksiyonunun türevinden de Y nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y) + f_X(-y) & , \quad y > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

dir. $Z = X^2$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ise,

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X^2 \le z) = P(-\sqrt{z} \le X \le \sqrt{z}) = F_X(\sqrt{z}) - F_X(-\sqrt{z})$$

şeklindeki dağılım fonksiyonunun türevinden

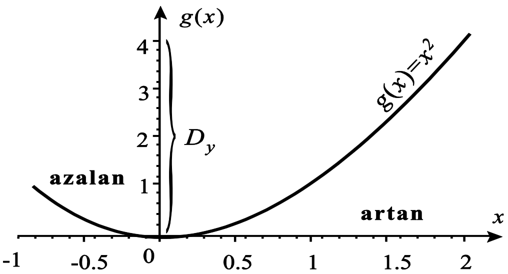
$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{f_X(\sqrt{z}) + f_X(-\sqrt{z})}{2\sqrt{z}} & , \quad z > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

şeklinde olur.

Örnek 3.1.3 Herhangi bir X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases} 1/3 & , \quad -1<x<2 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olsun. $Y = X^2$ nin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım.



Şekil 3.1.3 $g(x)=x^2$ *dönüşümünün* $[-1,2]$ *aralığındaki grafiği*

Y nin değer kümesi Şekil (3.1.3) deki grafikten de görüldüğü gibi $D_Y=(0,4)$ dür. Buna göre, $g(x)=x^2$ fonksiyonu $(-1,0)$ aralığında azalan, $(1,2)$ aralığında ise artandır.

Y nin dağılım fonksiyonu için $D_Y=(0,4)$ olduğundan, $y\le 0$ ise $F_Y(y)=0$ ve $y\ge 4$ ise $F_Y(y)=1$ olduğu açıktır. Diğer taraftan, $0<y\le 1$ için

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le \sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{3}dx=\frac{2\sqrt{y}}{3}$$

ve $1<y<4$ için

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-1\le X\le \sqrt{y})=\int_{-1}^{\sqrt{y}}\frac{1}{3}dx=\frac{1+\sqrt{y}}{3}$$

dir. Buradan Y nin dağılım fonksiyonu ile olasılık yoğunluk fonsiyonu,

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0 & , \quad y\le 0 \\ \dfrac{2\sqrt{y}}{3} & , \quad 0<y\le 1 \\ \dfrac{1+\sqrt{y}}{3} & , \quad 1<y<4 \\ 1 & , \quad y\ge 4 \end{cases} \quad \text{ve} \quad f_Y(y)=\frac{d\,F_Y(y)}{dy}=\begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt{y}} & 0<y<1 \\ \dfrac{1}{6\sqrt{y}} & 1<y<4 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

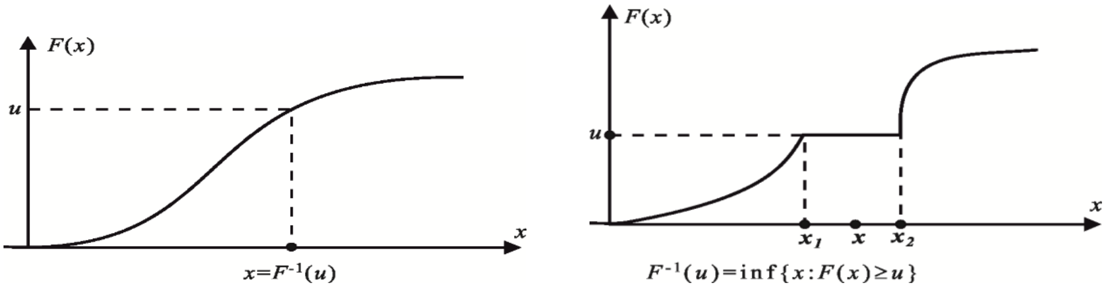
şeklindedir $\oplus$

Örnek 3.1.4 Dağılım fonksiyonu F olan X rasgele değişkenini göz önüne alalım. $U=F(X)$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım.

F dağılım fonksiyonu olduğundan azalmayandır. Ayrıca, $D_U=[0,1]$ olup $u<0$ için $F_U(u)=0$ ve $u\ge 1$ için $F_U(u)=1$ olduğu açıktır. Fonksiyon kesin artan ise, $0<u<1$ için fonksiyonun değeri

$$F_U(u) = P(U \le u) = P(F(X) \le u) = P(X \le F^{-1}(u)) = F(F^{-1}(u)) = u$$

dur. Ancak, F dağılım fonksiyonu olduğundan azalmayan olup fonksiyon bazı yerlerde sabit olabilir (Şekil 3.1.4). Örneğin, seçilen bir $[x_1, x_2]$ aralığında, her $x \in [x_1, x_2]$ için $F(x) = u$ olabilir. Yani, seçilen bir u değerine karşılık bir çok x değeri vardır. Yani, $F^{-1}(u)$ iyi tanımlı değildir. Bunun için, $F^{-1}(u)$ fonksiyonu, $F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \ge u\}$ olarak tanımlandığında problem giderilmiş olur.



Şekil 3.1.4 F Dağılım fonksiyonunun ters dönüşümü

Dağılım fonksiyonunun sabit olduğu aralıkta her x değerine karşılık bir u, her u değerine karşılık da bir x değeri vardır. Yani, $F^{-1}(u)$ iyi tanımlıdır. Bu durum dikkate alındığında, U nun dağılım fonksiyonu ile olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & , \quad u < 0 \\ u & , \quad 0 \le u < 1 \\ 1 & , \quad > 1 \end{cases} \quad \text{ve} \quad f_U(u) = \frac{dF_U(u)}{du} = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < u < 1 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

şeklindedir.

3.2. Çok Değişkenli Dönüşümler

Bu kısımda, X ve Y ortak olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x, y)$ olan herhangi iki rasgele değişken olmak üzere, $U = g(X, Y)$ gibi bir rasgele değişkenin olasılık fonksiyonunun elde edilmesi üzerinde durulacaktır. Burada, g fonksiyonu, $\mathbb{R}^2$ den $\mathbb{R}$ ye giden bir fonksiyondur. İşlemlerin kolay yürütülebilmesi için, ağırlıklı olarak iki değişkenli dönüşümler ele alınacaktır. Burada g fonksiyonu sürekli olabildiği gibi, X ve Y nin sürekli olmayan bir fonksiyonu da olabilir. Ayrıca, $X_1, X_2, \ldots, X_k$ ortak olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ olan rasgele değişkenler olmak üzere, $U = g(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ şeklindeki bir rasgele değişkenin olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonuna da ihtiyaç duyulabilir. Diğer taraftan, X ve Y nin ortak olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu verildiğinde, $U = g_1(X,Y)$ ve $V = g_2(X,Y)$ şeklinde tanımlanan U ve V rasgele değişkenlerinin ortak olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu da bulunabilir.

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "(X,Y)"] \arrow[rr, bend right, "U=g(X,Y)"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Şekil 3.2.1 İki boyutlu dönüşüm

$U = g(X,Y)$ rasgele değişkeninin dağılımı değişik yollardan elde edilebilir. U tek değişkenli bir rasgele değişken olduğundan bazen doğrudan dağılım fonksiyonu bulunabilir. Dağılım fonksiyonundan da olasılık yoğunluk fonksiyonu bulunur. Bazen, başka tekniklerin denenmesi gerekebilir. Bunu aşağıdaki örnek üzerinde açıklamaya çalışalım.

Örnek 3.2.1 Bağımsız aynı $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip iki rasgele değişken X ve Y olsun. Olasılık yoğunluk fonksiyonları

$$f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

şeklinde verildiğinde, $U = \max(X,Y)$ ve $V = \min(X,Y)$ rasgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulalım. Burada olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulmak için dağılım fonksiyonu tekniği kullanılabilir. $u < 0$ ise, $F_U(u) = 0$ ve $u \geq 0$ için,

$$\begin{aligned} F_U(u) &= P(U \leq u) = P(\max(X,Y) \leq u) = P(X \leq u, Y \leq u) \\ &= P(X \leq u)P(Y \leq u) = [P(X \leq u)]^2 = (1-e^{-u})^2 \end{aligned}$$

olup U nun dağılım fonksiyonu

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & , \quad u < 0 \\ (1-e^{-u})^2 & , \quad u \geq 0 \end{cases}$$

şeklindedir. Dağılım fonksiyonunun türevinden U nun olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_U(u) = \frac{dF_U(u)}{du} = \begin{cases} 2e^{-u}(1-e^{-u}) & , \quad u > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olarak bulunur. V rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu da benzer şekilde bulunur. Yani, V nin dağılım fonksiyonu, $v < 0$ ise $F_V(v) = 0$ ve $v \geq 0$ için de

$$\begin{aligned} F_V(v) &= P(V \leq v) = P(\min(X,Y) \leq v) = 1 - P(\min(X,Y) > v) \\ &= 1 - P(X > v, Y > v) = 1 - P(X > v)P(Y > v) = 1 - [P(X > v)]^2 = 1 - e^{-2v} \end{aligned}$$

olup V nin dağılım fonksiyonu da

$$F_V(v)=\begin{cases} 0 & , \quad v<0 \\ 1-e^{-2v} & , \quad v\geq 0 \end{cases}$$

şeklindedir. Yine dağılım fonksiyonunun türevinden V nin olasılık yoğunluk fonksiyonu da

$$f_V(v)=\frac{dF_V(v)}{dv}=\begin{cases} 2e^{-2v} & , \quad v>0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olarak elde edilir $\oplus$

Kesikli rasgele değişkenlerde, dağılım fonksiyonuna ihtiyaç duyulmadan olasılık fonksiyonu bulunabilir.

Örnek 3.2.2 Bağımsız X ve Y rasgele değişkenlerinin olasılık fonksiyonu $\lambda>0$ için

$$P(X=x)=P(Y=x)=e^{-\lambda}\lambda^{x}/x! \quad ,x=0,1,2,...$$

olarak verilsin. $U=X+Y$ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulalım. U nun değer kümesi ile X ve Y nin değer kümeleri aynı olup olasılık fonksiyonu $u=0,1,2,3,...$ için,

$$P(U=u)=P(X+Y=u)=\sum_{y=0}^{u}P(X+Y=u\,|\,Y=y)P(Y=y)=\sum_{y=0}^{u}P(X+y=u)P(Y=y)$$
$$=\sum_{y=0}^{u}P(X=u-y)P(Y=y)=\sum_{y=0}^{u}\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^{u-y}}{(u-y)!}\right)\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!}\right)=\sum_{y=0}^{u}\frac{u!}{u!}\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^{u-y}}{(u-y)!}\right)\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!}\right)$$
$$=\frac{e^{-2\lambda}}{u!}\sum_{y=0}^{u}\left(\frac{u!}{y!(u-y)!}\right)\lambda^{y}\lambda^{u-y}=\frac{e^{-2\lambda}}{u!}\sum_{y=0}^{u}\binom{u}{y}\lambda^{y}\lambda^{u-y}=\frac{e^{-2\lambda}}{u!}(\lambda+\lambda)^{u}=\frac{e^{-2\lambda}(2\lambda)^{u}}{u!}$$

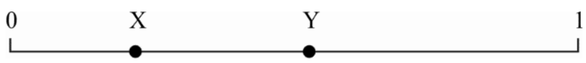
şeklinde doğrudan hesaplanabilir. U nun olasılık fonksiyonu, X (veya Y nin) nin olasılık fonksiyonuna benzemektedir. X ve Y nin olasılık fonksiyonlarında λ yerine 2λ gelmiştir. Yani, U nun olasılık fonksiyonu

$$P(U=u)=e^{-2\lambda}(2\lambda)^{u}/u! \quad , \ u=0,1,2,...$$

dir $\oplus$

Örnek 3.2.3 a) Birim uzunluğundaki düzgün bir çubuk üzerinde rasgele iki nokta işaretlensin. Bu iki nokta arasındaki uzaklığa Z diyelim. Z nin moment çıkaran fonksiyonunu bulup $E(Z^n)$ beklenen değerini hesaplayalım.

Birim uzunluğundaki çubuk üzerindeki noktalar X ve Y olsun. Rasgele seçilen bu iki nokta arasındaki uzaklık (şekilde de görüldüğü gibi) $Z=|X-Y|$ dir.



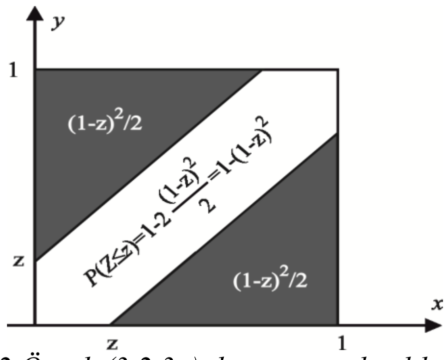
X ve Y rasgele değişkenleri bağımsız olup aynı olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahiptir. Buna göre, X ve Y nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ile marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları,

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}1 & , \quad 0<x,y<1 \\ 0 & , \quad d.y.\end{cases} \quad , \quad f_X(x)=f_Y(x)=\begin{cases}1 & , \quad 0<x<1 \\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

olarak yazılabilir. $D_Z=[0,1]$ olup aşağıdaki grafik bilgileri de dikkate alındığında Z nin dağılım fonksiyonu, $z\le 0$ için $F_Z(z)=0$, $z\ge 1$ için $F_Z(z)=1$ ve $0<z<1$ için $F_Z(z)=P(Z\le z)=1-(1-z)^2$ şeklinde yazılır (Şekil (3.2.3)). Dağılım fonksiyonunun türevinden olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_Z(z)=\begin{cases}2(1-z) & , \quad 0<z<1 \\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

olarak bulunur.



Şekil 3.2.2 Örnek (3.2.3a) da aranan olasılık (alan)

Buradan, Z nin moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_Z(t)=E(e^{tZ})=\int_{z=0}^{1} e^{tz}\, f_Z(z)\,dz=\int_{z=0}^{1} e^{tz}\, 2(1-z)\,dz=\frac{2}{t^2}(e^t-t-1)$$

şeklinde hesaplanmıştır.

Moment çıkaran fonksiyonunun sıfır noktası komşuluğundaki Taylor serisi açılımı,

$$M_Z(t)=E(e^{tZ})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}E(Z^n)=1+t\,E(Z)+\frac{t^2}{2!}E(Z^2)+\frac{t^3}{3!}E(Z^3)+\ldots+\frac{t^n}{n!}E(Z^n)+\ldots$$

olup $M_Z(t)=E(e^{tZ})=\frac{2}{t^2}(e^t-t-1)$ olduğundan, bu fonksiyonun Taylor serisi açılımı,

$$\frac{2}{t^2}(e^t-t-1)=\frac{2}{t^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}-t-1\right)=\frac{2}{t^2}\left(-1-t+1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+..\right)$$

$$=\frac{2}{t^2}\left(\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+..\right)=1+\frac{t}{3}+\frac{2t^2}{4!}+\frac{2t^3}{5!}+\frac{2t^4}{6!}+\ldots+\frac{2t^n}{(n+2)!}+\ldots$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$M_Z(t) = 1 + t\,E(Z) + \frac{t^2}{2!}E(Z^2) + \frac{t^3}{3!}E(Z^3) + \ldots + \frac{t^n}{n!}E(Z^n) + \ldots$$

ve

$$M_Z(t) = \frac{2}{t^2}(e^t - t - 1) = 1 + \frac{t}{3} + \frac{2t^2}{4!} + \frac{2t^3}{5!} + \frac{2t^4}{6!} + \ldots + \frac{2t^n}{(n+2)!}\ldots$$

eşitlikleri elde edilir. Buradaki polinomlarının katsayıları eşitlendiğinde,

$$E(Z) = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2!}E(Z^2) = \frac{2}{4!} \Rightarrow E(Z^2) = \frac{4}{4!} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{2(3)}$$

ve $n > 2$ için diğer momentler

$$\frac{t^n}{n!}E(Z^n) = \frac{2t^n}{(n+2)!} \Rightarrow E(Z^n) = \frac{2n!}{(n+2)!} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

dir. Dolayısı ile, Z rasgele değişkeninin bütün momentleri

$$E(Z^n) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

olarak hesaplanmış olur.

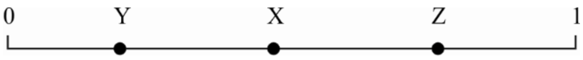
b) İki kişi saat 12:00 ile 13:00 arasında belli bir yerde görüşmek üzere anlaşıyorlar. Görüşme yerine önce gelen a saat ($0 < a < 1$) bekleyecektir. Her ikisinin de anlaştıkları yere varmaları birbirinden bağımsız olup (a) da verilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahiptir. Bu iki kişinin karşılaşma olasılıklarını (p diyelim) bulalım. Ayrıca, $p = 0.84$ olarak verildiğinde a yı (ne kadar bekleyeceğini) bulalım.

X ve Y kişilerin belirlenen yere gelme saatini göstersin. İki kişinin karşılaşabilmesi için $Z = |X - Y| \le a$ olması gerekir. Buna göre, aranan olasılık (a) daki sonuçtan

$$p = P(Z \le a) = P\big(|X - Y| \le a\big) = 1 - (1-a)^2$$

dir. $p = 0.84$ ise bekleme süresi $1-(1-a)^2 = 0.84$ eşitliğinden $a = 0.6$ saat veya $a = 36$ dakika olarak bulunur. Yani, önce gelen kişi en fazla 36 dakika bekleyecektir.

c) Birim uzunluğundaki düzgün bir çubuk üzerinde rasgele bir nokta işaretleyelim (bu nokta X olsun). Buna göre, elimizde uzunlukları X ve $1-X$ olan iki doğru parçası vardır. Daha sonra, $(0, X)$ aralığından rasgele bir nokta (buna Y diyelim), $(X, 1)$ aralığından da ikinci bir nokta (buna da Z diyelim) işaretleyelim. Y ve Z nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ile $U = Z - Y$ nin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım. Bu noktalar aşağıda şematik olarak gösterilmiştir.



X in olasılık yoğunluk fonksiyonu ile $X=x$ verildiğinde Y ve Z nin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonları

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & , \quad 0<x<1\\ 0 & , \quad d.y.\end{cases} \qquad f_{Y|X=x}(y\,|\,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & , \quad 0<y<x\\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

$$f_{Z|X=x}(z\,|\,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & , \quad 0<x<z<1\\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

şeklindedir. Buradan, X,Y,Z nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x,y,z)=f_X(x)\,f_{Y|X=x}(y\,|x)\,f_{Z|X=x}(z\,|x)=\frac{1}{x(1-x)}$$

$$\Rightarrow f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{1}{x(1-x)} & , \quad 0<y<x<z<1\\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

olarak bulunur. Y ve Z nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ise,

$$\int_{x=y}^{z}\frac{1}{x(1-x)}dx=\int_{x=y}^{z}\frac{1}{x}dx+\int_{x=y}^{z}\frac{1}{(1-x)}dx=\ln(x)\Big|_{x=y}^{z}-\ln(1-x)\Big|_{x=y}^{z}=\ln\left(\frac{z(1-y)}{y(1-z)}\right)$$

integralinin sonucundan,

$$f_{Y,Z}(y,z)=\begin{cases}\ln\left(\dfrac{z(1-y)}{y(1-z)}\right) & , \quad 0<y<z<1\\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

olarak elde edilir.

Şimdi, $U=Z-Y$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım. Önce, $0<u<z<1$ ve

$$f_U(u)=\int_{z\in D_Z}f(z,y)\,dz=\int_{z=u}^{1}\ln\left(\frac{z(1-(z-u))}{(z-u)(1-z)}\right)dz=-2\big(u\ln(u)+((1-u)\ln(1-u)\big)$$

olduğundan, U rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_U(u)=\begin{cases}-2\big(u\ln(u)+((1-u)\ln(1-u)\big) & , \quad 0<u<1\\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

olarak bulunur $\oplus$

Buraya kadar, X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu verildiğinde, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ olmak üzere, $g(X,Y)$ tek boyutlu rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu elde edilmeye çalışıldı. Şimdi, $X_1,\ldots,X_k$ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu verildiğinde, $i=1,2,3,...,k$, $g_i:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonları için

$$Y_1 = g_1(X_1,\ldots,X_k)\,,\quad Y_2 = g_2(X_1,\ldots,X_k)\,,\ldots,\; Y_k = g_k(X_1,\ldots,X_k)$$

rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım. Burada verilen dönüşümlerden $i=1,2,3,...,k$ için X_i lerin

$$X_1 = h_1(Y_1,\ldots,Y_k)\,,\quad X_2 = h_2(Y_1,\ldots,Y_k)\,,\ldots,X_k = h_k(Y_1,\ldots,Y_k)$$

şeklinde ters dönüşümlerinin bulunduğunu ve $h_i\,, i=1,2,3,...,k$ fonksiyonlarının her bir bileşenine göre türevlenebildiğini varsayalım. Buradan, Jacobien matrisi

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(Y_1,\ldots,Y_k)}{\partial Y_1} & \frac{\partial h_1(Y_1,\ldots,Y_k)}{\partial Y_2} & \cdots & \frac{\partial h_1(Y_1,\ldots,Y_k)}{\partial Y_k} \\ \frac{\partial h_2(Y_1,\ldots,Y_k)}{\partial Y_1} & \frac{\partial h_2(Y_1,\ldots,Y_k)}{\partial Y_2} & \cdots & \frac{\partial h_2(Y_1,\ldots,Y_k)}{\partial Y_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_k(Y_1,\ldots,Y_k)}{\partial Y_1} & \frac{\partial h_k(Y_1,\ldots,Y_k)}{\partial Y_2} & \cdots & \frac{\partial h_k(Y_1,\ldots,Y_k)}{\partial Y_k} \end{bmatrix}$$

olarak yazılır. $X_1, X_{2,} \ldots, X_k$ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x_1,\ldots,x_k)$ ise $Y_1,Y_{2,}\ldots,Y_k$ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu, $|J| = |\det(J)|$ olmak üzere, $y_1,\ldots,y_k \in D_{Y_1,\ldots,Y_k}$ için

$$f_{Y_1,\ldots,Y_k}(y_1,\ldots,y_k) = |J|\, f_{X_1,\ldots,X_k}(h_1(y_1,\ldots,y_k), h_2(y_1,\ldots,y_k),..., h_k(y_1,\ldots,y_k))$$

şeklindedir.

Örnek 3.2.4 a) X ve Y aynı dağılımlı bağımsız rasgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad , \; x \in \mathbb{R}$$

şeklinde verilmiş olsun. $U = X + Y$ ve $V = X - Y$ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım. Ters dönüşümler $X = (U+V)/2$ ve $Y = (U-V)/2$ olup Jacobien matrisi ve determinantı,

$$J=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial X}{\partial U} & \dfrac{\partial X}{\partial V}\\ \dfrac{\partial Y}{\partial U} & \dfrac{\partial Y}{\partial V}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \det(J)=-\frac{1}{2}$$

dir. X ve Y bağımsız olduğundan ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$f(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}=\frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}$$

dir. Buradan U ve V nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu, $u, v \in \mathbb{R}$ için

$$f_{U,V}(u,v)=\ |J|\,f_{X,Y}\left(x(u,v),y(u,v)\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{u+v}{2}\right)^2+\left(\frac{u-v}{2}\right)^2\right]\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\exp\left(-\frac{1}{8}\left[(u+v)^2+(u-v)^2\right]\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\exp\left(-\frac{1}{8}\left[2u^2+2v^2\right]\right)=\frac{1}{4\pi}\,e^{-(u^2+v^2)/4}$$

şekildedir. Ayrıca bu ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{U,V}(u,v)=\frac{1}{4\pi}\,e^{-(u^2+v^2)/4}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-u^2/4}\,\frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-v^2/4}=f_U(u)\,f_V(v)$$

şeklinde yazılabildiğinden, $f_{U,V}(u,v)=f_U(u)\,f_V(v)$ eşitliği sağlanır. Yani, U ve V rasgele değişkenleri bağımsızdır.

b) Şimdi de $U=X/Y$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım. Bunun için, $V=Y$ şeklinde bir yardımcı dönüşüm tanımlayalım. Buradan, $U=X/Y$ ve $V=Y$ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edildiğinde U nun marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu bulunur. Ters dönüşümler $X=UV$ ve $Y=V$ olup Jacobien matrisi ve determinantı,

$$J=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial X}{\partial U} & \dfrac{\partial X}{\partial V}\\ \dfrac{\partial Y}{\partial U} & \dfrac{\partial Y}{\partial V}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v & u\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \det(J)=v$$

şeklindedir. Buna göre, U ve V nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $u, v \in D_{U,V}$ için

$$f_{U,V}(u,v)=|J|\,f_{X,Y}(x(u,v),y(u,v))=\frac{|v|}{2\pi}\,\exp\left(-\frac{1}{2}[(uv)^2+v^2)]\right)$$

$$=\frac{|v|}{2\pi}\,\exp\left(-\frac{v^2}{2}[u^2+1]\right)$$

dir. Herhangi bir $h(x)$ fonksiyonu çift ($h(-x)=h(x)$) ise, $a\in\mathbb{R}^{+}$ için,

$$\int_{-a}^{a} h(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} h(x)\,dx$$

dir. Buna göre, U ve V nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu v ye göre çifttir. Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun D_V üzerinden integrali ($a=u^2+1$ diyelim),

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v)\,dv=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|v|e^{-a\,v^2/2}dv=\frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\infty} v\,e^{-a\,v^2/2}dv$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-at}dt,\qquad t=\frac{v^2}{2}\ \text{dönüşümü ile}$$

$$=\frac{1}{a\pi}\left[-e^{-at}\Big|_{t=0}^{\infty}\right]=\frac{1}{a\pi}=\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+u^2}$$

olup U rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_U(u)=\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+u^2}\ ,\ u\in\mathbb{R}$$

olarak bulunmuştur $\oplus$

Örnek 3.2.5 a) X ve Y aynı dağılımlı bağımsız rasgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & ,\quad x>0 \\ 0 & ,\quad d.y. \end{cases}$$

olsun. $U=X+Y$ ve $V=X/(X+Y)$ rasgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulalım. Ters dönüşümler, $X=UV$ ve $Y=U(1-V)$ olup Jacobien matrisi ile determinantı,

$$J=\begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial U} & \frac{\partial X}{\partial V} \\ \frac{\partial Y}{\partial U} & \frac{\partial Y}{\partial V} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v & u \\ (1-v) & -u \end{bmatrix}\quad \text{ve}\quad \det(J)=-uv-u(1-v)=-u$$

dir. X ve Y bağımsız olduğundan ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & ,\quad x>0, y>0 \\ 0 & ,\quad d.y. \end{cases}$$

dır. U ve V nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ise $0<v<1$ ve $u>0$ için,

$$f_{U,V}(u,v) = |J|\, f_{X,Y}(x(u,v), y(u,v)) = |u|\, e^{-\left(uv+(u(1-v))\right)} = u\,e^{-u}$$

şeklindedir. Daha açık olarak ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} u\,e^{-u} & , \quad 0 < v < 1,\ u > 0 \\ 0 & , \qquad\qquad d.y. \end{cases}$$

dir. Bu ortak olasılık yoğunluk fonksiyonundan U ve V nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları da,

$$\int_{v=0}^{1} f_{U,V}(u,v)\,dv = \int_{v=0}^{1} u\,e^{-u}dv = u\,e^{-u} \qquad \text{ve} \qquad \int_{u=0}^{\infty} f_{U,V}(u,v)\,du = \int_{u=0}^{\infty} u\,e^{-u}du = 1$$

integrallerinin sonucundan

$$f_U(u) = \begin{cases} u\,e^{-u} & , \quad u > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases} \qquad\qquad f_V(v) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < v < 1 \\ 0 & , \qquad d.y. \end{cases}$$

olarak bulunmuştur. Ayrıca, $f_{U,V}(u,v) = f_U(u)\, f_V(v)$ olduğundan U ve V rasgele değişkenleri bağımsızdır (bu sonuç Teorem (7.4.2) den de elde edilebilirdi).

b) X , Y aynı dağılımlı bağımsız rasgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = f_Y(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \qquad d.y. \end{cases}$$

olarak verildiğinde, $U = XY$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım. $V = X$ yardımcı dönüşümü ile ters dönüşümler, $X = V$ ve $Y = U/V$ olup Jacobien matrisi ile determinantı,

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial U} & \dfrac{\partial X}{\partial V} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial U} & \dfrac{\partial Y}{\partial V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{v} & -\dfrac{u}{v^2} \end{bmatrix} \quad , \quad \det(J) = -\frac{1}{v}$$

şeklinde hesaplanmıştır. Buradan, U ve V nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \dfrac{1}{v} & , \quad 0 < u < v < 1 \\ 0 & , \qquad\qquad d.y. \end{cases}$$

olup U nun marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\int_{v \in D_V} f_{U,V}(u,v)\,dv = \int_{v=u}^{1} \frac{dv}{v} = -\ln(u)$$

den,

$$f_U(u) = \begin{cases} -\ln(u) & , \quad 0 < u < 1 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olarak bulunur.

c) X_1, X_2, X_3 rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} 6\, e^{-x_1-x_2-x_3} & , \quad 0 < x_1 < x_2 < x_3 < \infty \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olarak verilmiş olsun. $U_1 = X_1$, $U_2 = X_2 - X_1$ ve $U_3 = X_3 - X_2$ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım. Ters dönüşümler,

$$X_1 = U_1 \quad X_2 = U_1 + U_2 , \; X_3 = U_1 + U_2 + U_2$$

olup Jacobien matrisi ve determinantı

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial U_1} & \frac{\partial X_1}{\partial U_2} & \frac{\partial X_1}{\partial U_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial U_1} & \frac{\partial X_2}{\partial U_2} & \frac{\partial X_2}{\partial U_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial U_1} & \frac{\partial X_3}{\partial U_2} & \frac{\partial X_3}{\partial U_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \qquad \det(J) = 1$$

dir. Buradan, $U_1, U_2, \; U_3$ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu,

$$f_{U_1,U_2,U_3}(u_1,u_2,u_3) = \begin{cases} 6\, e^{-3u_1-2u_2-u_3} & , \quad u_i > 0, i = 1,2,3 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

şeklinde bulunmuş olur. Diğer taraftan, marjinaller hesaplandığında, X_1, X_2, X_3 rasgele değişkenleri bağımsız olmamasına rağmen,

$$f_{U_1,U_2,U_3}(u_1,u_2,u_3) = f_{U_1}(u_1)\, f_{U_2}(u_2)\, f_{U_3}(u_3)$$

eşitliği sağlandığından, $U_1, U_2, \; U_3$ rasgele değişkenleri bağımsızdır.

3.3. Üretici Fonksiyonlar Tekniği

İkinci bölümde, bazı üretici fonksiyonlardan söz edildi. Bu fonksiyonlar genellikle rasgele değişkenlerin momentlerinin hesaplanmasında kullanılmakla birlikte bazen rasgele değişkenlerin dönüşümlerinin olasılık fonksiyonlarının bulunmasında da kullanılır. Dönüşümün moment çıkaran fonksiyonu (varsa) bilinen bir dağılımın moment çıkaran fonksiyona benzeyebilir.

X ve Y bağımsız rasgele değişkenler olmak üzere, $U = X + Y$ rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu, X ve Y nin moment çıkaran fonksiyonlarının çarpımı olarak yazılabildiğini ($M_U(t) = M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$) biliyoruz. Benzer şekilde, U nun karekteristik fonksiyonu da $\phi_U(t) = \phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$ dir. U nun moment çıkaran fonksiyonu (veya karekteristik fonksiyonu) bazen olasılık fonksiyonuna ihtiyaç duyulmadan bulunabilir. U nun moment çıkaran fonksiyonu (veya karekteristik fonksiyonu) bilinen bir dağılımın (genellikle beşinci bölümde bahsedilecek dağılımlar) moment çıkaran fonksiyonu ile aynı ise U nun olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu, o dağılımın olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu olur. Var olması halinde genellikle moment çıkaran fonksiyonu kullanılır. Moment çıkaran fonksiyonunun olmadığı hallerde karekteristik fonksiyon kullanılabilir.

Örnek 3.3.1 a) X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2} \quad , \; x \in \mathbb{R}$$

olsun. Bu rasgele değişkenin moment çıkaran fonksiyonu yoktur, karekteristik fonksiyonu ise $t \in \mathbb{R}$ için $\phi_X(t) = e^{-|t|}$ dir (Örnek (2.6.5)). Bu olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bağımsız rasgele değişkenler $X_1, X_2, \ldots, X_n$ olsun. X_i lerin örneklem ortalaması olarak bilinen $\overline{X}_n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$ rasgele değişkenini tanımlayalım. Bu rasgele değişkenin karekteristik fonksiyonu,

$$\begin{aligned}\phi_{\overline{X}_n}(t) &= E(e^{it\overline{X}_n}) = E(e^{it(X_1+\ldots+X_n)/n}) \\ &= \prod_{k=1}^{n} E(e^{(it/n)X_k}) = [\phi_X(t/n)]^n = [e^{-|t/n|}]^n = e^{-|t|} = \phi_X(t)\end{aligned}$$

olduğundan, $\overline{X}_n$ ile X_i rasgele değişkenlerinin karekteristik fonksiyonları aynıdır. O halde, her ikisi de aynı olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahiptir. Yani, $\overline{X}_n$ nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{\overline{X}_n}(y) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2} \quad , \; y \in \mathbb{R}$$

dir.

b) X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{\frac{-1}{2x}} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olsun. X in karekteristik fonksiyonu (Maple VIII paket programı yardımı ile),

$$\phi_X(t)=E(e^{itX})=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi x^3}}e^{-\frac{1}{2x}+itx}dx=-\frac{1}{\sqrt{-2it}}e^{-\sqrt{-2it}}+e^{-\sqrt{-2it}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{-2it}}\right)$$
$$=\ e^{-\sqrt{-2it}}\left(-\frac{1}{\sqrt{-2it}}+1+\frac{1}{\sqrt{-2it}}\right)\ =\ e^{-\sqrt{-2it}}$$

olarak hesaplanmıştır. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bağımsız rasgele değişkenler $X_1, X_2, \ldots, X_n$ olmak üzere, $\overline{X}_n=(X_1+\ldots+X_n)/n$ örneklem ortalamasının olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım. $\overline{X}_n$ nin karekteristik fonksiyonu

$$\phi_{\overline{X}_n}(t)=E(e^{it\overline{X}_n})=E(e^{it(X_1+\ldots+X_n)/n})=\prod_{k=1}^{n}E(e^{(it/n)X_k})=(\phi_X(t/n))^n=\left(e^{-\sqrt{-2it/n}}\right)^n$$
$$=e^{-n\sqrt{-2it/n}}=e^{-\sqrt{-2it/n}}=\phi_X(t/n)$$

olup, $\overline{X}_n$ ile X/n rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonları aynıdır. Buradan, $\overline{X}_n$ nin olasılık yoğunluk fonksiyonu $y>0$ için

$$f_{\overline{X}_n}(y)=n\,f_X(n\,y)=\frac{n}{n\sqrt{2\pi(ny)^3}}e^{-1/(2ny)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi n\,y^3}}e^{-1/(2ny)}$$

veya daha açık olarak,

$$f_{\overline{X}_n}(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi n\,y^3}}e^{-\frac{1}{2ny}} & ,\quad y>0\\ 0 & ,\quad d.y.\end{cases}$$

şeklindedir$\oplus$

Bir X rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu $M_X(t)$, karekteristik fonksiyonu da $\phi_X(t)$ olsun. $Y=aX+b$ rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_Y(t)=M_{b+aX}(t)=E(e^{(b+aX)t})=e^{bt}E(e^{atX})=e^{bt}M_X(at)$$

ve karekteristik fonksiyonu da,

$$\phi_Y(t)=\phi_{b+aX}(t)=E(e^{i(b+aX)t})=e^{ibt}E(e^{iatX})=e^{ibt}\phi_X(at)$$

şeklindedir.

Örnek 3.3.2 a) X ve Y aynı olasılık fonksiyonuna sahip bağımsız rasgele değişkenler olsun. Olasılık fonksiyonu $\lambda>0$ için

$$P(X = x) = e^{-\lambda}\lambda^x / x! \quad , \quad x = 0,1,2,...$$

olarak verildiğinde, $U = X + Y$ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulalım.

X in moment çıkaran fonksiyonunun $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$ (Örnek (2.5.3a)) olduğunu biliyoruz. Buradan, U rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_U(t) = M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t) = (e^{\lambda(e^t-1)})(e^{\lambda(e^t-1)}) = e^{2\lambda(e^t-1)}$$

olup, X in moment çıkaran fonksiyonunda λ yerine 2λ gelmiştir. Buradan, U nun olasılık fonksiyonu X in olasılık fonksiyonunda λ yerine 2λ yazılması ile elde edilir. Yani, U nun olasılık fonksiyonu,

$$P(U = u) = e^{-2\lambda}(2\lambda)^u / u! \quad , u = 0,1,2,...$$

dir (Örnek (3.2.2) ile karşılaştırınız).

b) $0 < p < 1$ ve $q = 1 - p$ olmak üzere bağımsız X ve Y rasgele değişkenlerinin olasılık fonksiyonları,

$$P(X = x) = P(Y = x) = p^x q^{1-x} , x = 0,1$$

olarak verilmiş olsun. Dolayısı ile, X ve Y nin moment çıkaran fonksiyonları da aynıdır. X in moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{1} e^{tx} P(X = x) = q + pe^t$$

olup $U = X + Y$ rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu da,

$$M_U(t) = M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t) = (q + pe^t)(q + pe^t) = (q + pe^t)^2$$

dir. Olasılık fonksiyonu,

$$P(Z = x) = \binom{2}{x} p^x q^{2-x} \quad , \quad x = 0,1,2$$

olan bir Z rasgele değişkenin moment çıkaran fonksiyonu (beşinci bölümde bahsedilecek olan özel dağılımlardan biridir)

$$M_Z(t) = E(e^{tZ}) = \sum_{x=0}^{2} e^{tx} \binom{2}{x} p^x q^{2-x} = \sum_{x=0}^{2} \binom{2}{x} (pe^t)^x q^{2-x} = (q + pe^t)^2$$

dir. Buradan, $U = X + Y$ rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu ile Z nin moment çıkaran fonksiyonu aynıdır. O halde, U nın olasılık fonksiyonu

$$P(U=u)=\binom{2}{u}p^{u}q^{2-u} \quad , u=0,1,2$$

dir.

c) Bağımsız X ve Y rasgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonları $\mu_x, \mu_y \in \mathbb{R}$ ve $\sigma_x > 0$, $\sigma_y > 0$ için,

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\,\sigma_x^2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_x^2}(x-\mu_x)^2\right) \quad , \quad x\in\mathbb{R}$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\,\sigma_y^2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_y^2}(y-\mu_y)^2\right) \quad , \quad y\in\mathbb{R}$$

olarak verilmiş olsun. Bu rasgele değişkenlerin moment çıkaran fonksiyonları,

$$M_X(t)=\exp\left(t\,\mu_x+\frac{t^2\sigma_x^2}{2}\right) \quad \text{ve} \quad M_Y(t)=\exp\left(t\,\mu_y+\frac{t^2\sigma_y^2}{2}\right)$$

olup $U = X+Y$ nin moment çıkaran fonksiyonu $\mu=\mu_x+\mu_y$ ve $\sigma^2=\sigma_x^2+\sigma_y^2$ olmak üzere,

$$M_U(t)=M_{X+Y}(t)=M_X(t)M_Y(t)=\exp\left(t\,\mu_x+\frac{t^2\sigma_x^2}{2}\right)\exp\left(t\,\mu_x+\frac{t^2\sigma_x^2}{2}\right)$$

$$=\exp\left(t\,(\mu_x+\mu_y)+\frac{t^2(\sigma_x^2+\sigma_x^2)}{2}\right)=\exp\left(t\,\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}\right)$$

dir. Buna göre, U nun moment çıkaran fonksiyonu ile, X in moment çıkaran fonksiyonu aynı yapıdadır (μ_x yerine μ, σ_x^2 yerine σ^2 gelmiştir). Buna göre, U nun olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_U(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\,\sigma^2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(u-\mu)^2\right) \quad , \quad u\in\mathbb{R}$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde, $V = X-Y$ rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu da,

$$M_V(t)=M_{X-Y}(t)=E\left(e^{t(X-Y)}\right)=E\left(e^{tX}\right)\,E\left(e^{-tY}\right)=M_X(t)M_Y(-t)$$

$$=\exp\left(t\mu_x+\frac{t^2\sigma_x^2}{2}\right)\exp\left(-t\mu_y+\frac{t^2\sigma_y^2}{2}\right)$$

$$=\exp\left(t(\mu_x-\mu_y)+\frac{t^2(\sigma_x^2+\sigma_x^2)}{2}\right)=\exp\left(t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}\right)$$

olup olasılık yoğunluk fonksiyonu, $\mu = \mu_x - \mu_y$ ve $\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ olmak üzere,

$$f_V(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(v-\mu)^2 \right) \quad , \quad v \in \mathbb{R}$$

şeklindedir.