HAFTA 11

ÖZEL DAĞILIMLAR

Bu bölümde, olasılık ve istatistikte öne çıkan bazı dağılımlar ele alınacaktır. Öncelikle, olasılık dağılımlarının burada bahsedilen dağılımlarla sınırlı olmadığını belirtelim. Johnson ve Kotz (1970) dağılımlar ile ilgili dört ciltlik bir kitap yayınlamıştır. Bunlardan birinci cildi tek değişkenli kesikli dağılımlar, ikinci ve üçüncü ciltleri tek değişkenli sürekli dağılımlardan oluşmaktadır. Dördüncü cilt çok değişkenli istatistik dağılımlarını içermektedir. Olasılık dağılımları da rasgele değişkenlerde olduğu gibi kesikli ve sürekli dağılımlar olarak ayrı ayrı incelenecektir. Rasgele değişkenler ve dağılımları ikinci bölümde ayrıntılı olarak incelendiğinden, burada seçilen özel dağılımların bazı özellikleri üzerinde durulacaktır. Ayrıca, çok değişkenli normal dağılım, özellikle iki değişkenli normal dağılım üzerinde de durulacaktır. Bazı dağılım aileleri (üstel aileler) de bu bölümde yer verilecek konular arasındadır.

5.1. Tek Değişkenli Kesikli Dağılımlar

5.1.1. Bernoulli Dağılımı

Sadece iki sonucu (başarı-başarısız, doğru-yanlış gibi) bulunan deneylere Bernoulli deneyi denir. Bir Bernoulli deneyinin örnek uzayı iki elemandan oluşan bir kümedir. Yani, örnek uzay $\Omega = \{w_1, w_2\}$ olup

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$w \to X(w) = \begin{cases} 0 & , \quad w = w_0 \\ 1 & , \quad w = w_1 \end{cases}$$

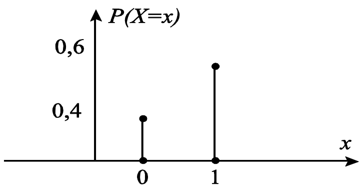
olarak tanımlanan X fonksiyonuna Bernoulli rasgele değişkeni denir ve değer kümesi $D_X = \{0,1\}$ dir. Bu fonksiyonun bir rasgele değişken olduğu ikinci bölümde gösterildi. Genellikle, {Başarı} yerine $\{w : X(w) = 1\}$ ve $P(\{\text{Başarı}\})$ veya $P(\{w : X(w) = 1\})$ yerine de kısaca $P(X = 1)$ yazılır. $P(X = 1)$ başarı olasılığına p denirse, $q = 1 - p$ olmak üzere Bernoulli rasgele değişkeni için olasılıklar,

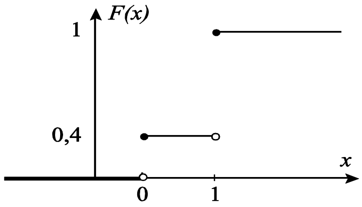
$$P(X = x) = p^x q^{1-x} \ , \ x = 0,1$$

formülü ile hesaplanır. $D_X = \{0,1\}$ ve $x \in D_X$ için $P(X = x) = p^x q^{1-x}$ olmak üzere, Bernoulli rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases} P(X=x) & , \quad x\in D_X \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

dir. Dağılımın olasılık fonksiyonu ile dağılım fonksiyonunun grafikleri Şekil (5.1.1) de verilmiştir.





Şekil 5.1.1 Bernouilli dağılımının olasılık fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu (p=0.6)

Bu olasılık fonksiyonu kısaca,

$$P(X=x)=p^x q^{1-x} \ , \ x=0,1$$

şeklinde ifade edilecektir. $0<p<1$ için p başarı olasılığını göstermek üzere, Bernoulli dağılımı için $X\sim Bern(p)$ gösterimi kullanılacaktır.

Bernoulli dağılımının bütün momentleri başarı olasılığına eşittir. Yani, k sonlu bir tamsayı ($k\in\mathbb{N}$) olmak üzere,

$$E(X^k)=\sum_{x=0}^{1} x\,P(X=x)=0.P(X=0)+1.P(X=1)=P(X=1)=p$$

dir. Buradan, dağılımın varyansı

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p-p^2=p(1-p)=pq$$

ve moment çıkaran fonksiyonu da $t\in\mathbb{R}$ için

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_{x=0}^{1} e^{tx}P(X=x)=q+pe^t$$

dir. Benzer şekilde, karekteristik fonksiyonu $\varphi_X(t)=q+pe^{it}$, çarpımsal moment çıkaran fonksiyonu da $N_X(t)=E(t^X)=q+pt$ dir. $X\sim Bern(p)$ dağılımı için,

$$E(X)=\left.\frac{d\,N_X(t)}{d\,t}\right|_{t=1}=p$$

olup diğer bütün çarpımsal momentler sıfırdır. Yani,

$$E\big(X(X-1)\big)=0,\ E\big(X(X-1)(X-2)\big)=0,\ldots,E\big(X(X-1)(X-2)...(X-k)\big)=0$$

dır. Kümülant üreten fonksiyonu $K_X(t)=\ln(M_X(t))$ olup, kümülantlardan ilk üç tanesi

$$K_1=\frac{d}{dt}(\ln(q+pe^t)\,|_{t=0}=\frac{pe^t}{q+pe^t}\,|_{t=0}=p=E(X)$$

$$K_2 = \frac{d^2}{dt^2}(\ln(q + pe^t)\,|_{t=0} = \frac{pqe^t}{(q+pe^t)^2}\,|_{t=0} = pq = Var(X)$$

$$K_3 = \frac{d^3}{dt^3}(\ln(q + pe^t)\,|_{t=0} = \frac{pqe^t(q+pe^t) - 2(q+pe^t)pe^t\,pqe^t}{(q+pe^t)^4}\,|_{t=0} = pq - 2qp^2 = pq(1-2p)$$

şeklinde hesaplanmıştır. Diğerleri ardışık olarak hesaplanır.

5.1.2. Binom Dağılımı

Bir Bernoulli deneyi, her denemede başarı olasılığı aynı olacak şekilde birbirinden bağımsız olarak n kez tekrarlansın. Böyle bir deneye Binom deneyi denir. X rasgele değişkeni Binom deneyindeki başarıların sayısı olarak tanımlandığında, X in değer kümesi $D_X = \{0,1,2,3,...,n\}$ olur. Bernoulli denemesinde başarıyı B, başarısızlığı da B^c ile gösterirsek, Binom deneyinde x tane başarı,

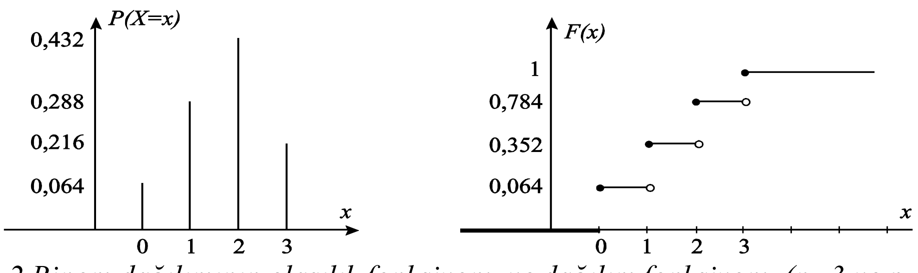
şeklinde gözlenebilir. Bu x tane başarı, şekilde de görüldüğü gibi $C(n,x)$ farklı şekilde dizilebilir. Her bir denemede başarı olasılığı aynı ise, başarısızlık olasılığı da aynıdır. Buna göre, başarı olasılığı p ($P(B) = p$, $q = 1 - p$) olmak üzere, Binom deneyinde x tane başarı elde etme olasılığı $x = 0,1,2,3,...,n$ için,

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

ile hesaplanır. Buradan, X in olasılık fonksiyonu, $D_X = \{0,1,2,3,...,n\}$ olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x) & , \quad x \in D_X \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

dir. Binom dağılımı için $X \sim Binom(n,p)$ gösterimi kullanılacaktır. $X \sim Binom(3, 0.6)$ dağılımının olasılık fonksiyonu ile dağılım fonksiyonunun grafiği aşağıdadır (Şekil (5.1.2)).



Şekil 5.1.2 Binom dağılımının olasılık fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu (n=3 ve p=0.6)

Bir Bernoulli deneyi birbirinden bağımsız olarak n defa tekrarlansın. X_1 birinci denemedeki başarıların sayısı, X_2 ikinci denemedeki başarıların sayısı ve X_n de n. denemedeki başarıların sayısı olsun. Bu rasgele değişkenlerin toplamı, Bernoulli deneyinin n kez tekrarlanmasında gözlenen başarıların sayısı olur. Bu rasgele değişkenlerin her biri bağımsız Bernoulli rasgele değişkenidir. Bernoulli deneyinin n kez tekrarlanmasında gözlenen başarıların sayısı X olsun. Her i için X_i ler 0 ya da 1 değerlerini aldığından X_i lerin toplamı X in değer kümesi olur. Yani bir Binom rasgele değişkeni, bağımsız Bernoulli rasgele değişkenlerinin toplamıdır.

Düzgün bir paranın üç defa atılması deneyini göz önüne alalım. Burada örnek uzay, $\Omega=\{YYY, YYT, YTY, TYY, TTY, TYT, YTT, TTT\}$ olup, Ω üzerinde tanımlanan sigma cebir Ω nın kuvvet kümesi ($\mathcal{U}=\sigma(\Omega)$) olsun. Ayrıca $A\in\mathcal{U}$ için $P(A)=n(A)/8$ denirse, $(\Omega,\mathcal{U},P)$ bir olasılık uzayı olur. Bu deneyde, X gelen turaları (veya yazıları) sayan bir rasgele değişkendir. Buna göre, deneme sayısı sabit olup her bir denemede tura gelmesi olasılığı aynıdır. Denemeler birbirinden bağımsız ise X, Binom rasgele değişkenidir. Yani, $X \sim Binom(n=3,\ p=1/2)$ olup olasılık fonksiyonu,

$$P(X=x)=\binom{3}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x},\ x=0,1,2,3$$

dır. Bu olasılık fonksiyonu bazen

$X=x$	0	1	2	3
$P(X=x)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

şeklinde de ifade edilir.

$X \sim Binom(n,\ p)$ olmak üzere olasılık fonksiyonu,

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x},\ x=0,1,2,3,\ldots,n$$

şeklinde verildiğinde fonksiyonun bir olasılık fonksiyonu olduğu

$$\sum_{x=0}^{n}P(X=x)=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=(p+q)^n=1$$

şeklindeki Binom açılımından ($p+q=1$) açıktır. Dağılımın momentlerinin doğrudan hesabı biraz karmaşıktır. Örneğin, dağılımın birinci momenti, yani beklenen değeri

$$E(X)=\sum_{x=0}^{n}x\,P(X=x)=\sum_{x=0}^{n}x\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=\sum_{x=0}^{n}\frac{x\ n!}{x!(n-x)!}p^x q^{n-x}$$

$$=\sum_{x=0}^{n}\frac{np\ (n-1)!}{(x-1)!(n-x)!}p^{x-1}q^{n-x}\ =np\sum_{x=0}^{n}\frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!}p^{x-1}q^{n-x}$$

$$= np\sum_{y=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{y!(n-1-y)!} p^y q^{n-1-y} = np \sum_{y=0}^{n-1} \binom{n}{y} p^y q^{n-1-y}$$

$$= np\,(p+q)^{n-1} = n\,p$$

dir. Binom rasgele değişkeni bağımsız Bernoulli rasgele değişkenlerinin toplamı olarak düşünüldüğünde dağılımın beklenen değeri daha kolay hesaplanır. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ aynı p başarı olasılığına sahip bağımsız Bernoulli rasgele değişkenleri olmak üzere $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ rasgele değişkeni de başarı olasılığı p olan Binom dağılımına sahiptir. Her i için $E(X_i) = p$ olduğundan $X \sim Binom(n, p)$ dağılımının beklenen değeri,

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = p + p + \ldots + p = n\,p$$

dir.

Beklenen değerlerin var olması halinde, rasgele değişkenlerin toplamının beklenen değeri, beklenen değerlerinin toplamına eşittir. Eğer rasgele değişkenler bağımsız ise, rasgele değişkenlerin toplamının varyansı da varyanslarının toplamıdır. Yani, X ve Y sonlu beklenen değer ve varyansa sahip iki rasgele değişkenler ise,

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y) \qquad Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2Cov(X, Y)$$

dir.

Şimdi, bu eşitliklerin doğru olduğunu gösterelim. X , Y kesikli ve olasılık fonksiyonu (sürekli ise toplam yerine integral gelir) $P(X = x, Y = y)$ olmak üzere $E(X \pm Y)$ beklenen değeri

$$\begin{aligned} E(X \pm Y) &= \sum_{x \in D_X} \sum_{y \in D_Y} (x \pm y) P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{x \in D_X} \sum_{y \in D_Y} \left[x\, P(X = x, Y = y) \pm y\, P(X = x, Y = y) \right] \\ &= \sum_{x \in D_X} x \sum_{y \in D_Y} P(X = x, Y = y) \pm \sum_{y \in D_Y} y \sum_{x \in D_X} P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{x \in D_X} x\, P(X = x) \pm \sum_{y \in D_Y} y\, P(Y = y) = E(X) \pm E(Y) \end{aligned}$$

olur. Yani, $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$ dir. Benzer şekilde varyans da,

$$\begin{aligned} Var(X \pm Y) &= E[(X \pm Y)^2] - [E(X \pm Y)]^2 \\ &= E[X^2 + Y^2 \pm 2XY] - [(E(X))^2 + (E(Y))^2 \pm 2E(X)E(Y)] \\ &= [E(X^2) - (E(X))^2] + [E(Y^2) - (E(Y))^2] \pm 2[E(XY) - E(X)E(Y)] \\ &= Var(X) + Var(Y) \pm 2Cov(X, Y) \end{aligned}$$

dir.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ bağımsız Bernoulli rasgele değişkenleri olduğundan, $i \neq j$ için $Cov(X_i, X_j) = 0$ dır. Dolayısı ile Binom dağılımının varyansı,

$$\begin{aligned} Var(X) &= Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_n) = pq + pq + \ldots + pq = n\,p\,q \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan, Bernoulli dağılımının moment çıkaran fonksiyonu $M_{X_i}(t) = q + pe^t$ olduğundan Binom dağılımının moment çıkaran fonksiyonu da,

$$M_X(t) = M_{X_1 + \ldots + X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n}\left(q + pe^t\right) = \left(q + pe^t\right)^n$$

olarak bulunur. Kümülant üreten fonksiyonu,

$$K_X(t) = (t) = \ln(K_X(t)) = \ln[(q + pe^t)^n] = n\ \ln(q + pe^t)$$

olup kümülantlar

$$K_n = \left.\frac{d^n K_X(t)}{d\,t^n}\right|_{t=0}$$

eşitliği ile hesaplanır. Kümülantlardan ilk dört tanesi,

$$K_1 = \left.\frac{d\,K_X(t)}{d\,t}\right|_{t=0} = \left.\frac{n\,p\,e^t}{(q + p\,e^t)}\right|_{t=0} = n\,p = E(X)$$

$$K_2 = \left.\frac{d^2\,K_X(t)}{d\,t^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{n\,p\,e^t}{(q + p\,e^t)} - \frac{n\,p^2\,e^{2t}}{(q + p\,e^t)^2}\right|_{t=0} = n\,p - np^2$$

$$= np(1 - p) = n\,p\,q = Var(X)$$

$$K_3 = \left.\frac{d^3\,K_X(t)}{d\,t^3}\right|_{t=0} = \left.\frac{n\,p\,e^t}{(q + p\,e^t)} - \frac{3n\,p^2\,e^{2t}}{(q + p\,e^t)^2} + \frac{2n\,p^3\,e^{3t}}{(q + p\,e^t)^3}\right|_{t=0}$$

$$= n\,p - 3np^2 + 2n\,p^3$$

$$K_4 = \left.\frac{d^4\,K_X(t)}{d\,t^4}\right|_{t=0} = \left.\frac{n\,p\,e^t}{(q + p\,e^t)} - \frac{3n\,p^2\,e^{2t}}{(q + p\,e^t)^2} + \frac{2n\,p^3\,e^{3t}}{(q + p\,e^t)^3}\right|_{t=0}$$

$$= n\,p - 7\,np^2 + 12\,n\,p^3 - 6\,n\,p^4$$

olarak hesaplanmıştır. Dağılımın çarpımsal moment üreten fonksiyonu ise,

$$N_X(t) = E(t^X) = \sum_{x=0}^{n} t^x P(X = x) = \sum_{x=0}^{n} t^x \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (t\,p)^x q^{n-x} = (q + p\,t)^n$$

olup dağılımın çarpımsal momentlerinden ilk üç tanesi ($p + q = 1$)

$$E(X)=\left.\frac{d\,N_X(t)}{d\,t}\right|_{t=1}=n(q+p\,t)^{n-1}\,p\Big|_{t=1}=n\,p\,,$$

$$E(X(X-1))=\left.\frac{d^2\,N_X(t)}{d\,t^2}\right|_{t=1}=n\,p\,(n-1)\,p\,(q+p\,t)^{n-2}\,p\Big|_{t=1}=n\,(n-1)\,p^2\,,$$

$$E(X(X-1)(X-2))=\left.\frac{d^3\,N_X(t)}{d\,t^3}\right|_{t=1}=n\,p^3\,(q+p\,t)^{n-3}(n^2-3n+2)\Big|_{t=1}$$

$$=n\,(n^2-3n+2)\,p^3$$

olarak hesaplanmıştır.

$n\in\mathbb{N}$ için X_n rasgele değişkenlerinin moment çıkaran fonksiyonu $M_{X_n}(t)$, sıfır noktasının her komşuluğunda bir X rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonuna ($M_X(t)$ diyelim) yakınsıyorsa, X_n lerin dağılım fonksiyonlarının dizisi de X in dağılım fonksiyonuna yakınsar. Yani,

$$\lim_{n\to\infty} M_{X_n}(t)=M_X(t) \;\text{ ise }\; \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x)=F_X(x)$$

dir.

Rasgele değişkenlerin moment çıkaran fonksiyonu bazen olmayabilir. Böyle durumlarda karekteristik fonksiyonu kullanılır. $n\in\mathbb{N}$ için X_n rasgele değişkenlerinin karekteristik fonksiyonları $(\varphi_{X_n}(t))$ bir X rasgele değişkenin karekteristik fonksiyonuna $(\varphi_X(t))$ yakınsıyorsa, dağılım fonksiyonları da yakınsar. Yani,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t)=\varphi_X(t) \;\text{ ise }\; \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x)=F_X(x)$$

dir.

5.1.3. Çok Terimli Dağılım (Multinomial Distribution)

Bernoulli deneyinde sadece iki sonuç vardır. Olabilir sonuçlarının sayısı ikiden fazla olan deneyler Bernoulli deneyi değildir. Örneğin, bir kavanozun içinde k farklı renkte top bulunsun. Bu kavanozdan çekilen topun tekrar yerine konulması koşulu ile n tane top çekelim. Buna göre, her bir denemede siyah top gelmesi olasılığı aynıdır. Kırmızı veya sarı top gelmesi olasılıkları da aynıdır. Dolayısı ile, deneyin birbirinden ayrık k farklı sonucu vardır. Siyah top gelmesi olayı E_1 ise X_1 de gelen siyah topların sayısı olur. Kırmızı top gelmesi olayı E_2 ise X_2 kırmızı topların sayısını, E_3 de sarı top gelmesi olayı ise X_3, sarı topların sayısı olarak tanımlanabilir. Denemeler birbirinden bağımsız ve herbir denemede siyah top gelmesi olasılığı (E_1 olayının gerçekleşmesi olasılığı) aynıdır. Buna göre, X_1 rasgele değişkeninin değer kümesi D_{X_1} ile X_2 rasgele değişkeninin değer kümesi aynıdır ($D_{X_1} = D_{X_2} = \{0,1,2,3,...,n\}$).

$E_1, E_2, ..., E_k$ ler bir deneyin ayrık sonuçları olsun. $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ bağımsız rasgele değişkenleri de E_i olaylarının kaç defa gözlendiğini saysın. Yani, n bağımsız denemede X_1 rasgele değişkeni E_1 olayının kaç defa gözlendiğini, X_2 de E_2 olayının kaç defa gözlendiğini saysın. $P(E_i) = p_i$ olmak üzere, $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ rasgele vektörünün olasılık fonksiyonu $x_1 + x_2 + ... + x_k = n$, $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$, $x_i = 0,1,2,...,n$ ve $i = 1,2,...,k$ için

$$P\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k\right) = \frac{n!}{x_1!\, x_2! ... x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} ... p_k^{x_k}$$

dir. Şimdi bunun bir olasılık fonsiyonu olduğunu gösterelim. $i = 1,2,3,..,k$ için $p_i, x_i \in \mathbb{R}$ ve $x_1 + x_2 + ... + x_k = n$ olmak üzere çok terimli Binom açılımı,

$$(p_1 + p_2 + ... + p_k)^n = \sum_{x_1=0}^{n} \sum_{x_2=0}^{n-x_1} ... \sum_{x_k=0}^{n-x_1-...-x_{k-1}} \frac{n!}{x_1!x_2!...x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} ... p_k^{x_k}$$

şeklindedir. Bunun için,

$$(p_1 + p_2 + ... + p_k)^n = (p_1 + (p_2 + ... + p_k))^n = \sum_{x_1=0}^{n} \binom{n}{x_1} p_1^{x_1} (p_2 + ... + p_k)^{n-x_1}$$

$$(p_2 + ... + p_k)^{n-x_1} = (p_2 + (p_3 + ... + p_k))^{n-x_1} = \sum_{x_2=0}^{n-x_1} \binom{n-x_1}{x_2} p_2^{x_2} (p_3 + ... + p_k)^{n-x_1-x_2} \text{ olup,}$$

böyle devam ederse,

$$(p_1 + p_2 + ... + p_k)^n = \sum_{x_1=0}^{n} \sum_{x_2=0}^{n-x_1} ... \sum_{x_k=0}^{n-x_1-...-x_{k-1}} \binom{n}{x_1} \binom{n-x_1}{x_2} ... \binom{n-x_1-...-x_{k-1}}{x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} ... p_k^{x_k}$$

elde edilir. Bununla birlikte,

$$\binom{n}{x_1} \binom{n-x_1}{x_2} \binom{n-x_1-x_2}{x_3} ... \binom{n-x_1-x_2-...-x_{k-1}}{x_k}$$
$$= \frac{n!}{x_1!(n-x_1)!} \frac{(n-x_1)!}{x_2!(n-x_1-x_2)!} ... \frac{(n-x_1-x_2-...-x_{k-1})!}{x_k!(n-x_1-x_2-...-x_k)!} = \frac{n!}{x_1!x_2!x_3!...x_k!}$$

olduğundan

$$(p_1+p_2+...+p_k)^n = \sum_{x_1=0}^{n}\sum_{x_2=0}^{n-x_1}\cdots\sum_{x_k=0}^{n-x_1-...-x_{k-1}}\binom{n}{x_1}\binom{n-x_1}{x_2}\cdots\binom{n-x_1-..-x_{k-1}}{x_k}p_1^{x_1}p_2^{x_2}..p_k^{x_k}$$

$$= \sum_{x_1=0}^{n}\sum_{x_2=0}^{n-x_1}\cdots\sum_{x_k=0}^{n-x_1-...-x_{k-1}}\frac{n!}{x_1!x_2!..x_k!}p_1^{x_1}p_2^{x_2}...p_k^{x_k}$$

şeklinde çok terimli Binom açılımı elde edilmiş olur. $p_1+p_2+...+p_k=1$ olduğundan,

$$\sum_{x_1=0}^{n}\sum_{x_2=0}^{n-x_1}\cdots\sum_{x_k=0}^{n-x_1-...-x_{k-1}}P(X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_k=x_k)$$

$$=\sum_{x_1=0}^{n}\sum_{x_2=0}^{n-x_1}\cdots\sum_{x_k=0}^{n-x_1-...-x_{k-1}}\frac{n!}{x_1!x_2!...x_k!}p_1^{x_1}p_2^{x_2}...p_k^{x_k}=(p_1+p_2+...+p_k)^n=1$$

olup $x_1+x_2+...+x_k=n$, $p_1+p_2+...+p_k=1$, $x_i=0,1,2,...,n$ ve $i=1,2,...,k$ olmak üzere

$$P(X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_k=x_k)=\frac{n!}{x_1!\,x_2!...x_k!}p_1^{x_1}p_2^{x_2}...p_k^{x_k}$$

şeklinde verilen fonksiyon bir olasılık fonksiyonudur.

Örnek 5.1.1 Bir kavanozda 5 siyah, 4 kırmızı ve 3 sarı top vardır. Çekilen topları tekrar yerine koyarak kavanozdan 6 top çekelim. Çekilen topların 3 siyah, 2 kırmızı ve 1 sarı olması olasılığını hesaplayalım. Burada olaylar her bir deneme için

$E_1=\{\text{siyah top çekilmesi}\}$, $E_2=\{\text{kırmızı top çekilmesi}\}$, $E_3=\{\text{sarı top çekilmesi}\}$

olarak yazıldığında E_1, E_2 ve E_3 olayları örnek uzayın bir parçalanmasını oluşturur. Her bir olayın gerçekleşme olasılıkları ($n=6$)

$p_1=P(E_1)=5/12$, $p_2=P(E_2)=4/12$, $p_3=P(E_3)=3/12$

şeklinde olup aranan olasılık,

$$P(X_1=3,X_2=2,X_3=1)=\frac{6!}{3!\,2!1!}\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(\frac{4}{12}\right)^2\left(\frac{3}{12}\right)^1=\frac{6!(5^3)(4^2)(3)}{3!2!1!(12)^6}=\frac{625}{5184}\cong 0.121$$

dır.