# HAFTA 12

## 5.1.4. Geometrik Dağılım

Bağımsız Bernoulli denemelerine ilk başarıyı elde edinceye kadar devam edelim. $X$ ilk başarıyı elde edinceye kadar yapılan denemelerin sayısı olsun. Bu durumda denemeler

$$\underbrace{B^c\, B^c\, B^c \ldots .\ B^c\ \ B^c}_{x-1 \text{ tane başarısız deneme}} \qquad \underbrace{B}_{\text{son deneme}}$$

şeklinde olacaktır. Binom deneyinde $n$ deneme sayısı sabit olup bu $n$ denemedeki başarıların sayısı ile ilgileniyoruz. Oysa, geometrik deneyde başarı sayısı sabir (bir) olup bu başarıyı elde edinceye kadar yapılan denemelerin sayısı ile ilgileniyoruz. $x$. denemede başarı elde etmek için $x-1$ defa başarısız denemenin gerçekleşmiş olması gerekir. Buna göre, $X$ in olasılık fonksiyonu, $p$ başarı olasılığını göstermek üzere $q=1-p$ için,

$$P(X=x)=p\,q^{x-1}\ ,\ x=1,2,3,...$$

şeklinde olur. Bu olasılık fonksiyonuna sahip $X$ rasgele değişkenine Geometrik dağılıma sahiptir denir ve $X \sim Geometrik(p)$ veya $X \sim Geo(p)$ ile gösterilir.

Bu fonksiyon,

$$\sum_{x=1}^{\infty} P(X=x)=\sum_{x=1}^{\infty} p\,q^{x-1}=p\sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1}=p\sum_{y=0}^{\infty} q^{y}=\frac{p}{1-q}=\frac{p}{p}=1$$

olduğundan bir olasılık fonksiyonudur. Dağılımın ilk iki momenti,

$$E(X)=\sum_{x=1}^{\infty} x\,P(X=x)=\sum_{x=1}^{\infty} x\,p\,q^{x-1}=p\sum_{x=1}^{\infty}\frac{d}{dq}\left(q^{x}\right)=p\frac{d}{dq}\sum_{x=1}^{\infty} q^{x}$$

$$=p\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q}-1\right)=p\frac{d}{dq}\left(\frac{1-1+q}{1-q}\right)=p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right)=p\left(\frac{1-q+q}{(1-q)^2}\right)=\frac{p}{p^2}=\frac{1}{p}$$

ve

$$E(X^2)=\sum_{x=1}^{\infty} x^2\,P(X=x)=p\sum_{x=1}^{\infty} x^2\,q^{x-1}=p\sum_{x=1}^{\infty} x\frac{d}{dq}\left(q^{x}\right)=p\frac{d}{dq}\sum_{x=1}^{\infty} x\,q^{x}$$

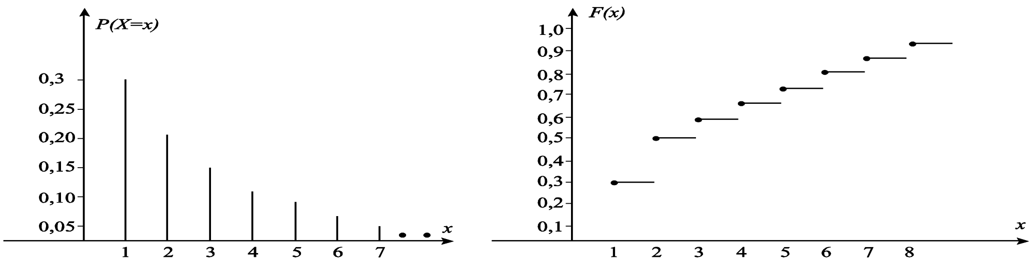
$$=p\left[\frac{d}{dq}\sum_{x=1}^{\infty} x\,q^{x-1+1}\right]=p\frac{d}{dq}\left[q\sum_{x=1}^{\infty}\frac{d}{dq}q^{x}\right]=p\frac{d}{dq}\left[q\left(\frac{d}{dq}\sum_{x=1}^{\infty} q^{x}\right)\right]$$

$$=p\frac{d}{dq}\left[q\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q}-1\right)\right]=p\frac{d}{dq}\left[\frac{q}{(1-q)^2}\right]=\frac{1+q}{p^2}$$

olarak hesaplanmıştır. Buradan dağılımın varyansı da,

$$Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

şeklinde bulunur.




*Şekil 5.1.3 Geometrik dağılımının olasılık fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu(p=0.3)*

Dağılımın moment çıkaran fonksiyonu ise $e^t < (1/q)$ ve $t \in \mathbb{R}$ için,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} P(X = x) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} p\, q^{x-1} = \frac{p}{q} \sum_{x=1}^{\infty} (qe^t)^x = \frac{p}{q} \frac{e^t}{1 - q e^t}$$

şeklinde hesaplanmıştır.

**Örnek 5.1.2** $X \sim Geometrik(p)$ olsun. $P(X > n)$ olasılığı,

$$P(X > n) = 1 - P(X \le n) = 1 - p \sum_{x=1}^{n} q^{x-1} = 1 - p \sum_{y=0}^{n-1} q^y = 1 - \frac{p(1-q^n)}{1-q} = q^n$$

ve $s > t > 0$ için $\{w : X(w) > s\} \subset \{w : X(w) > t\}$ olup $P(X > s \mid X > t)$ koşullu olasılığı

$$P\left(X > s \mid X > t\right) = \frac{P(X > s, X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > s)}{P(X > t)} = \frac{q^s}{q^t} = q^{s-t} = P(X > s - t)$$

olduğundan

$$P(X > s \mid X > t) = P(X > s - t)$$

özelliğine sahiptir. Kesikli dağılımlar içerisinde bu özelliğe (memoryless) sahip tek dağılım Geometrik dağılımdır$\oplus$

**Teorem 5.1.1** Negatif değerler almayan kesikli $X$ rasgele değişkeninin geometrik dağılıma sahip olması için gerek ve yeter koşul bütün $n$ ler için,

$$P\left(X > x + n \mid X > x\right) = P(X > n)$$

özelliğinin sağlanmasıdır.

*İspat*: $X \sim Geometrik(p)$ olsun. $X$ in olasılık fonksiyonu

$$P(X = x) = p\, q^{x-1}\ ,\ x = 1, 2, 3, ...$$

olup Örnek (5.1.2) den $P(X > s) = q^s$ dir. Buradan,

$$P\left(X > x+n \mid X > x\right)=\frac{P\left(X > x+n, X > x\right)}{P(X > x)}=\frac{P\left(X > x+n\right)}{P(X > x)}=\frac{q^{x+n}}{q^{x}}=q^{n}=P(X > n)$$

elde edilir. Böylece, ispatın gerek koşulu ispatlanmış olur. Şimdi, negatif değerler almayan kesikli $X$ rasgele değişkeni bütün $n$ ler için

$$P\left(X > x+n \mid X > x\right)=P(X > n)$$

özelliğini sağlasın. Buradan $P(X \geq 1)=1$ olduğu açıktır. Bununla birlikte,

$$P(X = x+1)=P(X > x)-P(X > x+1) \text{ ve } P(X > x)=P(X > x-1)-P(X = x)$$

eşitlikleri de sağlanır. $P(X > 1)=q$ diyelim. Diğer taraftan

$$\frac{P(X = x+1)}{P(X > x)}=\frac{P(X > x)-P(X > x+1)}{P(X > x)}=1-\frac{P(X > x+1)}{P(X > x)}=1-\frac{P(X > x+1, X > x)}{P(X > x)}$$
$$=1-P\left(X > x+1 \mid X > x\right)=P(X > 1)=1-q$$

olduğundan, $P(X = x+1)=(1-q)\,P(X > x)$ eşitliği elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
P(X = x+1) &= (1-q)\,P(X > x)=(1-q)\left[P(X > x-1)-P(X = x)\right] \\
&= (1-q)\left[P(X > x-1)-(1-q)P(X > x-1)\right]=(1-q)\,q\,P(X > x-1) \\
&= (1-q)\,q\left[P(X > x-2)-P(X = x-2)\right] \\
&= (1-q)\,q\left[P(X > x-2)-(1-q)\,P(X > x-2)\right] \\
&= (1-q)\,q^{2}P(X > x-2)=.\,.\,.\,.\,.=(1-q)\,q^{x}=p\,q^{x}
\end{aligned}$$

dir. Dolayısı ile, $X$ rasgele değişkeni, $P(X = x)=p\,q^{x-1}$ , $x=1,2,3,...$ şeklinde bir olasılık fonksiyonuna sahip olduğundan Geometrik dağılıma sahiptir ◊

Teoremin ispatı (özellikle yeter koşul) matematiksel tümevarımla da yapılabilirdi (birinci baskıda yapıldığı gibi). Teoremden aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

**Sonuç**: Negatif değerler almayan kesikli $X$ rasgele değişkeninin geometrik dağılıma olması için gerek ve yeter koşul bütün $k \geq 0$ için $P(X = k+n \mid X \geq n)=P(X = k)$ özelliğini sağlamasıdır.

*İspat:* $P(X = k+n \mid X \geq n)$ koşullu olasılığı

$$P\left(X = k+n \mid X \geq n\right)=\frac{P\left(X = k+n, X \geq n\right)}{P\left(X \geq n\right)}=\frac{P\left(X = k+n\right)}{P\left(X \geq n\right)}$$

olup $X$ Geometrik dağılıma sahip ise olasılık fonksiyonu

$$P(X = x)=p\,q^{x-1}\,,\ x=1,2,3,... \quad \text{veya} \quad P(X = x)=p\,q^{x}\,,\ x=0,1,2,3,...$$

şeklindedir. $P(X = k+n)=p\,q^{k+n}$ ve $P(X \geq n)=q^{n}$ olduğundan bu koşullu olasılık için

$$P\left( X = k+n \,|\, X \geq n \right) = \frac{P\left( X = k+n \right)}{P\left( X \geq n \right)} = \frac{p\,q^{k+n}}{q^n} = p\,q^k = P(X = k)$$

elde edilir. Dolayısı ile teoremin gerek kısmı ispatlanmıştır. Diğer taraftan, negatif değerler almayan kesikli $X$ rasgele değişkeni $P\left( X = k+n \,|\, X \geq n \right) = P(X = k)$ özelliğine sahip ise, $X$ in olasılık fonksiyonunun

$$P(X = x) = p\,q^x \ , \ x = 0,1,2,3,...$$

şeklinde olduğununun gösterilmesi gerekir. Önce, $P\left( X = k+n \,|\, X \geq n \right) = P(X = k)$ ise

$$P(X = k+n) = P(X = k)\,P(X \geq n) \qquad (*)$$

olduğu açıktır. Şimdi bu özelliğe sahip kesikli $X$ rasgele değişkeninin geometrik dağılıma sahip olduğunu tümevarım ile gösterelim. $n = 1$ için (*) eşitliği

$$P(X = k+1) = P(X = k)\,P(X \geq 1)$$

şeklinde yazılabilir. $p = P(X = 0)$ ve $q = 1 - p$ olsun. $k = 1$ için olasılık fonksiyonu, $P(X = 1) = p\,q$ olur. (*) ifadesinde $P(X = 1)$ olasılığı

$$P(X = 1) = P(X = 0)\,P(X \geq 1) = P(X = 0)\left[1 - P(X < 1)\right] = P(X = 0)\left[1 - P(X = 0)\right] = p\,q$$

olup iddia $k = 1$ için doğrudur. İddia $k = m$ için doğru olsun. Yani, $P(X = m) = p\,q^m$ olsun. Bu durumda, $P(X = m+1) = p\,q^{m+1}$ olduğunun gösterilmesi gerekir. Bunun için (*) eşitliği $m+1$ için tekrar yazıldığında,

$$\begin{aligned} P(X = m+1) &= P(X = m)\,P(X \geq 1) = P(X = m)[1 - P(X < 1)] \\ &= P(X = m)[1 - P(X = 0)] = pq^m[1 - P] = pq^{m+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani, negatif değerler almayan kesikli bir $X$ rasgele değişkeni,

$$P\left( X = k+n \,|\, X \geq n \right) = P(X = k)$$

özelliğine sahipse, olasılık fonksiyonu $P(X = x) = p\,q^x$ , $x = 0,1,2,...$ şeklindedir. Bu da ispatı tamamlar ◊

Bilindiği gibi, bağımsız Bernoulli denemeleri tekrarlandığında, deneme sayısının sabit ve her denemede başarı olasılığının aynı olduğu varsayıldı. Gözlenen başarıların sayısı $X$ Binom dağılımına sahiptir. Bağımsız Bernoulli denemelerinde başarı sayısı sabit (ilk başarı) ise, yapılan denemelerin sayısı ($Y$), $Y \sim Geo(p)$ dir. Buna göre, bu iki dağılım arasında bir ilişkinin olması beklenir. $X \sim Binom(n, p)$ ise, $X$ in olasılık fonksiyonu

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x\, q^{n-x} \ , \ x = 0,1,2,3,...,n$$

dir. Geometrik dağılımda başarı sayısı 1 olup denemelerin sayısı $Y$ in olasılık fonksiyonu $g(x)=P(Y=x)=p\,q^{x-1},\ x=1,2,3,...$ dir. Binom dağılımında, 1 başarı elde etme olasılığı $P(X=1)=n\,p\,q^{n-1}$ olup $n=x$ için bu olasılık $P(X=1)=x\,p\,q^{x-1}$ dir. O halde, $X \sim Binom(n,p)$ ve $n=x$ için olasılık fonksiyonu $f(x)$ ise,

$$g(x)=f(x)/x=p\,q^{x-1},\ x=1,2,3,...$$

şeklinde Geometrik dağılımın olasılık fonksiyonuna dönüşür.

**Çift Geometrik Dağılım:**

Eğer $X \sim Geo(p)$ ise, olasılık fonksiyonu,

$$P(X=x)=p\,q^{x-1}\ ,\ x=1,2,3,...\ ,\ 0<p<1,\ q=1-p$$

şeklinde olup rasgele değişkenin ilk iki momenti ile varyansının

$$E(X)=\sum_{x=1}^{\infty} xP(X=x)=\sum_{x=1}^{\infty} xpq^{x-1}=\frac{1}{p}$$

$$E(X^2)=\sum_{x=1}^{\infty} x^2P(X=x)=\sum_{x=1}^{\infty} x^2pq^{x-1}=\frac{1+q}{p^2}$$

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{1+q}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{q}{p^2}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\sum_{x=1}^{\infty} xq^x=\sum_{x=1}^{\infty} xp\,q^{x-1}\frac{q}{p}=\frac{q}{p}\underbrace{\left[\sum_{x=1}^{\infty} xp\,q^{x-1}\right]}_{1/p}=\frac{q}{p^2}$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} x^2q^x=\sum_{x=1}^{\infty} x^2p\,q^{x-1}\frac{q}{p}=\frac{q}{p}\underbrace{\left[\sum_{x=1}^{\infty} x^2p\,q^{x-1}\right]}_{E(X^2)=(1+q)/p^2}=\frac{q}{p}\left[\frac{1+q}{p^2}\right]=\frac{q(1+q)}{p^3}$$

toplamları elde edilir.

Şimdi herhangi bir $X$ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$P(X=x)=c\,q^{|x|}\ ,\ x=0,\pm1,\pm2,\pm3,...\ ,\ 0<p<1,\ q=1-p$$

şeklinde verildiğini düşünelim. Yukarıdaki toplamlar ile mutlak değer fonksiyonunun özelliklerinden, $y=-x$ dönüşümü ile,

$$\sum_{x=-\infty}^{-1} q^{-x} = \sum_{x=1}^{\infty} q^x \ , \ \sum_{x=-\infty}^{-1} xq^{-x} = -\sum_{x=1}^{\infty} xq^x \ \text{ ve } \ \sum_{x=-\infty}^{-1} x^2 q^{-x} = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 q^x$$

eşitlikleri yazılabilir. Şimdi bu olasılık fonksiyonunu inceleyelim.

a) Önce $c$ sabitinin değerini bulalım. Bunun için,

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} q^{|x|} = \sum_{x=-\infty}^{-1} q^{-x} + q^0 + \sum_{x=1}^{\infty} q^x = 1 + \sum_{x=1}^{\infty} q^x + \sum_{x=1}^{\infty} q^x = 1 + 2\sum_{x=1}^{\infty} q^x = \frac{1+q}{p}$$

eşitliğinden $c$ sabitinin değeri $c = p/(1+q)$ olarak elde edilir. Yani, $X$ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$P(X = x) = \frac{p}{1+q} q^{|x|} \ , \ x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \ , \ 0 < p < 1, \ q = 1 - p$$

şeklinde olur.

b) Şimdi olasılık fonksiyonu yukarıda verilen $X$ rasgele değişkeninin beklenen değeri ile varyansını bulalım. Yukarıda verilen

$$\sum_{x=-\infty}^{-1} xq^{-x} = -\sum_{x=1}^{\infty} xq^x$$

eşitliği kullanıldığında rasgele değişkeninin beklenen değeri doğrudan,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=-\infty}^{\infty} xP(X = x) = \frac{p}{1+q} \sum_{x=-\infty}^{\infty} xq^{|x|} = \frac{p}{1+q}\left[\sum_{x=-\infty}^{-1} xq^{-x} + 0 + \sum_{x=1}^{\infty} xq^x\right] \\ &= \frac{p}{1+q}\left[-\sum_{x=1}^{\infty} xq^x + \sum_{x=1}^{\infty} xq^x\right] = 0 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Yani, $E(X) = 0$ dır. Yine,

$$\sum_{x=-\infty}^{-1} x^2 q^{-x} = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 q^x$$

eşitliği yardımı ile, $X$ rasgele değişkeninin ikinci momenti

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{x=-\infty}^{\infty} x^2 P(X = x) = \frac{p}{1+q} \sum_{x=-\infty}^{\infty} x^2 q^{|x|} = \frac{p}{1+q}\left[\sum_{x=-\infty}^{-1} x^2 q^{-x} + 0 + \sum_{x=1}^{\infty} x^2 q^x\right] \\ &= \frac{p}{1+q}\left[\sum_{x=1}^{\infty} x^2 q^x + \sum_{x=1}^{\infty} x^2 q^x\right] = \frac{2p}{1+q}\left[\sum_{x=1}^{\infty} x^2 q^x\right] = \frac{2p}{1+q}\left[\frac{q(1+q)}{p^3}\right] = \frac{2q}{p^2} \end{aligned}$$

dir. $E(X) = 0$ olduğundan rasgele değişkenin varyansı $Var(X) = E(X^2) = 2q/p^2$ olur. Yani, $E(X) = 0$ ve $Var(X) = 2q/p^2$ dir.

Kolayca görüleceği gibi, rasgele değişkenin bütün tek momentleri sıfırdır. Gerçekten, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere bütün $k$ ler için

$$E(X^{2k+1}) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x^{2k+1} P(X = x) = \frac{p}{1+q} \sum_{x=-\infty}^{\infty} x^{2k+1} q^{|x|} = \frac{p}{1+q} \left[ \sum_{x=-\infty}^{-1} x^{2k+1} q^{-x} + 0 + \sum_{x=1}^{\infty} x^{2k+1} q^{x} \right]$$
$$= \frac{p}{1+q} \left[ -\sum_{x=1}^{\infty} x^{2k+1} q^{x} + \sum_{x=1}^{\infty} x^{2k+1} q^{x} \right] = 0$$

olduğu açıktır. Çift momentlerin hesabı biraz karmaşıktır. Bunlardan, dördüncü moment

$$E(X^4) = \frac{2q}{p^4}(q^2 + 10q + 1)$$

olarak hesaplanmıştır.

c) Bu rasgele değişkenin moment çıkaran fonksiyonu ile karekteristik fonksiyonunu bulalım. Rasgele değişkenin moment çıkaran fonksiyonu

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{tx} P(X = x) = \frac{p}{1+q} \sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{tx} q^{|x|} = \frac{p}{1+q} \left[ \sum_{x=-\infty}^{-1} e^{tx} q^{-x} + 1 + \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} q^{x} \right]$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi parantez içindeki toplamları ayrı ayrı hesaplayalım.

Birinci toplam $y = -x$ dönüşümü ile $qe^{-t} < 1$ olmak üzere,

$$\sum_{x=-\infty}^{-1} e^{tx} q^{-x} = \sum_{x=1}^{\infty} e^{-tx} q^{x} = \sum_{x=1}^{\infty} (qe^{-t})^{x} = \sum_{x=0}^{\infty} (qe^{-t})^{x} - 1 = \frac{1}{1-qe^{-t}} - 1 = \frac{qe^{-t}}{1-qe^{-t}}$$

dir. İkinci toplam ise $qe^{t} < 1$ olmak üzere,

$$\sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} q^{x} = \sum_{x=1}^{\infty} (qe^{t})^{x} = \sum_{x=0}^{\infty} (qe^{t})^{x} - 1 = \frac{1}{1-qe^{t}} - 1 = \frac{qe^{t}}{1-qe^{t}}$$

dir. Bu serilerin değeri $qe^{-t} < 1$ ve $qe^{t} < 1$ koşulları altında hesaplandı. Eğer $qe^{-t} < 1$ ise $\ln(q) < t$ dir. Ayrıca, $qe^{t} < 1$ ise $t < -\ln(q)$ olur. Dolayısı ile, $X$ rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu, $\ln(q) < t < -\ln(q)$ için tanımlıdır. Yani, $X$ in moment çıkaran fonksiyonu $\ln(q) < t < -\ln(q)$ olmak üzere,

$$M_X(t) = \frac{p}{1+q} \left[ \sum_{x=-\infty}^{-1} e^{tx} q^{-x} + 1 + \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} q^{x} \right] = \frac{p}{1+q} \left[ 1 + \frac{qe^{-t}}{1-qe^{-t}} + \frac{qe^{t}}{1-qe^{t}} \right]$$

şeklinde hesaplanmış olur. Kısaca, $X$ rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_X(t)=\frac{p}{1+q}\left[1+\frac{qe^{-t}}{1-qe^{-t}}+\frac{qe^{t}}{1-qe^{t}}\right],\ \ \ln(q)<t<-\ln(q)$$

dir. Bu fonksiyonun parantez içindeki terimi,

$$1+\frac{qe^{-t}}{1-qe^{-t}}+\frac{qe^{t}}{1-qe^{t}}=\frac{(1-qe^{t})(1-qe^{-t})+qe^{-t}(1-qe^{t})+qe^{t}(1-qe^{-t})}{(1-qe^{t})(1-qe^{-t})}$$

$$=\frac{1-q^2}{1+q^2-q(e^t+e^{-t})}=\frac{(1-q)(1+q)}{1+q^2-q(e^t+e^{-t})}$$

olarak düzenlendiğinde, $X$ rasgele değişkenininmoment çıkaran fonksiyonu,

$$M_X(t)=\frac{p}{1+q}\left[1+\frac{qe^{-t}}{1-qe^{-t}}+\frac{qe^{t}}{1-qe^{t}}\right]=\frac{p}{1+q}\left[\frac{(1-q)(1+q)}{1+q^2-q(e^t+e^{-t})}\right]=\frac{p^2}{1+q^2-q(e^t+e^{-t})}$$

olarak da yazılabilir. Yani, moment çıkaran fonksiyonu, $\ln(q)<t<-\ln(q)$ olmak üzere,

$$M_X(t)=\frac{p}{1+q}\left[1+\frac{qe^{-t}}{1-qe^{-t}}+\frac{qe^{t}}{1-qe^{t}}\right]\ \text{veya}\ \ M_X(t)=\frac{p^2}{1+q^2-q(e^t+e^{-t})}$$

olarak ifade edilir. Bilindiği gibi moment çıkaran fonksiyonun türevlerinden rasgele değişkenin momentleri hesaplanabilir. Fonksiyon sıfır noktası komşuluğunda tanımlı olup, momentler

$$E(X^k)=\frac{d^k}{dt^k}M_X(t)\Big|_{t=0}$$

şeklinde hesaplanır. Şimdi yukarıda hesapladığımız ilk iki momenti, moment çıkaran fonksiyonu yardımı ile hesaplayalım. Fonksiyonun birinci türevi,

$$\frac{d}{dt}M_X(t)=\frac{d}{dt}\left[\frac{p^2}{1+q^2-q(e^t+e^{-t})}\right]=\frac{p^2q(e^t-e^{-t})}{[(1+q^2-q(e^t+e^{-t})]^2}$$

olup, bu fonksiyonda $t=0$ yazarsak rasgele değişkenin beklenen değeri

$$E(X)=\frac{d}{dt}M_X(t)\Big|_{t=0}=\frac{p^2q(e^t-e^{-t})}{[(1+q^2-q(e^t+e^{-t})]^2}\Big|_{t=0}=\frac{p^2q(1-1)}{[(1+q^2-2q)]^2}=0$$

bulunur. Bu da yukarıda elde edilen değer ile aynıdır. Fonksiyonunun ikinci türevi de,

$$\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)=\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{p^2}{1+q^2-q(e^t+e^{-t})}\right]=\frac{d}{dt}\left[\frac{p^2q(e^t-e^{-t})}{[(1+q^2-q(e^t+e^{-t})]^2}\right]$$

$$=\left[\frac{2p^2q^2(e^t-e^{-t})}{[(1+q^2-q(e^t+e^{-t})]^3}\right]+\left[\frac{p^2q(e^t+e^{-t})}{[(1+q^2-q(e^t+e^{-t})]^2}\right]$$

olup ikinci türevde $t=0$ yazarsak, rasgele değişkenin ikinci momenti

$$E(X^2)=\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)\Big|_{t=0}=\left\{\left[\frac{2p^2q^2(e^t-e^{-t})}{[(1+q^2-q(e^t+e^{-t})]^3}\right]+\left[\frac{p^2q(e^t+e^{-t})}{[(1+q^2-q(e^t+e^{-t})]^2}\right]\right\}_{t=0}$$

$$=\left[\frac{2p^2q^2(1-1)}{[(1+q^2-2q]^3}\right]+\left[\frac{p^2q(1+1)}{[(1+q^2-q(1+1)]^2}\right]=0+\frac{2p^2q}{[(1+q^2-2q)]^2}=\frac{2p^2q}{[(1-q)^2]^2}$$

$$=\frac{2p^2q}{p^4}=\frac{2q}{p^2}$$

olur. Yine, bu değer de yukarıda doğrudan elde edilen sonuç ile aynıdır.

Şimdi de bu rasgele değişkenin karekteristik fonksiyonunu bulalım. Fonksiyon,

$$\phi_X(t)=E(e^{iXt})=\sum_{x=-\infty}^{\infty}e^{itx}P(X=x)=\frac{p}{1+q}\sum_{x=-\infty}^{\infty}e^{itx}q^{|x|}$$

$$=\frac{p}{1+q}\left[\sum_{x=-\infty}^{-1}e^{itx}q^{-x}+1+\sum_{x=1}^{\infty}e^{itx}q^{x}\right]=\frac{p}{1+q}\left[1+\sum_{x=1}^{\infty}e^{-itx}q^{x}+\sum_{x=1}^{\infty}e^{itx}q^{x}\right]$$

$$=\frac{p}{1+q}\left[1+\frac{qe^{-it}}{1-qe^{-it}}+\frac{qe^{it}}{1-qe^{it}}\right]$$

olarak hesaplanmıştır. Yani, $X$ rasgele değişkeninin karekteristik fonksiyonu,

$$\phi_X(t)=\frac{p}{1+q}\left[1+\frac{qe^{-it}}{1-qe^{-it}}+\frac{qe^{it}}{1-qe^{it}}\right]$$

dir. Fonksiyonun biraz basitleştirilmiş hali için $e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$ olarak verilen Euler formülünü hatırlayalım. Buradan,

$$\cos(x)=(e^{ix}+e^{-ix})/2 \quad \text{ve} \quad \sin(x)=(e^{ix}-e^{-ix})/2i$$

olduğu dikkate alındığında, rasgele değişkenin karekteristik fonksiyonu,

$$\phi_X(t)=\frac{p^2}{1+q^2-2q\cos(t)}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Yani, $X$ in karekteristik fonksiyonu,

$$\phi_X(t)=\frac{p}{1+q}\left[1+\frac{qe^{-it}}{1-qe^{-it}}+\frac{qe^{it}}{1-qe^{it}}\right] \quad \text{veya} \quad \phi_X(t)=\frac{p^2}{1+q^2-2q\cos(t)}$$

şeklindedir. Rasgele değişkenin momentleri aynı zamanda,

$$E(X^k)=\frac{1}{i^k}\frac{d^k\phi_X(t)}{dt^k}\Big|_{t=0}$$

şeklinde de hesaplanabilir. $\sin(0)=0$ ve $\cos(0)=1$ olduğundan rasgele değişkenin birinci momenti,

$$E(X)=\frac{1}{i}\frac{d\phi_X(t)}{dt}\bigg|_{t=0}=\frac{1}{i}\frac{d}{dt}\left[\frac{p^2}{1+q^2-2q\cos(t)}\right]_{t=0}=\frac{1}{i}\left[\frac{-2p^2q\sin(t)}{[1+q^2-2q\cos(t)]^2}\right]_{t=0}=0$$

olur. Diğer taraftan $i^2=-1$ olmak üzere, rasgele değişkenin ikinci momenti de

$$E(X^2)=\frac{1}{i^2}\frac{d^2\phi_X(t)}{dt^2}\bigg|_{t=0}=\frac{1}{i^2}\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{p^2}{1+q^2-2q\cos(t)}\right]_{t=0}=\frac{1}{i^2}\frac{d}{dt}\left[\frac{-2p^2q\sin(t)}{[1+q^2-2q\cos(t)]^2}\right]_{t=0}$$

$$=-\left[\frac{8p^2q^2\sin^2(t)}{[1+q^2-2q\cos(t)]^3}-\frac{2p^2q\cos(t)}{[1+q^2-2q\cos(t)]^2}\right]_{t=0}=-\left[0-\frac{2p^2q}{[(1-q)^2]^2}\right]=\frac{2q}{p^2}$$

dir.

d) Rasgele değişkenin çarpımsal moment üreten fonksiyonu ise, $q<t<1/q$ için

$$N_X(t)=E(t^X)=\sum_{x=-\infty}^{\infty}t^xP(X=x)=\frac{p}{1+q}\sum_{x=-\infty}^{\infty}t^xq^{|x|}=\frac{p}{1+q}\left[1+\sum_{x=-\infty}^{-1}t^xq^{-x}+\sum_{x=1}^{\infty}t^xq^x\right]$$

$$=\frac{p}{1+q}\left[1+\frac{q}{t-q}+\frac{tq}{1-tq}\right]$$

olarak hesaplanmıştır. Fonksiyon

$$\frac{p}{1+q}\left[1+\frac{q}{t-q}+\frac{tq}{1-tq}\right]=\frac{p^2t}{t(1+q^2)-q(1+t^2)}$$

olarak da yazılabilir. O halde, çarpımsal moment üreten fonksiyonu $q<t<1/q$ için

$$N_X(t)=\frac{p}{1+q}\left[1+\frac{q}{t-q}+\frac{tq}{1-tq}\right]\text{ veya }N_X(t)=\frac{p^2t}{t(1+q^2)-q(1+t^2)}$$

olarak elde edilmiştir. Bu fonksiyonun ilk üç türevi,

$$\frac{dN_X(t)}{dt}=\frac{p}{1+q}\left[-\frac{q}{(t-q)^2}+\frac{q}{1-qt}+\frac{q^2t}{(1-qt)^2}\right]$$

$$\frac{d^2N_X(t)}{dt^2}=\frac{p}{1+q}\left[\frac{2q}{(t-q)^3}+\frac{2q^2}{(1-qt)^2}+\frac{2q^3t}{(1-qt)^3}\right]$$

$$\frac{d^3N_X(t)}{dt^3}=\frac{p}{1+q}\left[\frac{-6q}{(t-q)^4}+\frac{6q^3}{(1-qt)^4}\right]$$

olup,

$$E(X)=\left.\frac{dN_X(t)}{dt}\right|_{t=1}=\frac{p}{1+q}\left[-\frac{q}{(1-q)^2}+\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{(1-q)^2}\right]=\frac{p}{1+q}\left[-\frac{q}{p^2}+\frac{q}{p}+\frac{q^2}{p^2}\right]$$

$$=\frac{p}{1+q}\left[\frac{q^2-q+qp}{p^2}\right]=\frac{p}{1+q}\left[\frac{q^2-q+q(1-q)}{p^2}\right]=\frac{p}{1+q}\left[\frac{q^2-q+q-q^2}{p^2}\right]=0$$

$$E(X(X-1))=\left.\frac{d^2N_X(t)}{dt^2}\right|_{t=1}=\frac{p}{1+q}\left[\frac{2q}{(1-q)^3}+\frac{2q^2}{(1-q)^2}+\frac{2q^3}{(1-q)^3}\right]=\frac{2pq}{1+q}\left[\frac{1}{p^3}+\frac{q}{p^2}+\frac{q^2}{p^3}\right]$$

$$=\frac{2pq}{1+q}\left[\frac{1+q^2}{p^3}+\frac{q}{p^2}\right]=\frac{2pq}{1+q}\left[\frac{1+q^2+qp}{p^3}\right]=\frac{2pq}{1+q}\left[\frac{1+q^2+q(1-q)}{p^3}\right]$$

$$=\frac{2pq}{1+q}\left[\frac{1+q^2+q-q^2}{p^3}\right]=\frac{2q(1+q)}{(1+q)p^2}=\frac{2q}{p^2}$$

ve

$$E(X(X-1)(X-2))=\left.\frac{d^3N_X(t)}{dt^3}\right|_{t=1}=\frac{p}{1+q}\left[\frac{-6q}{(1-q)^4}+\frac{6q^3}{(1-q)^4}\right]=\frac{6qp}{(1+q)p^4}\left[q^2-1\right]$$

$$=\frac{-6q}{(1+q)p^3}\left[(1+q)(q-1)\right]=\frac{-6q}{p^2}$$

momentleri elde edilmiştir. Diğer taraftan, $X(X-1)(X-2)=X^3-3X^2+2X$ ve yukarıda hesaplanan ilk iki moment ($E(X)=0$ ve $E(X^2)=2q/p^2$) değerleri yarine konursa, rasgele değişkenin üçüncü mpomenti

$$E(X^3)=E[X(X-1)(X-2)]+3E(X^2)-2E(X)=-\frac{6q}{p^2}+3\frac{2q}{p^2}+0=-\frac{6q}{p^2}+\frac{6q}{p^2}=0$$

olur.

### 5.1.5. Negatif Binom Dağılımı

Bağımsız Bernoulli denemelerine $k$ başarı elde edinceye kadar devam edelim. Burada, $k$ tane başarı elde edinceye kadar denemelere devam edileceği için, denemelerin en az $k$ defa tekrarlanması gerekir. Böylece denemeler, $B_i$ ler başarıları ($B_1$ birinci başarı, $B_2$ ikinci başarı gibi) $B_i^c$ de başarısız denemeleri göstermek üzere,

$$\underbrace{\overbrace{B^cB^c...B^c\,B_1\;\;B^c\,B^c...B^c\,B_2\;\;B^cB^c...B^c\,B_3\,B^c...B^c...B^cB_{k-1}\,B^c....\,B^c}^{x-1\text{ deneme ve }k-1\text{ başarı}}\;\;B_k}_{x\text{ denemede }k\text{ başarı}}$$

biçiminde olabilir. Buna göre, $k$. başarıyı elde edinceye kadar yapılan Bernoulli denemelerinin sayısı $X$ olmak üzere, $x$. denemede $k$. başarıyı elde etme olasılığı,

$$P(X=x)=\binom{x-1}{k-1}p^k\,q^{x-k}\ \ ,\ x=k,k+1,k+2,...$$

şeklinde olur. Bu olasılık fonksiyonuna sahip $X$ rasgele değişkenine Negatif Binom dağılımına sahiptir denir ve $p$ başarı olasılığını, $k$ de başarıların sayısını göstermek üzere, $X\sim NB(k,p)$ ile gösterilir. Şimdi $0<a<1$ için

$$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(x+k-1)!}{x!}a^x=\frac{(k-1)!}{(1-a)^k}$$

eşitliğini hatırlayalım. Bu eşitlikte $y=x-k$ yazıldığında,

$$\sum_{x=k}^{\infty}\binom{x-1}{k-1}p^k\,q^{x-k}=\sum_{x=k}^{\infty}\frac{(x-1)!}{(k-1)!(x-k)!}p^k\,q^{x-k}=\frac{p^k}{(k-1)!}\sum_{x=k}^{\infty}\frac{(x-1)!}{(x-k)!}q^{x-k}$$
$$=\frac{p^k}{(k-1)!}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{(y+k-1)}{y!}q^y=\frac{p^k}{(k-1)!}\frac{(k-1)!}{(1-q)^k}=\frac{p^k}{p^k}=1$$

bulunur. Yani, verilen fonksiyon bir olasılık fonksiyonudur.

Negatif Binom dağılımına sahip $X$ rasgele değişkeni $k.$ başarıyı elde edinceye kadar yapılan bağımsız Bernoulli denemelerinin sayısıdır. $X_1$ birinci başarıyı elde edinceye kadar yapılan denemelerin sayısı, birinci başarıyı elde ettikten sonra ikinci başarıyı elde edinceye kadar yapılan denemelerin sayısı $X_2$ ve $k-1$ başarıdan sonra $k.$ başarıyı elde edinceye kadar yapılan denemelerin sayısı da $X_k$ olmak üzere $X$ rasgele değişkeni $X=X_1+X_2+\ldots+X_k$ şeklinde yazılır. Burada, her $i$ için $X_i$ ler bağımsız $X_i\sim Geo(p)$ olup $X=X_1+X_2+\ldots+X_k\sim NB(k,p)$ dir. Yani, Negatif Binom rasgele değişkeni, bağımsız geometrik rasgele değişkenlerin toplamıdır. Buradan, Negatif Binom dağılımın beklenen değeri ve varyansı

$$E(X)=E(X_1+X_2+\ldots+X_k)=E(X_1)+X_2+\ldots+E(X_k)=k/p$$

ve

$$Var(X)=Var(X_1+X_2+\ldots+X_k)=Var(X_1)+Var(X_2)+\ldots+Var(X_k)=kq/p^2$$

şeklinde hesaplanır. $X\sim NB(k,p)$ ise $X$ in moment çıkaran fonksiyonu, Geometrik dağılımın moment çıkaran fonksiyonu yardımı ile

$$M_X(t)=M_{X_1+\ldots+X_k}(t)=\prod_{i=1}^{k}M_{X_i}(t)=\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{p\,e^t}{1-qe^t}\right)=\left(\frac{p\,e^t}{1-qe^t}\right)^k\ \ ,\ \ e^t<(1/q)$$

şeklinde bulunmuştur. Momentlerin doğrudan hesaplanması biraz karmaşıktır. Örneğin, dağılımın birinci momenti,

$$E(X)=\sum_{x=k}^{\infty} x\binom{x-1}{k-1}p^k q^{x-k}=\sum_{x=k}^{\infty}\frac{x(x-1)!}{(k-1)!(x-k)!}p^k q^{x-k}=\frac{p^k}{(k-1)!}\sum_{x=k}^{\infty}\frac{x!}{(x-k)!}q^{x-k}$$

$$=\frac{p^k}{(k-1)!}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{(y+k)}{y!}q^y=\frac{p^k}{(k-1)!}\frac{k!}{(1-q)^{k+1}}=\frac{k\,p^k}{p^{k+1}}=\frac{k}{p}$$

dir. Daha yüksek mertebeden momentler daha da karmaşıktır. Onun için, Negatif Binom dağılımının özellikleri incelenirken, Negatif Binom rasgele değişkenini bağımsız geometrik rasgele değişkenlerin toplamı olarak almak, işlemlerin kolay yürütülmesine olanak sağlar.

Negatif Binom rasgele değişkeni, bağımsız Geometrik rasgele değişkenlerinin toplamıdır. Ancak bu dağılım, herhangi bir şekilde Binom dağılımı ile ilişkilendirilmektedir. Bunu açıklamak için $X \sim Binom(n, p)$ ve $Y \sim NB(k, p)$ olsun. Burada, $X$ rasgele değişkeni $n$ denemedeki başarıların sayısını gösterirken, $Y$ rasgele değişkeni $k$ başarı elde edinceye kadar yapılan denemelerin sayısıdır. Bu rasgele değişkenler arasında,

$$P(Y \le n) = P(X \ge k) \quad \text{ve} \quad P(Y > n) = P(X < k)$$

şeklinde bir ilişki vardır. Burada,

a) İlk $n$ denemede $k$ ya da daha fazla başarı gözlenmiş ise, ilk $k$ başarıyı elde etmek için $n$ ya da daha fazla deneme yapılması gerekir.

b) İlk $n$ denemede $k$ den az başarı gözlenmiş ise, $k$ başarıyı elde etmek için $n$ den çok deneme yapılması gerekir.