HAFTA 14

PROBLEM ÇÖZÜMLERİ

1.5. Çözümlü Problemler

1.5.1 $\Omega=[0,1]$, $\mathcal{U}=\mathcal{B}(\Omega)$ ve $P(A)=$"A nın aralık uzunluğu" olsun. Buna göre, $(\Omega,\mathcal{U},P)$ bir olasılık uzayıdır. Ω nın alt kümelerinden oluşan iki dizi

$$A_n=\{x\in\mathbb{R}:\ (n+1)^{-1}\le x\le 1\}\ ,\quad B_n=\{x\in\mathbb{R}:\ 0<x<n^{-1}\}$$

olarak verildiğinde, $P\left(\lim\limits_{n\to\infty} A_n\right)$ ve $P\left(\lim\limits_{n\to\infty} B_n\right)$ olasılıklarını hesaplayınız.

Çözüm: Her $n\in\mathbb{N}$ için $A_n\subset A_{n+1}$ ve $B_{n+1}\subset B_n$ olduğu

$$(n+1)<(n+2)\Rightarrow(n+2)^{-1}<(n+1)^{-1}$$

önermesinden açıktır. Yani,

$$A_n=\{x\in\mathbb{R}:(n+1)^{-1}\le x\le 1\}\subset\{x\in\mathbb{R}:(n+2)^{-1}\le x\le 1\}=A_{n+1}$$

olup A_n dizisi artandır. Benzer şekilde B_n dizisi de azalandır. Teorem (1.2.2) ye göre, A_n ve B_n dizilerinin limitleri vardır ve $\lim\limits_{n\to\infty} A_n=(0,1]$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} B_n=\varnothing$ dir. Buna göre,

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=P\big((\,0\,,1\,]\big)=1$$

ve

$$P\left(\lim_{n\to\infty} B_n\right)=P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right)=P(\,\varnothing\,)=0$$

elde edilir.

1.5.2 Ω boş olmayan bir küme, $\mathcal{U}$ da Ω üzerinde bir sigma cebir olsun. $B\in\mathcal{U}$ için,

$$\mathcal{U}_B=\{A:A=B\cap C\ ,\ C\in\mathcal{U}\}$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{U}_B$ sınıfının B üzerinde bir sigma cebir olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\mathcal{U}_B$ sınıfının bir sigma cebir olması için Tanım (1.1.3) deki sigma cebir olma koşullarını sağlanması gerekir. Şimdi bu koşulları inceleyelim.

(i) $B\in\mathcal{U}$ ve $B=B\cap B$ olduğundan, $B\in\mathcal{U}_B$ dir.

(ii) Şimdi, $\mathcal{U}_B$ deki her elemanın tümleyeninin de (tümleme B ye göre) $\mathcal{U}_B$ de olduğunun gösterilmesi gerekir. $A \in \mathcal{U}_B$ ise $A = B \cap C$ olacak şekilde bir $C \in \mathcal{U}$ vardır. O halde, A nın B ye göre tümleyeni (bunu A_B^c ile gösterelim) de bu sınıfta olmalıdır. Bunun için, $A_B^c = B \cap (B \setminus A) = B \setminus A = B \cap A^c$ olup, $B \setminus A \in \mathcal{U}$ olduğundan, $A_B^c \in \mathcal{U}_B$ dir.

(iii) $\mathcal{U}_B$ deki elemanların sayılabilir birleşimleri de $\mathcal{U}_B$ de olmalıdır. Bunun için $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in \mathcal{U}_B$ olsun. O zaman $A_n = B \cap C_n$ olacak şekilde $C_n \in \mathcal{U}$ küme dizisi vardır. Ayrıca,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B \cap C_n) = B \cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right] = B \cap C$$

olarak yazılabildiğinden, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{U}_B$ dir. Dolayısı ile, $\mathcal{U}_B$ sınıfı, B üzerinde bir sigma cebirdir.

1.5.3 $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayı, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) > 0$ olacak şekilde dört olay A_1, A_2, A_3 ve $A_4 \in \mathcal{U}$ olsun. Gösteriniz ki,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)\ P(A_2 \mid A_1)\ P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\ P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

dir.

Çözüm: $B_1 = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ denirse,

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(B_1 \cap A_4) &= P(B_1)\ P(A_4 \mid B_1) \\ &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\ P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

yazılır. Şimdi $B_2 = A_1 \cap A_2$ denirse,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3 \cap B_2) = P(B_2)\ P(A_3 \mid B_2) = P(A_1 \cap A_2) P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)$$

olur. Son olarak, $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) P(A_2 \mid A_1)$ olup sonuçlar birleştirildiğinde,

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= P(B_1 \cap A_4) = P(B_1) P(A_4 \mid B_1) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= P(A_1 \cap A_2)\ P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\ P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= P(A_1) P(A_2 \mid A_1)\ P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\ P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

şeklinde aranan eşitlik elde edilmiş olur.

1.5.4 a) $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayı, A ve $B \in \mathcal{U}$ bağımsız ve $P(A_1) = 0.6$, $P(A_2) = 0.3$ olsun. $P(A_1 \cap A_2)$, $P(A_1 \cup A_2)$ ve $P(A_1 \cup A_2^c)$ olasılıklarını hesaplayınız.

b) $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayı, $P(A_1) = 1/2$, $P(A_2) = 1/3$ ve $P(A_3) = 1/4$ olacak şekilde A_1, A_2 ve $A_3 \in \mathcal{U}$ bağımsız olaylar olsun. Buna göre, $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ olasılığını hesaplayınız.

c) $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayı, $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/4$ olacak şekilde A_1, A_2 ve $A_3 \in \mathcal{U}$ bağımsız olaylar olsun. $P[(A_1^c \cap A_2^c) \cup A_3]$ olasılığını hesaplayınız.

Çözüm: a) A_1 ve A_2 bağımsız olduğundan Örnek (1.3.3) den A_1 ile A_2^c , A_1^2 ile A_2 ve A_1^c ile A_2^c bağımsız olaylardır. Buradan aranan olasılıklar

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = (0.6)(0.3) = 0.18$$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) \\ &= 0.6 + 0.3 - 0.18 = 0.72 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2^c) &= P(A_1) + P(A_2^c) - P(A_1 \cap A_2^c) = P(A_1) + P(A_2^c) - P(A_1)P(A_2^c) \\ &= 0.6 + (1-0.3) - (0.6)(1-0.3) = 0.6 + 0.7 - 0.42 = 0.88 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

b) Bu olasılık doğrudan

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) \\ &\quad - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1)P(A_2) \\ &\quad - P(A_1)P(A_3) - P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(A_3) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{3}\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{(12+8+6) - (4+3+2) + 1}{24} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

olarak hesaplanmıştır.

c) Önce $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ olduğunu hatırlayalım. $B = A_1^c \cap A_2^c$ denirse aranan olasılık $P(B \cup A_3)$ haline dönüşür. O zaman aranan olasılık,

$$\begin{aligned} P[(A_1^c \cap A_2^c) \cup A_3] &= P[A_1^c \cap A_2^c] + P(A_3) - P[(A_1^c \cap A_2^c) \cap A_3] \\ &= P(A_1^c)P(A_2^c) + P(A_3) - P(A_1^c)P(A_2^c)P(A_3) \end{aligned}$$

$$=[1-P(A_1)]\,[1-P(A_2)]+P(A_3)-[1-P(A_1)][1-P(A_2)]P(A_3)$$
$$=\frac{3}{4}\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{4}=\frac{9}{16}+\frac{1}{4}-\frac{9}{64}=\frac{36+16-9}{64}=\frac{43}{64}$$

dir.

1.5.5 $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayı ve $A, B \in \mathcal{U}$ olsun. $P(A|B) < P(A)$ ise A olayı B olayına göre *itici olay* denir. Ayrıca, $P(A|B) > P(A)$ ise A olayı B olayına göre *çekici olay* denir.

a) A olayı B olayına göre çekici ise, B olayının da A olayına göre çekici olduğunu gösteriniz

b) A olayı B olayına göre çekici ise, B^c olayının A olayına göre itici olduğunu gösteriniz.

Çözüm: a) $P(A \mid B) > P(A)$ ise A olayı B ye göre çekicidir. A olayı B ye göre çekici ise $P(A \mid B) > P(A)$ olup, koşullu olasılığın tanımından

$$P(A \mid B) > P(A) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} > P(A) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} > P(B) \Rightarrow P(B \mid A) > P(B)$$

yazılır. Yani, B olayı da A ya göre çekicidir.

b) A olayı B ye göre çekici ise, $P(B^c \mid A) < P(B^c)$ olduğunun gösterilmesi gerekir. A olayı B ye göre çekici ise, $P(A \mid B) > P(A)$ dir. Koşullu olasılığın tanımından

$$P(A \mid B) > P(A) \Rightarrow P(A \cap B) > P(A)P(B)$$

dir. Buradan, $P(B^c \cap A) = P(A) - P(A \cap B) < P(A) - P(A)P(B)$ yazılır. Ayrıca,

$$P(B^c \cap A) < P(A) - P(A)P(B) = P(A)[1-P(B)] = P(A)P(B^c)$$
$$\Rightarrow \frac{P(B^c \cap A)}{P(A)} < P(B^c) \Rightarrow P(B^c \mid A) < P(B^c)$$

elde edilir. Yani, B^c olayı A ya göre iticidir.

1.5.6 $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayı ve $0 < P(C) < 1$ olmak üzere, $A, B, C \in \mathcal{U}$ olsun. $P(A|C) \geq P(B|C)$ ve $P(A|C^c) \geq P(B|C^c)$ ise $P(A) \geq P(B)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $A = (A \cap C) \cup (A \cap C^c)$ ve $B = (B \cap C) \cup (B \cap C^c)$ olup

$P(A) = P(A \cap C) + P(A \cap C^c)$ ve $P(B) = P(B \cap C) + P(B \cap C^c)$

dir. Diğer taraftan,

$$P(A|C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}\geq P(B|C)=\frac{P(B\cap C)}{P(C)}\Rightarrow P(A\cap C)\geq P(B\cap C)$$

ve

$$P(A|C^c)=\frac{P(A\cap C^c)}{P(C^c)}\geq P(B|C^c)=\frac{P(B\cap C^c)}{P(C^c)}\Rightarrow P(A\cap C^c)\geq P(B\cap C^c)$$

olacağından

$$P(A)=P(A\cap C)+P(A\cap C^c)\geq P(B\cap C)+P(B\cap C^c)=P(B)$$

eşitsizliği elde edilir. Yani $P(A)\geq P(B)$ dir.

1.5.7 $(\Omega,\mathcal{U},P)$ bir olasılık uzayı ve $A,B\in\mathcal{U}$ olsun. $P(A|B)=P(A|B^c)$ ise A ve B olaylarının bağımsız olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $P(A|B)=P(A|B^c)$ ise $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ olduğunun gösterilmesi gerekir. $A=(A\cap B)\cup(A\cap B^c)$ olup $(A\cap B)$ ile $(A\cap B^c)$ ayrık olaylardır. Buradan,

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cap B)=P(B)P(A|B)\\ P(A\cap B^c)=P(B^c)P(A|B^c)\end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)+P(A\cap B^c)=P(B)P(A|B)+P(B^c)P(A|B^c)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}P(A)=P(B)P(A|B)+P(B^c)P(A|B^c)&\Rightarrow P(A)=P(B)P(A|B)+P(B^c)P(A|B)\\ &\Rightarrow P(A)=P(A|B)\left[P(B)+P(B^c)\right]=P(A|B)\end{aligned}$$

dir. Buradan da,

$$P(A)=P(A|B)\Rightarrow P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

olup $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ elde edilir. Yani, A ve B olayları bağımsızdır.

<u>*İkinci yol:*</u> $P(A|B)=P(A|B^c)$ ise $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ olduğunun gösterilmesi gerekir. Koşullu olasılılar yerine yazılırsa, olayların bağımsızlığı ($P(A\cap B)=P(A)P(B)$),

$$\begin{aligned}P(A|B)=P(A|B^c)\Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B^c)}{P(B^c)}&\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}\\ &\Rightarrow(1-P(B))[P(A\cap B)]=P(B)[P(A)-P(A\cap B)]\\ &\Rightarrow P(A\cap B)-P(B)P(A\cap B)=P(A)P(B)-P(B)P(A\cap B)\\ &\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)\end{aligned}$$

şeklinde doğrudan elde edilmiş olur.

1.5.8 $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayı ve $P(A\cap B)=3/16$ ve $P(A|B)+P(B|A)=1$ olacak şekilde bağımsız iki olay A ve B olsun. $P(A)<P(B)$ ise $P(A)$ olasılığını hesaplayınız.

Çözüm: A ve B bağımsız olduğundan $P(A|B)+P(B|A)=1$ ise $P(A)+P(B)=1$ olduğu açıktır. Dolayısı ile, $P(B)=1-P(A)$ dır. Buradan

$$(3/16)=P(A\cap B)=P(A)P(B)=P(A)(1-P(A))$$

yazılır. $x=P(A)$ denirse, $x^2-x+(3/16)=0$ ikinci dereceden polinomu elde edilir. Bu denklemin çözümleri ise, $x_1=1/4$ ve $x_2=3/4$ olur. $P(A)+P(B)=1$ ve $P(A)<P(B)$ olduğundan $P(A)=1/4$ elde edilir.

İkinci yol: Bu soruyu başka bir yoldan aşağıdaki şekilde de çözebiliriz. $P(A)+P(B)=1$ ve A ile B bağımsız ($P(A\cap B)=P(A)P(B)$) olduğundan

$$\begin{aligned}(P(A)-P(B))^2 &= (P(A)+P(B))^2-4(P(A)P(B))\\ &=1-4(P(A)P(B))=1-4(3/16))=1/4\end{aligned}$$

olur. Buradan da, $(P(A)-P(B))^2=1/4$ olup, $P(A)-P(B)=\pm 1/2$ dir. Yani,

$$\left.\begin{aligned}P(A)+P(B)&=1\\ P(A)-P(B)&=1/2\end{aligned}\right\}\Rightarrow P(A)=3/4 \text{ veya } \left.\begin{aligned}P(A)+P(B)&=1\\ P(A)-P(B)&=-1/2\end{aligned}\right\}\Rightarrow P(A)=1/4$$

bulunur. $P(A)<P(B)$ olduğundan $P(A)-P(B)<0$ olmalıdır. Dolayısı ile ikinci eşitlik dikkate alınmalıdır. Buradan da, $P(A)=1/4$ elde edilir.

1.5.9 $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayı ve $A, B\in\mathcal{U}$ bağımsız olaylar olsun. Bu durumda, $P(A)=P(B)=p$ ve $P(A\cup B)=\alpha$ ise p olasılığını α türünden hesaplayınız.

Çözüm: $P(A\cup B)$ olasılığı açık olarak,

$$\alpha=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=p+p-p^2$$

şeklinde yazılır. Buradan p , $p^2-2p+\alpha=0$ ikinci dereceden denkleminin çözümüdür. Yani, $p=1\pm\sqrt{1-\alpha}$ dir. Ayrıca, p bir olasılık olduğundan 1 den büyük olamaz ve $p=1-\sqrt{1-\alpha}$ dir.

1.5.10 Bir ürün birbirinin aynısı A, B ve C makineleri tarafından üretiliyor. A makinesi tarafından üretilenlerin %5 nin, B makinesi tarafından üretilenlerin %4 nün ve C

makinesi tarafından üretilenlerin %3 nün hatalı olduğu bilinmektedir. Seçilen bir gün içinde üretilen ürünlerin %25 i A makinesinden, %30 u B makinesi tarafından ve %45 i de C makinesi tarafından üretilmiştir. Bu gün içinde üretilen ürünlerden rasgele seçilen bir ürünün hatalı olduğu gözlendiğinde bunun C makinesi tarafından üretilmiş olması olasılığını hesaplayınız.

Çözüm: Bunun için, $H = \{\text{seçilen ürün hatalı}\}$ olayı ile

$A = \{$ Ürün A makinesinde üretilmiştir $\}$

$B = \{$ Ürün B makinesinde üretilmiştir $\}$

$C = \{$ Ürün C makinesinde üretilmiştir $\}$

olaylarını tanımlayalım. Buna göre, A, B ve C olayları örnek uzayın bir parçalanmasını oluşturur.

Verilen olasılıklar

$$P(A) = 0.25,\ P(H\,|\,A) = 0.05,\ P(B) = 0.30\ ,\ P(H\,|\,B) = 0.04,$$

$$P(C) = 0.45,\ P(H\,|\,C) = 0.03$$

şeklinde yazıldığında H olayının olasılığı

$$\begin{aligned} P(H) &= P(A)\,P(H\mid A) + P(B)\,P(H\mid B) + P(C)\,P(H\mid C) \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{20} + \frac{3}{10}\frac{1}{25} + \frac{9}{20}\frac{3}{100} = \frac{19}{500} \end{aligned}$$

olup aranan olasılık,

$$P(C\,|\,H) = \frac{P(C \cap H)}{P(H)} = \frac{P(C)\,P(H\,|\,C)}{P(H)} = \frac{(9/20)(3/100)}{(19/500)} = \frac{27}{2000}\frac{500}{19} = \frac{27}{4}\frac{1}{19} = \frac{27}{76}$$

olarak bulunur.

2.7. Çözümlü Problemler

2.7.1 X bir rasgele değişken ise, aşağıdaki önermelerin denk olduğunu gösteriniz.

a) $a \in \mathbb{R}$ için $\{w \in \Omega : X(w) \le a\} \in \mathcal{U}$ b) $a \in \mathbb{R}$ için $\{w \in \Omega : X(w) > a\} \in \mathcal{U}$

c) $a \in \mathbb{R}$ için $\{w \in \Omega : X(w) \ge a\} \in \mathcal{U}$ d) $a \in \mathbb{R}$ için $\{w \in \Omega : X(w) < a\} \in \mathcal{U}$

Çözüm: $\mathcal{U}$ bir sigma cebir olduğundan her $A \in \mathcal{U}$ için $A^c \in \mathcal{U}$ dur. Buradan, (a) ile (b) önermeleri ve (c) ile (d) önermeleri denktir. Buna göre, (b) ile (c) önermeleri denk ise bütün önermeler denk olur. Önce, $a \in \mathbb{R}$ için $\{w \in \Omega : X(w) > a\} \in \mathcal{U}$ olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}$

için $A_n = \{w : X(w) > a - (1/n)\} \in \mathcal{U}$ küme dizisini tanımlayalım. $\mathcal{U}$ bir sigma cebir olduğundan A_n kümelerinin sayılabilir arakesitleri de $\mathcal{U}$ dadır. O halde,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ w : X(w) > a - \frac{1}{n} \right\} = \{ w : X(w) \geq a \} \in \mathcal{U}$$

olur. Yani, $(b) \Rightarrow (c)$ önermesi doğrudur. Şimdi, $a \in \mathbb{R}$ için $\{w \in \Omega : X(w) \geq a\} \in \mathcal{U}$ olsun. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için, $B_n = \{w : X(w) \geq a + (1/n)\} \in \mathcal{U}$ yazıldığında, $\mathcal{U}$ bir sigma cebir olduğundan B_n lerin sayılabilir birleşimleri de $\mathcal{U}$ nun elemanıdır. Buradan,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ w : X(w) \geq a + \frac{1}{n} \right\} = \{ w : X(w) > a \} \in \mathcal{U}$$

elde edilir. Buna göre, $(c) \Rightarrow (b)$ önermesi sağlanmış olur. Dolayısı ile, $(b) \Rightarrow (c)$ ve $(c) \Rightarrow (b)$ olduğundan iki önerme denktir.

2.7.2 $\Omega = [-1, 2]$, $\mathcal{U} = \mathcal{B}(\Omega)$ ve $A \in \mathcal{U}$ için $P(A) =$ "A nın aralık uzunluğu"/3 olmak üzere, $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olsılık uzayıdır.

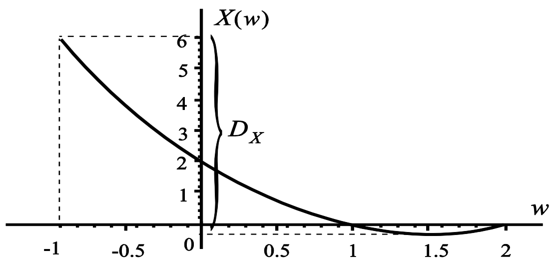
$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$w \to X(w) = w^2 - 3w + 2$$

şeklinde tanımlanan X rasgele değişkeninin beklenen değerini bulunuz.

Çözüm: X in değer kümesinin $D_X = [-0.25, 6]$ olduğu fonksiyonun aşağıda (Şekil (2.7.1)) verilen grafiğinden görülmektedir. X in değer kümesi $\mathbb{R}$ nin bir alt kümesi olup en küçük ve en büyük alabileceği değerlerini bulabilmek için fonksiyonun türevinden yararlanabiliriz (X , w nın türevlenebilen bir fonksiyonudur). Yani,

$$\frac{dX(w)}{dw} = 2w - 3 = 0 \Rightarrow w = 3/2$$

olduğundan X rasgele değişkeni en küçük değerini $w = 3/2$ noktasında alır. Bu noktadaki değeri ise -0.25 dir. Rasgele değişkenin değer bölgesini gösteren grafik Şekil (2.7.1) de verilmiştir. Yani X rasgele değişkeninin değer kümesi $D_X = [-0.25, 6]$ dır.



Şekil 2.7.1 Problem (2.7.2) de tanımlanan rasgele değişkenin değer bölgesi

Şimdi, X in dağılım fonksiyonunu bulalım. Önce, $x < -0.25$ ise $F(x) = 0$ ve $x \geq 6$ için $F(x) = 1$ olduğu açıktır. $-0.25 < x < 0$ için dağılım fonksiyonunun değeri

$$F(x) = P(\{w : X(w) \leq x\}) = P(\{w : w^2 - 3w + 2 \leq x\}) = P(\{w : w^2 - 3w + 2 - x \leq 0\})$$
$$= P\left(\left\{w : \frac{3-\sqrt{1+4x}}{2} \leq w \leq \frac{3+\sqrt{1+4x}}{2}\right\}\right) = \frac{\sqrt{1+4x}}{3}$$

$0 \leq x < 6$ için fonksiyonun değeri de,

$$F(x) = P(\{w : X(w) \leq x\}) = P(\{w : w^2 - 3w + 2 \leq x\}) = P(\{w : w^2 - 3w + 2 - x \leq 0\})$$
$$= P\left(\left\{w : \frac{3-\sqrt{1+4x}}{2} \leq w \leq 2\right\}\right) = \frac{1+\sqrt{1+4x}}{6}$$

olarak hesaplanmıştır. Buna göre, X in dağılım fonksiyonu ile olasılık yoğunluk fonksiyonu (dağılım fonksiyonu $x = -0.25,\ 0$ ve 6 noktalarında türevlenemez) sırası ile,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq -0.25 \\ \dfrac{\sqrt{1+4x}}{3} & , \quad -0.25 \leq x < 0 \\ \dfrac{1+\sqrt{1+4x}}{6} & , \quad 0 \leq x < 6 \\ 1 & , \quad x \geq 6 \end{cases} \quad , \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3\sqrt{1+4x}} & , \quad -0.25 < x < 0 \\ \dfrac{1}{3\sqrt{1+4x}} & , \quad 0 < x < 6 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$\int_{x \in D_X} f(x)\,dx = \int_{-0.25}^{0} \frac{2}{3\sqrt{1+4x}}\,dx + \int_{0}^{6} \frac{1}{3\sqrt{1+4x}}\,dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

olduğundan bu fonksiyon bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Rasgele değişkenin beklenen değeri de

$$\int_{x \in D_X} x f(x)\,dx = \int_{-0.25}^{0} \frac{2x}{3\sqrt{1+4x}}\,dx + \int_{0}^{6} \frac{x}{3\sqrt{1+4x}}\,dx$$
$$= \left(\frac{(1+4x)^{3/2}}{36} - \frac{\sqrt{1+4x}}{12}\right)\Bigg|_{x=-0.25}^{0} + \left(\frac{(1+4x)^{3/2}}{72} - \frac{\sqrt{1+4x}}{24}\right)\Bigg|_{x=0}^{6} = -\frac{1}{18} + \frac{14}{9} = \frac{3}{2}$$

olarak hesaplanmıştır.

2.7.3 X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x,y)=\begin{cases} c\,x\,y^2 & , \quad 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olarak verilmiş olsun.

a) c sabitinin değerini bulunuz.

b) $P(X+Y\geq 1)$ ve $P(0<X<0.75)$ olasılıklarını hesaplayınız.

Çözüm: a) $c=6$ olduğu,

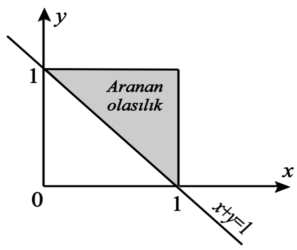
$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} x\,y^2\,dy\,dx = \frac{1}{6}$$

çift katlı integralinin sonucundan açıktır.

b) $P(X+Y\geq 1)$ olasılığına karşılık gelen bölge Şekil (2.7.2) de gösterilmiştir. Bu bölgenin alanı (aranan olasılık),

$$P(X+Y\geq 1)=\int_{x=0}^{1}\int_{y=x}^{1} 6\,x\,y^2\,dy\,dx=\int_{x=0}^{1} 6x\left(\frac{y^3}{3}\right)_{y=x}^{1} dy \;=2\int_{x=0}^{1} x(1-x^3)\,dx$$
$$=2\int_{x=0}^{1}(x-x^4)\,dx=2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right]=\frac{3}{5}$$

dir.



Şekil 2.7.2 Problem (2.7.3) de aranan olasılığa ait bölge

Diğer olasılık için, X in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonuna ihtiyacımız vardır.

$$\int_{y=0}^{1} 6\,x\,y^2 dy = 2\,x$$

integralinin sonucundan X rasgele değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_X(x)=\begin{cases} 2\,x & , \quad 0<x<1 \\ 0 & , \quad d.y \end{cases}$$

şeklinde bulunmuştur. Dolayısı ile aranan olasılık,

$$P(0 < X < 0.75) = \int_{0}^{0.75} 2x dx = x^2 \Big|_{x=0}^{0.75} = \frac{9}{16}$$

dır.

2.7.4 a) X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x,y) = \begin{cases} c e^{-2x} & , \quad 0 < y < x < \infty \\ 0 & , \quad d.y \end{cases}$$

olarak verilmiş olsun.

a) c sabitinin değerini, $P(X > Y)$ olasılığını ve X ile Y arasındaki korelasyonu hesaplayınız.

b) X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-2x-y} & , \quad x > 0, \; y > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olarak verildiğinde $P(X > Y)$ olasılığını hesaplayınız.

Çözüm: a) Önce,

$$\int_{x=0}^{\infty} \int_{y=0}^{x} e^{-2x} dy\, dx = \int_{x=0}^{\infty} e^{-2x} \left(\int_{y=0}^{x} dy \right) dx = \int_{x=0}^{\infty} x e^{-2x}\, dx = \frac{1}{4}$$

olduğundan, $c = 4$ dür. Yani, X ve Y in ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x,y) = \begin{cases} 4\, e^{-2x} & , \quad 0 < y < x < \infty \\ 0 & , \quad d.y \end{cases}$$

dir. Ayrıca,

$$f_X(x) = \int_{y=0}^{x} f(x,y)\, dy = \int_{y=0}^{x} 4e^{-2x}\, dy = 4x e^{-2x}$$

$$f_Y(y) = \int_{x=y}^{\infty} f(x,y)\, dx = \int_{x=y}^{\infty} 4e^{-2x}\, dx = -2e^{-2x} \Big|_{x=y}^{\infty} = 2e^{-2y}$$

integrallerinden X ve Y rasgele değişkenlerinin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları,

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x e^{-2x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y} & , \quad y > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olarak yazılır. Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarından beklenen değer ve varyanslar,

$E(X)=1$, $E(X^2)=3/2$, $Var(X)=1/2$ ve $E(Y)=1/2$, $E(Y^2)=1/2$, $Var(Y)=1/4$

olarak hesaplanmıştır. Marjinaller hesaplandıktan sonra, aranan olasılık

$$P(X>Y)=\int_{y\in D_Y} P(X>Y\,|\,Y=y)\,f_Y(y)\,dy=\int_{y=0}^{\infty} P(X>y)\,f_Y(y)\,dy$$
$$=\int_{y=0}^{\infty} P(X>y)\,2e^{-2y}\,dy=\int_{y=0}^{\infty} 2e^{-2y}\left(\int_{x=y}^{\infty} f_X(x)dx\right)dy$$
$$=\int_{y=0}^{\infty} 2e^{-2y}\left(\int_{x=y}^{\infty} 4xe^{-2x}dx\right)dy=\int_{y=0}^{\infty} 2e^{-2y}\left(2ye^{-2y}+e^{-2y}\right)dy=\frac{3}{4}$$

olarak elde edilir. Ayrıca,

$$E(XY)=\int_{x=0}^{\infty}\int_{y=0}^{x} xy\,f(x,y)dy\,dx=\int_{x=0}^{\infty}\int_{y=0}^{x} 4xye^{-2x}dy\,dx=2\int_{x=0}^{\infty} x^3e^{-2x}\,dx=\frac{3}{4}$$

olup X ve Y rasgele değişkenleri arasındaki korelasyon da

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}=\frac{\frac{3}{4}-(1)\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

olarak bulunmuştur.

b) X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x,y)=\begin{cases} 2e^{-2x-y} & , \quad x>0, y>0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

şeklinde verildiğinde marjinaller

$$f_X(x)=\begin{cases} 2\,e^{-2x} & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y} & , \quad y>0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

şeklinde olur. Ayrıca, her $x,y\in\mathbb{R}$ için $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ olup X ve Y bağımsız rasgele değişkenlerdir. Buna göre $P(X>Y)$ olasılığı,

$$P(X>Y)=\int_{y\in D_Y} P(X>Y\,|\,Y=y)\,f_Y(y)\,dy=\int_{y=0}^{\infty} P(X>y)\,f_Y(y)\,dy$$
$$=\int_{y=0}^{\infty}\left(\int_{x=y}^{\infty} 2e^{-2x}dx\right)e^{-y}\,dy=\int_{y=0}^{\infty} e^{-2y}e^{-y}\,dy=\int_{y=0}^{\infty} e^{-3y}dy=\frac{1}{3}$$

olarak bulunmuştur.

2.7.5 X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases}(1/\theta)e^{-x/\theta} & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

olarak verildiğinde, bu rasgele değişkenin momentleri arasında,

$$E(X^{n+1})=\theta E(X^n)+\theta^2\frac{d}{d\theta}E(X^n)$$

şeklinde bir bağıntının olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Türev ile integral operatörlerinin yer değiştirebildiği varsayımı altında, çarpım şeklindeki iki fonksiyonun türevi kullanılarak eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terim

$$\frac{d}{d\theta}E_\theta(X^n)=\frac{d}{d\theta}\left[\int_0^\infty x^n\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}dx\right]=\frac{d}{d\theta}\left[\left(\frac{1}{\theta}\right)\int_0^\infty x^n e^{-x/\theta}dx\right]$$

$$=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\theta}\right)\left[\int_0^\infty x^n e^{-x/\theta}dx\right]+\left(\frac{1}{\theta}\right)\frac{d}{d\theta}\int_0^\infty x^n e^{-x/\theta}dx$$

$$=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\theta}\right)\left[\int_0^\infty x^n e^{-x/\theta}dx\right]+\frac{1}{\theta}\int_0^\infty x^n\frac{d}{d\theta}e^{-x/\theta}dx=-\frac{1}{\theta^2}\int_0^\infty x^n e^{-x/\theta}dx+\frac{1}{\theta^3}\int_0^\infty x^{n+1}e^{-x/\theta}dx$$

$$=-\frac{1}{\theta}\int_0^\infty x^n\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}dx+\frac{1}{\theta^2}\int_0^\infty x^{n+1}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}dx=-\frac{1}{\theta}E_\theta(X^n)+\frac{1}{\theta^2}E_\theta(X^{n+1})$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da

$$\frac{d}{d\theta}E_\theta(X^n)=-\frac{1}{\theta}E_\theta(X^n)+\frac{1}{\theta^2}E_\theta(X^{n+1})\Rightarrow E_\theta(X^{n41})=\theta E_\theta(X^n)+\theta^2\frac{d}{d\theta}E_\theta(X^n)$$

şeklinde aranan eşitlik elde edilmiş olur.

2.7.6 X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x,y)=\begin{cases}c\,x^2y & , \quad x^2<y<1 \\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

olarak verilmiş olsun.

a) c sabitinin değerini bulunuz.

b) $P(X\geq Y)$ olasılığını hesaplayınız.

c) X ve Y nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz.

d) $P(Y \geq 3/4 \mid X = 1/2)$ koşullu olasılığını hesaplayınız.

e) X ile Y arasındaki korelasyonu hesaplayınız.

f) $X = x$ verildiğinde, Y nin koşullu beklenen değerini hesaplayınız.

Çözüm: a) $x^2 < 1$ olduğundan, X in sınırları $-1 < x < 1$ dir. Yani, $D_X = [-1, 1]$ dir. Buradan c sabitinin değeri,

$$1 = \int_{x=-1}^{1} \int_{y=x^2}^{1} f(x,y)dydx = c \int_{x=-1}^{1} \left[\int_{y=x^2}^{1} ydy \right] x^2 dx = c \int_{x=-1}^{1} x^2 \frac{1-x^4}{2} dx = \frac{4c}{21}$$

eşitliğinden $c = 21/4$ olarak bulunmuş olur.

b) $P(X \geq Y)$ olasılığı için

$$A = \{X(w) \geq Y(w)\} = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\}$$

kümesini göz önüne alalım. Buradan aranan olasılık,

$$P(X \geq Y) = \frac{21}{4} \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{x} x^2 y \ dydx = \frac{21}{3} \int_{x=0}^{1} x^2 \left[\int_{y=x^2}^{x} y\,dy \right] dx = \frac{21}{4} \int_{x=0}^{1} x^2 \left(\frac{x^2 - x^4}{2} \right) dx = \frac{3}{20}$$

olarak hesaplanır.

c) X ve Y nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulalım. Önce,

$$\int_{y \in D_Y} f(x,y)\,dy = \frac{21}{4} x^2 \int_{y=x^2}^{1} y\,dy = \frac{21}{8} x^2 (1 - x^4)$$

olup X in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_X(x) \begin{cases} \frac{21}{8} x^2 (1 - x^4) & , \quad -1 < x < 1 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

dir. $x^2 < y$ *ise* $-\sqrt{y} < x < \sqrt{y}$ olduğundan

$$\int_{x \in D_X} f(x,y)\,dx = \frac{21}{4} y \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 dx = \frac{21}{4} y \left(2 \int_{0}^{\sqrt{y}} x^2 dx \right) = \frac{21}{2} y \left(\frac{x^3}{3} \right)_{x=0}^{\sqrt{y}} = \frac{7}{2} y^{5/2}$$

integralinden sonucu olarak, Y nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu da,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{7}{2} y^{5/2} & , \quad 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olarak bulunur.

d) $P(Y \geq 3/4 \mid X = 1/2)$ olasılığı için $X = x$ verildiğinde Y nin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonuna ihtiyaç vardır. $x^2 < y < 1$ için

$$f(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{(21/4)x^2 y}{(21/8)x^2(1-x^4)} = \frac{2y}{1-x^4}$$

olduğundan $\mathrm{X} = x$ verildiğinde Y nin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{Y|X=x}(y \mid x) = \begin{cases} 2y/(1-x^4) & , \quad x^2 < y < 1 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

dir. Diğer taraftan,

$$\int_{x^2}^{1} \frac{2y}{1-x^4}\, dy = \left. \frac{y^2}{1-x^4} \right|_{y=x^2}^{1} = 1$$

olduğundan $f_{Y|X=x}(y \mid x)$ bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Buradan aranan olasılık da,

$$P(Y \geq 3/4 \mid X = 1/2) = \int_{3/4}^{1} f(y \mid 1/2)\, dy = \int_{3/4}^{1} \left(\frac{2y}{(1-(1/2)^4)} \right) dy = \frac{32}{15} \int_{3/4}^{1} y\, dy = \frac{7}{15}$$

olarak hesaplanmıştır.

e) Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarından beklenen değer ve varyanslar

$$E(X) = 0,\ E(X^2) = \frac{7}{15},\ Var(X) = \frac{7}{15},\ E(Y) = \frac{7}{9},\ E(Y^2) = \frac{7}{11},\ Var(Y) = \frac{28}{891}$$

şeklinde bulunmuştur. Ayrıca,

$$E(XY) = \frac{21}{4} \int_{x=-1}^{1} \int_{y=x^2}^{1} xy\, f(x,y)\, dy dx = \frac{21}{4} \int_{x=-1}^{1} \left[\int_{y=x^2}^{1} y^2 dy \right] x^3 dx = \frac{7}{4} \int_{-1}^{1} x^3(1-x^6) dx = 0$$

dır. Dolayısı ile, X ile Y arasındaki kolerasyon

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{0 - 0\ (7/9)}{\sqrt{(7/15)(28/891)}} = 0$$

dır. X ve Y rasgele değişkenleri bağımsız olmamasına rağmen, aralarındaki korelasyon sıfırdır.

f) $X = x$ verildiğinde, Y nin koşullu beklenen değeri,

$$E\left(Y \mid X = x\right) = \int_{y \in D_Y} y f_{Y|X=x}(y \mid x)\, dy = \int_{y=x^2}^{1} 2y^2/(1-x^4)\, dy = \frac{2(1-x^6)}{3(1-x^4)}$$

dir.

2.7.7 X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu,

$$P(X=x, Y=y) = cx/y \ , \ x=1,2 \ , \ y=1,2$$

olarak verilmiş olsun. c sabitinin değerini bulunuz. X ile Y bağımsız mıdır?

Çözüm: Önce,

$$\sum_{y=1}^{2}\sum_{x=1}^{2}(x/y) = 9/2$$

olduğundan $c = 2/9$ dur. Marjinal olasılık fonksiyonları da

$$P(X=x) = x/3, \ x=1,2 \ , \quad P(Y=y) = 2/(3y) \ , \ y=1,2$$

şeklindedir. Buradan, $Y=y$ verildiğinde X in koşullu olasılık fonksiyonu, $x=1,2$ için

$$P(X=x \,|\, Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{\left(2x/9y\right)}{\left(2/(3y)\right)} = \frac{x}{3} = P(X=x)$$

olup X ve Y rasgele değişkenleri bağımsızdır.

2.7.8 $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayı ve $A, B \in \mathcal{U}$ olsun. X ve Y rasgele değişkenleri

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \qquad\qquad Y : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$w \to X(w) = \begin{cases} 1 & , \quad w \in A \\ 0 & , \quad w \notin A \end{cases} \qquad\qquad w \to Y(w) = \begin{cases} 1 & , \quad w \in B \\ 0 & , \quad w \notin B \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Buna göre,

$$Cov(X,Y) > 0 \Leftrightarrow P(Y=1 \,|\, X=1) > P(Y=1)$$

önermesini ispat ediniz.

Çözüm: $D_X = D_Y = \{0,1\}$ olduğundan, $E(X) = P(X=1)$, $E(Y) = P(Y=1)$ olup,

$$E(XY) = \sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} x\,y\,P(X=x, Y=y) = P(X=1, Y=1)$$

dir. Buradan,

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = P(X=1, Y=1) - P(X=1)P(Y=1)$$

yazılır. Dolayısı ile,

$$Cov(X,Y) > 0 \Leftrightarrow P(X=1, Y=1) - P(X=1)P(Y=1) > 0 \Leftrightarrow P(X=1, Y=1) > P(X=1)P(Y=1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(X=1, Y=1)}{P(X=1)} > P(Y=1) \Leftrightarrow P(Y=1 \,|\, X=1) > P(Y=1)$$

elde edilir.

2.7.9 Dağılım fonksiyonu,

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x}-xe^{-x} & , \quad x>0 \\ & , \quad d.y.\end{cases}$$

şeklinde verilen bir X rasgele değişkenin modunu bulunuz.

Çözüm: Bir rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu dağılım fonksiyonunun türevi olduğundan X in olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases}xe^{-x} & , \quad x>0 \\ & , \quad d.y.\end{cases}$$

dir. Bir rasgele değişkenin modu ise olasılık fonksiyonunu maksimum yapan değerdir. Buradan, X in modu olasılık yoğunluk fonksiyonunun türevini sıfır yapan noktadır. O halde, $f(x)=e^{-x}-xe^{-x}=0 \Rightarrow x=1$ olduğundan rasgele değişkenin modu $x=1$ dir.

2.7.10 X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x,y)=\begin{cases}1/y & , \quad 0<x<y<1 \\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

olarak verilmiş olsun.

a) Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz.

b) $P(X<1/2)$, $P(X\leq 1/4, Y\leq 1/2)$ ve $P(X>1/4$ veya $Y>1/4)$ olasılıklarını hesaplayınız.

Çözüm: a) Önce,

$$f_X(x)=\int_{y=x}^{1}\frac{1}{y}dy=\ln(y)\Big|_{y=x}^{1}=-\ln(x) \quad \text{ve} \quad f_Y(x)=\int_{x=0}^{y}\frac{1}{y}dx=1$$

integral değerleri kullanılarak marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları sırası ile

$$f_X(x)=\begin{cases}-\ln(x) & , \quad 0<x<1 \\ 0 & , \quad d.y.\end{cases} \quad \text{ve} \quad f_Y(y)=\begin{cases}1 & , \quad 0<y<1 \\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

şeklinde bulunmuştur.

b) Şimdi olasılıkları hesaplayalım. Önce, $P(X<1/2)$ olasılığı,

$$P(X<1/2)=\int_0^{1/2}-\ln(x)\,dx=-x\ln(x)\Big|_0^{1/2}+\int_0^{1/2}dx=-x\ln(x)\Big|_0^{1/2}+x\Big|_0^{1/2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)=0.847$$

dir. Burada, L'Hospital kuralı iki defa uygulandığında (limit ifadesinde $0/0$ veya ∞/∞ ifadeleri geldiği zaman uygulanır),

$$\lim_{x\to 0}\left(-x\ln(x)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1/x)}{1/x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(-1/x^2\right)/(1/x)}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0}x=0$$

olduğunu belirtmek gerekir. $P(X\le 1/4, Y\le 1/2)$ olasılığı ise,

$$P(X\le 1/4,Y\le 1/2)=\int_0^{1/4}\int_x^{1/2}\frac{1}{y}\,dy\,dx=\int_0^{1/4}\left(\ln(1/2)-\ln(x)\right)dx$$

$$=\int_0^{1/4}\left(\ln(1/2)\right)dx+\int_0^{1/4}\left(-\ln(x)\right)dx=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\int_0^{1/4}(-\ln(x))\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\left[-x\ln(x)+x\Big|_0^{1/4}\right]=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{1/2}{1/4}\right)\right]+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\ln(2)+\frac{1}{4}=0.423$$

dür. Son olarak, $P(X>1/4$ veya $Y>1/4)$ olasılığını hesaplayalım. Bunun için,

$$P(X>1/4)=\int_{1/4}^{1}-\ln(x)\,dx=\left(-x\ln(x)+x\right)\Big|_{x=1/4}^{1}\cong 0.403,$$

$$P(Y>1/4)=\int_{1/4}^{1}dy=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

ve

$$P(X>1/4\ ,\ Y>1/4)=\int_{1/4}^{1}\int_{1/4}^{y}\left(\frac{1}{y}\right)dx\,dy=\int_{1/4}^{1}\left(1-\frac{1}{4y}\right)dy=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{4}\right)\cong 0.403$$

olduğundan aranan olasılık,

$$P(X>1/4\ \text{ veya } Y>1/4)=P(X>1/4)+P(Y>1/4)-P(X>1/4,Y>1/4)$$
$$=0.403+\frac{3}{4}-0.403=\frac{3}{4}$$

şeklinde bulunmuştur. Burada integrallerin analitik hesabı için Mapple VIII programından yararlanılmıştır.

3.4. Çözümlü Problemler

3.4.1 Bağımsız aynı dağılımlı X_1 ve X_2 rasgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases}1/\theta & , \quad 0<x<\theta \\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

olmak üzere $Y_1=\min(X_1,X_2)$ ve $Y_2=\max(X_1,X_2)$ rasgele değişkenlerini tanımlayalım. $E(Y_1)$, $E(Y_2)$ ve $E(Y_1/Y_2)$ değerlerini hesaplayınız.

Çözüm: Y_1 ve Y_2 rasgele değişkenlerinin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları,

$$f_{Y_1}(y_1)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta}\left(1-\dfrac{y_1}{\theta}\right) & , \quad 0<y_1<\theta \\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}, \qquad f_{Y_2}(y_2)=\begin{cases}\dfrac{2y_2}{\theta^2} & , \quad 0<y_2<\theta \\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

ve Y_1 ve Y_2 nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu da

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=\begin{cases}2\theta^{-2} & , \quad 0<y_1<y_2<\theta \\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

dir (Casella ve Berger, 2002, sayfa 230). Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarından beklenen değerler $E(Y_1)=\theta/3$ ve $E(Y_2)=(2\theta)/3$ olarak hesaplanmıştır. $U=Y_1/Y_2$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu için $V=Y_2$ yardımcı dönüşümünü tanımlayalım. Ters dönüşümler $Y_1=UV$ ve $Y_2=V$ olup Jacobien matrisi ve determinantı

$$J=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial Y_1}{\partial U} & \dfrac{\partial Y_1}{\partial V} \\ \dfrac{\partial Y_2}{\partial U} & \dfrac{\partial Y_2}{\partial V}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v & u \\ 0 & 1\end{bmatrix}, \qquad \det(J)=v$$

şeklinde hesaplanmıştır. U ve V nin sınırları, $0<u<1$ ve $0<v<\theta$ olup ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{U,V}(u,v)=\begin{cases}2v\theta^{-2} & , \quad 0<u<1,\ 0<v<\theta \\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

dir. Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun V nin değer kümesi üzerinden integrali

$$\int_{v=0}^{\theta} f_{U,V}(u,v)\,dv=\int_{v=0}^{\theta} 2v\theta^{-2}dv=1$$

olduğundan U nun marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_U(u)=\begin{cases}1 & , \quad 0<u<1 \\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

olup, $E(U)=1/2$ dır. Ayrıca, $E(Y_1)=\theta/3$ ve $E(Y_2)=(2\theta)/3$ olduğundan,

$$\frac{E(Y_1)}{E(Y_2)} = \frac{\theta/3}{2\theta/3} = \frac{1}{2} = E(U) = E(Y_1/Y_2)$$

elde edilir. Genel olarak $E(Y_1)/E(Y_2) \neq E(Y_1/Y_2)$ dir.

3.4.2 $X_1,\ldots,X_n$ bağımsız aynı olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler olsun. $i = 1,2,3,\ldots,n$ için X_i lerin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X_k}(x_k) = \begin{cases} \theta_k \, e^{-\theta_k x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olarak verildiğinde $Y = \min(X_1,\ldots,X_n)$ olmak üzere $P(Y = X_k)$ olasılığını hasaplayınız.

Çözüm: Önce, Y nin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım. Y nin dağılım fonksiyonu, $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(\min\{X_1, X_2,\ldots,X_n\} \le y) = 1 - P(\min\{X_1, X_2,\ldots,X_n\} > y) \\ &= 1 - P\left(X_1 > y, X_2 > y,\ldots,X_n > y\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > y) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(\int_y^{\infty} \theta_i \, e^{-\theta_i x} dx\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(-e^{-\theta_i x}\Big|_{x=y}^{\infty}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} e^{-\theta_i y} = 1 - e^{-(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)y} = 1 - e^{-\theta y} \end{aligned}$$

olup, olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \theta e^{-\theta y} & , \quad y > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olarak elde edilmiştir. Buradan da $P(Y = X_k)$ olasılığı da,

$$\begin{aligned} P\left(Y = X_k\right) &= P(X_1 > X_k, X_2 > X_k,\ldots,X_{k-1} > X_k, X_{k+1} > X_k,\ldots,X_n > X_k) \\ &= \int_0^{\infty} P(X_1 > X_k, X_2 > X_k,\ldots,X_{k-1} > X_k, X_{k+1} > X_k,..X_n > X_k \mid X_k = t)\, f_{X_k}(t)dt \\ &= \int_0^{\infty} P(X_1 > t, X_2 > t,\ldots,X_{k-1} > t, X_{k+1} > t,..X_n > t)\, f_{X_k}(t)dt \\ &= \int_0^{\infty}\left(\prod_{i=1, i\neq k}^{n} e^{-\theta_i t}\right)\theta_k \, e^{-\theta_k t} dt = \theta_k \int_0^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{-\theta_i t}\right) dt = \theta_k \int_0^{\infty} e^{-(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)t} dt \\ &= \frac{\theta_k}{(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)}\left(-e^{-(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)t}\Big|_{t=0}^{\infty}\right) = \frac{\theta_k}{(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)} \end{aligned}$$

olarak bulunmuştur.

3.4.3 Beklenen değeri μ, varyansı σ^2 olan bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin dizisi $\{X_n\ , n \in \mathbb{N}\}$ olsun. Ayrıca, X_i rasgele değişkenlerinden bağımsız, negatif değerler almayan sonlu beklenen değer ve varyansa sahip kesikli bir rasgele değişken de N olsun. $S_0 = 0$ ve $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ olacak şekilde S_N rasgele değişkenini tanımlayalım. $E(S_N)$, $E(S_N^2)$ ve $Var(S_N)$ değerlerini hesaplayınız.

Çözüm: Önce, $E(S_N)$ değerini hesaplayalım. $N = n$ verildiğinde,

$$E(S_n) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = n\,\mu$$

olduğundan $E(S_N)$ beklenen değeri

$$E(S_N) = \sum_{n=1}^{\infty} E\left(S_N \mid N = n\right) P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} E\left(S_n\right) P(N = n) = \mu \sum_{n=1}^{\infty} n\, P(N = n) = \mu\, E(N)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $N = n$ verildiğinde, $Var(S_n)$ ve $E(S_n^2)$ değerleri de

$$Var(S_n) = Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = n\,\sigma^2 \quad \text{ve} \quad E(S_n^2) = Var(S_n) + (E(S_n))^2$$

olup, $E(S_N^2)$ beklenen değeri

$$\begin{aligned} E(S_N^2) &= \sum_{n=1}^{\infty} E\left(S_N^2 \mid N = n\right) P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} E\left(S_n^2\right) P(N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(Var(S_n) + (E(S_n))^2\right) P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n\,\sigma^2 + n^2 \mu^2\right) P(N = n) \\ &= \sigma^2 \sum_{n=1}^{\infty} n\, P(N = n) + \mu^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2\, P(N = n) = \sigma^2 E(N) + \mu^2 E(N^2) \end{aligned}$$

şeklinde bulunmuştur. Son olarak varyansın tanımından,

$$\begin{aligned} Var(S_N) &= E(S_N^2) - (E(S_N))^2 = \sigma^2 E(N) + \mu^2 E(N^2) - \mu^2 (E(N))^2 \\ &= \sigma^2 E(N) + \mu^2 [E(N^2) - (E(N))^2] = \sigma^2 E(N) + \mu^2\, Var(N) \end{aligned}$$

elde edilir.

3.4.4 X ve Y nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu, $0 < \rho < 1$ için

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[x^2 + y^2 - 2\rho\, x\, y\right]\right),\ x, y \in \mathbb{R}$$

şeklinde verilmiş olsun.

a) $U = X - \rho Y$ ve $V = Y$ nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

b) $U = X + Y$ ve $V = X - Y$ nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: a) Ters dönüşümler $X = U + \rho V$ ve $Y = V$ olup Jacobien matrisi ve determinantı,

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial U} & \dfrac{\partial X_1}{\partial V} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial U} & \dfrac{\partial Y}{\partial V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \det(J) = 1$$

şeklinde hesaplanmıştır. Buradan U ve V nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[(u+\rho v)^2 + v^2 - 2\rho(u+\rho v)v \right] \right) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[u^2 + v^2(1-\rho^2) \right] \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left(\frac{-u^2}{2(1-\rho^2)} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-v^2}{2} \right) = f_U(u)\, f_V(v) \end{aligned}$$

dir. Görüldüğü gibi, U ve V bağımsız rasgele değişkenlerdir.

b) Ters dönüşümler $X = (U+V)/2$ ve $Y = (U-V)/2$ olup Jacobien matrisi ve determinantı

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial U} & \dfrac{\partial X}{\partial V} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial U} & \dfrac{\partial Y}{\partial V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \det(J) = -\frac{1}{2}$$

dir. Buradan, U ve V nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= \frac{1}{4\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{u+v}{2} \right)^2 + \left(\frac{u-v}{2} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{u+v}{2} \right) \left(\frac{u-v}{2} \right) \right] \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{8(1-\rho^2)} \left[(u+v)^2 + (u-v)^2 - 2\rho(u+v)(u-v) \right] \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{4(1-\rho^2)} \left[u^2(1-\rho^2) + v^2(1+\rho^2) \right] \right) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca, $f_{U,V}(u,v) = f_U(u)\, f_V(v)$ olması için gerek ve yeter koşul $\rho = 0$ olmasıdır.

3.4.5 Bağımsız X_1 ve X_2 rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}1 & , \quad 0<x_1<1 \, , \, 0<x_2<1 \\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

olarak verilsin. $Y_1=(-2\ln(X_1))^{1/2}\cos(2\pi X_2)$ ve $Y_2=(-2\ln(X_1))^{1/2}\sin(2\pi X_2)$ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: Ters dönüşümler,

$$Y_1^2+Y_2^2=-2\ln(X_1)\Rightarrow X_1=e^{-(Y_1^2+Y_2^2)/2}$$

ve

$$\frac{Y_1}{Y_2}=\tan(2\pi X_2)\Rightarrow X_2=\frac{1}{2\pi}arctg\left(\frac{Y_1}{Y_2}\right)$$

olup kısmi türevler,

$$\frac{\partial X_1}{\partial Y_1}=-Y_1\,\mathrm{e}^{-(Y_1^2+Y_2^2)/2} \quad , \quad \frac{\partial X_1}{\partial Y_2}=-Y_2\,\mathrm{e}^{-(Y_1^2+Y_2^2)/2}$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial Y_1}=-\frac{1}{2\pi}\frac{Y_2}{Y_1^2+Y_2^2} \quad , \quad \frac{\partial X_2}{\partial Y_2}=\frac{1}{2\pi}\frac{Y_1}{Y_1^2+Y_2^2}$$

şeklindedir. Buradan Jacobien matrisi ve determinantı ise

$$J=\begin{bmatrix}-Y_1\,\mathrm{e}^{-(Y_1^2+Y_2^2)/2} & -Y_2\,\mathrm{e}^{-(Y_1^2+Y_2^2)/2} \\ -\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{Y_2}{Y_1^2+Y_2^2} & \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{Y_1}{Y_1^2+Y_2^2}\end{bmatrix} \quad , \ \det(J)=-\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-(Y_1^2+Y_2^2)/2}$$

olup Y_1 ve Y_2 nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-(y_1^2+y_2^2)/2} \quad , \quad y_1,y_2\in\mathbb{R}$$

olarak elde edilmiştir. Ayrıca, her $y_1,y_2\in\mathbb{R}$ için

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y_1^2}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y_2^2}=f_{Y_1}(y_1)\,f_{Y_2}(y_2)$$

olduğundan Y_1 ve Y_2 bağımsızdır. Bu dönüşümler (literatürde Box-Müller metodu olarak bilinir) normal dağılımdan veri üretmek için kullanılmaktadır. Monte-Carlo yöntemi tamamen bu dönüşüme dayanır.

3.4.6 $X_1,\ldots,X_n$ bağımsız aynı dağılıma sahip rasgele değişkenleri

$$f(x)=\begin{cases}(1/\lambda)e^{-x/\lambda} & , \quad x>0\\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olsun.

$Y_1=\min\{X_1,\dots,X_n\}$, $Y_2=$ İkinci en küçük$\{X_1,\dots,X_n\}$,
$Y_3=$ Üçüncü en küçük$\{X_1,\dots,X_n\}$ … $Y_n=\max\{X_1,\dots,X_n\}$

olmak üzere, Y_i ve Y_j rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu, $y_i<y_j$ için

$$f_{Y_i,Y_j}(y_i,y_j)=\frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}f_X(y_i)f_X(y_j)\left[F(y_i)\right]^{i-1}$$
$$*[F(y_j)-F(y_i)]^{j-i-1}[1-F(y_j)]^{n-j}$$

ve $Y_1,Y_2\dots,Y_n$ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu da,

$$f_{Y_1,\dots,Y_n}(y_1,\dots,y_n)=\begin{cases}n!\prod_{i=1}^{n}f_{X_i}(y_i) & , \quad y_1<y_2<\dots<y_n\\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

şeklindedir. Buna göre,

a) $R=Y_n-Y_1$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

b) $U_1=Y_1$, $U_2=Y_2-Y_1$, $U_3=Y_3-Y_2$, ..., $U_n=Y_n-Y_{n-1}$ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: a) X in dağılım fonksiyonu, $x>0$ için $F(x)=1-e^{-x/\lambda}$ olup Y_1 ve Y_n rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu (Teorem 6.4.1),

$$f_{Y_1,Y_n}(y_1,y_n)=\frac{n!}{(n-1-1)!}f_X(y_1)f_X(y_n)[F(y_n)-F(y_1)]^{n-2},\ y_1<y_n$$

şeklinde yazılır. Daha açık olarak, Y_1 ve Y_n rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $y_1<y_n$ için,

$$\begin{aligned}f_{Y_1,Y_n}(y_1,y_n)&=n(n-1)f_X(y_1)f_X(y_n)[F(y_n)-F(y_1)]^{n-2}\\&=n(n-1)\lambda^{-2}e^{-(y_1+y_n)/\lambda}[(1-e^{-y_n/\lambda})-(1-e^{-y_1/\lambda})]^{n-2}\\&=n(n-1)\lambda^{-2}e^{-(y_1+y_n)/\lambda}[e^{-y_1/\lambda}-e^{-y_n/\lambda}]^{n-2}\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, R nin olasılık yoğunluk fonksiyonu $r>0$ için,

$$f_R(r)=n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty}\left[F(u+r)-F(u)\right]^{n-2}\,f(u)\,f(u+r)\,du$$

$$=n(n-1)\int_{0}^{\infty}\left[e^{-u/\lambda}-e^{-(u+r)/\lambda}\right]^{n-2}\lambda^{-2}e^{-u/\lambda}e^{-(u+r)/\lambda}\,du$$

$$=n(n-1)\,e^{-r/\lambda}\left[1-e^{-r/\lambda}\right]^{n-2}\lambda^{-2}\int_{0}^{\infty}e^{-(n-2)u/\lambda}e^{-2u/\lambda}du$$

$$=n(n-1)\,e^{-r/\lambda}\left[1-e^{-r/\lambda}\right]^{n-2}\lambda^{-2}\int_{0}^{\infty}e^{-nu/\lambda}du=(n-1)\,\lambda^{-1}\,e^{-r/\lambda}[1-e^{-r/\lambda}]^{n-2}$$

integralinin sonucundan,

$$f_R(r)=\begin{cases}(n-1)\,\lambda^{-1}\,e^{-r/\lambda}\left[1-e^{-r/\lambda}\right]^{n-2} & ,\quad r>0\\ 0 & ,\quad d.y.\end{cases}$$

şeklinde bulunmuştur.

b) Ters dönüşümler,

$$Y_1=U_1,\; Y_2=U_1+U_2,\; Y_3=U_1+U_2+U_3,\;\dots,Y_n=U_1+U_2+\dots+U_n$$

şeklinde olup Jacobien matrisi ve determinantı,

$$J=\begin{bmatrix}1&0&0&.&.&0\\1&1&0&.&.&0\\1&1&1&.&.&.\\.&.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.&.\\1&1&1&1&1&1\end{bmatrix}\quad \text{ve}\ \det(J)=1$$

dir. Dolayısı ile, U_i, $i=1,2,3,\dots,n$ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{U_1,\dots,U_n}(u_1,\dots,u_n)=n!\prod_{i=1}^{n}f_{X_i}(y_i(u_1,\dots,u_n))=n!\,f_X(u_1)\,f_X(u_1+u_2)\dots f_X(u_1+u_2+\dots+u_n)$$

$$=n!\frac{1}{\lambda^n}e^{-nu_1/\lambda}e^{-(n-1)u_2/\lambda}e^{-(n-2)u_3/\lambda}\dots e^{-u_n/\lambda}$$

$$=\frac{n}{\lambda}e^{-nu_1/\lambda}\,\frac{(n-1)}{\lambda}e^{-(n-1)u_2/\lambda}\,\frac{(n-2)}{\lambda}e^{-(n-2)u_3/\lambda}\dots\frac{1}{\lambda}e^{-u_n/\lambda}$$

$$=f_{U_1}(u_1)\,f_{U_2}(u_2)\,f_{U_3}(u_3)\dots f_{U_n}(u_n)$$

şeklindedir. Burada,

$$f_{U_k}(u)=\begin{cases}\dfrac{(n-k+1)}{\lambda}e^{-(n-k+1)\,u/\lambda} & , \quad u>0\\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

olup, $U_1,\ldots,U_n$ rasgele değişkenleri bağımsızdır.

3.4.7 X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak dağılım fonksiyonu,

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & , \quad x,y<0\\ \dfrac{1}{2}\min(x,y)+\dfrac{x^2y}{2} & , \quad 0\le x,y\le 1\\ 1 & , \quad x,y>1\end{cases}$$

olarak verilmiş olsun.

a) X ve Y nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz

b) $P(Y\le 1/2\,|\,X>1/2)$ koşullu olasılığını hesaplayınız.

c) $Z=\min\{X,Y\}$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: a) X ve Y rasgele değişkenlerinin marjinal dağılım fonksiyonları sırası ile,

$$F_X(x)=\lim_{y\to\infty}F_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2}(x+x^2)\ , \quad F_Y(y)=\lim_{x\to\infty}F_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2}(y+y)=y$$

olup marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları da,

$$f_X(x)=\begin{cases}x+(1/2) & , \quad 0<x<1\\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}\ , \qquad f_Y(y)=\begin{cases}1 & , \quad 0<y<1\\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

dir.

b) $P(Y\le 1/2\,|\,X>1/2)$ olasılığı X in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonundan,

$$P(Y\le 1/2\,|\,X>1/2)=\frac{P(Y\le 1/2,\ X>1/2)}{P(X>1/2)}=\frac{P(Y\le 1/2)-P(Y\le 1/2,\ X\le 1/2)}{1-P(X\le 1/2)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{2}-\frac{(1/4)(1/2)}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}}{1-\frac{3}{8}}=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{5}{8}}=\frac{3}{10}=0.3$$

şeklinde hesaplanmıştır.

c) $Z = \min(X,Y)$ rasgele değişkeninin değer kümesi, $D_Z = [0,1]$ olup, dağılım fonksiyonu $z < 0$ için $F_Z(z) = 0$ ve $z > 1$ için $F_Z(z) = 1$ olduğu açıktır. Ayrıca, $0 \le z \le 1$ için dağılım fonksiyonunun değeri de

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z \le z) = P(\min(X,Y) \le z) = P(X \le z \text{ veya } Y \le z) \\
&= P(X \le z) + P(X \le z) - P(X \le z, Y \le z) \\
&= \left(\frac{z+z^2}{2}\right) + (z) - \left(\frac{z+z^3}{2}\right) = \frac{1}{2} z(2-z)(1+z)
\end{aligned}$$

olduğundan Z nin dağılım fonksiyonu ve türevinden olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & , \quad z < 0 \\ \frac{1}{2} z(2-z)(1+z) & , \quad 0 \le z \le 1 \\ 1 & , \quad z > 0 \end{cases} , \quad f_Z(z) = \begin{cases} 1 - z^2 + \frac{z(2-z)}{2} & , \quad 0 < z < 1 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

şeklindedir.

3.4.8 Bağımsız X ve Y sürekli rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonu $F(x)$, olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ olsun.

a) $P(X > Y)$ olasılığını hesaplayınız.

b) X ve Y rasgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonları sırası ile,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & , \quad 0 < x < a \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{b} & , \quad 0 < x < b \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

şeklinde verildiğinde $P(X > Y)$ olasılığını hesaplayınız.

c) $b = a$ ise $Z = X - Y$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: a) Bu olasılık doğrudan,

$$P(X > Y) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X > Y \mid Y = y)\, f(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} P(X > y)\, f(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F(y)) f(y)\, dy$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} F(y)\, f(y)\, dy = 1 - \left. \frac{[F(y)]^2}{2} \right|_{y=-\infty}^{\infty} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

şeklinde bulunmuştur. Rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonları farklı ise,

$$P(X>Y)=\int_{-\infty}^{\infty} P(X>Y\,|\,Y=y)\,f_Y(y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty} P(X>y)\,f_Y(y)\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(1-F_X(y))\,f_Y(y)\,dy=1-\int_{-\infty}^{\infty}F_X(y)\,f_Y(y)\,dy=1-E_Y\left(F_X(Y)\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

olup $P(X>Y)$ olasılığı her iki durumda da aynıdır. Y sürekli rasgele değişken ise, $U=F_X(Y)$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_U(u)=\begin{cases}1 & , \quad 0<u<1\\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

olup $E(U)=1/2$ dır (Örnek 3.1.4).

b) $a>b$ ise (b,a) aralığında, $f_Y(y)=0$ olup, $a>b$ için $P(X>Y)$ olasılığı

$$P(X>Y)=1-\int_0^b F_X(y)\,f_Y(y)\,dy=1-\int_0^b\left(\frac{y}{a}\right)\frac{1}{b}dy=1-\frac{1}{ab}\int_0^b y\,dy=1-\frac{b}{2a}$$

dir. Şimdi, $a\le b$ olsun. Bu durumda (a,b) aralığında $F_X(x)=1$ olup, $a\le b$ için

$$P(X>Y)=1-\int_0^b F_X(y)\,f_Y(y)\,dy=1-\int_0^b\left(\frac{y}{a}\right)\frac{1}{b}dy=1-\int_0^a\left(\frac{y}{a}\right)\frac{1}{b}dy-\int_a^b 1.\,f_Y(y)\,dy$$

$$=1-\frac{1}{ab}\int_0^a y\,dy-\frac{1}{b}\int_a^b dy=\frac{a}{2b}$$

dir.

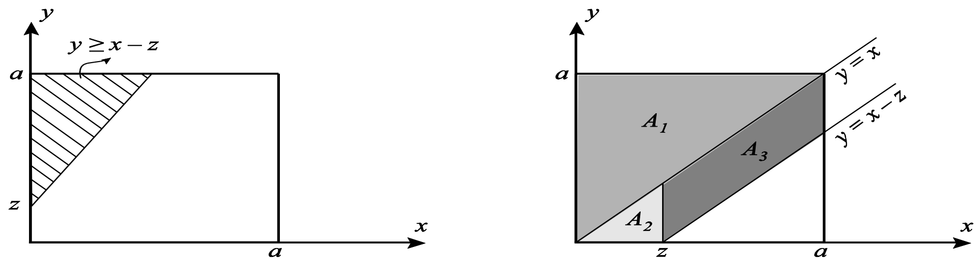
c) $b=a$ ise bağımsız X ve Y değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2} & , \quad 0<x,y<a\\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

şeklindedir. Buradan, $D_Z=[-a,a]$ olup Z nin dağılım fonksiyonu $z<-a$ için $F_Z(z)=0$ ve $z>a$ için $F_Z(z)=1$ dir. Ayrıca, $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X-Y\le z)$ olup iki durum ayrı ayrı incelenmelidir. $-a<z\le 0$ için $F_Z(z)$ değeri (şekildeki taralı alan)

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X-Y\le z)=\int_{-z}^{a}\int_{0}^{y+z}\frac{1}{a^2}\,dx\,dy=\frac{1}{a^2}\int_{-z}^{a}(y+z)\,dy=\frac{(a+z)^2}{2a^2}$$

olur.



Şekil 3.4.1 Problem (3.4.8) için fonksiyonun tanım bölgeleri

$0 < z \le a$ aralığında dağılım fonksiyonunun değeri için Şekil (3.4.1) de gösterilen A_i bölgelerinin alanlarının bulunması gerekir. Şekilden de görüldüğü gibi, dağılım fonksiyonu aşağıda belirtilen alanların toplamıdır. Yani,

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X - Y \le z) = (A_1 + A_2 + A_3)/a^2$$

dir. Şekildeki bölgelerin alanları (A_1, A_2 ve A_3 bölgeleri)

$$Alan(A_1) = a^2/2\,,\quad Alan(A_2) = z^2/2 \quad \text{ve} \quad Alan(A_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} z\sqrt{2(a-z)^2} = z(a-z)$$

olarak hesaplanmıştır.

$F_Z(z) = (A_1 + A_2 + A_3)/a^2$ olasılığından $F_Z(z)$ nin değeri $0 < z \le a$ için,

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X - Y \le z) = (A_1 + A_2 + A_3)/a^2 = \frac{1}{a^2}\Big((a^2/2) + (z^2/2) + z(a-z)\Big)$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\frac{a^2 + z^2 + 2z(a-z)}{2}\right) = \frac{(a+z)^2 - 2z^2}{2a^2}$$

dir. İki sonuç birleştirildiğinde, Z nin dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & , \quad z < -a \\ \dfrac{(a+z)^2}{2a^2} & , \quad -a \le z < 0 \\ \dfrac{(a+z)^2 - 2z^2}{2a^2} & , \quad 0 \le z < a \\ 1 & , \quad z \ge a \end{cases} \quad , \quad f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{(a+z)}{a^2} & , \quad -a < z < 0 \\ \dfrac{(a-z)}{a^2} & , \quad 0 < z < a \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

şeklinde elde edilmiştir.

3.4.9 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dağılım fonksiyonu $F(x)$ olan aynı dağılımlı bağımsız rasgele değişkenler olsun.

$$I(X_i \le t) = \begin{cases} 1 & , \quad X_i \le t \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olmak üzere,

$$\hat{F}_n(t) = \sum_{i=1}^{n} I(X_i \le t)$$

şeklinde verilen $\hat{F}_n(t)$ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: $\hat{F}_n(t)$, değer kümesi $\{0,1,2,3,...,n\}$ olan kesikli bir rasgele değişkendir. $I(X_i \le t)$ ler sadece 0 ve 1 değerlerini alan bağımsız rasgele değişkenler olup,

$$P(I(X_i \le t) = 1) = P(X_i \le t) = F(t)$$

ve

$$P(I(X_i \le t) = 0) = P(X_i > t) = 1 - P(X_i \le t) = 1 - F(t)$$

dir. $p = F(t)$ ve $Y_i = I(X_i \le t)$ denirse, Y_i rasgele değişkenlerinin olasılık fonksiyonu,

$$P(Y_i = y) = p^y (1-p)^{1-y} \quad , \ y = 0,1$$

şeklinde olup moment çıkaran fonksiyonu da $q = 1-p$ olmak üzere $M_Y(t) = q + pe^t$ dir. Buradan, Y_i ler bağımsız ve $\hat{F}_n(t) = \sum_{i=1}^{n} I(X_i \le t) = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ olduğundan, $\hat{F}_n(t)$ rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_{\hat{F}_n(t)}(t) = M_{Y_1+Y_2+...+Y_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{Y_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} (q + pe^t) = (q + pe^t)^n$$

dir. Bu fonksiyon da olasılık fonksiyonu,

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad , x = 0,1,2,...,n$$

olan bir X rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonudur. O halde, $\hat{F}_n(t)$ nin olasılık fonksiyonu ile, X in olasılık fonksiyonu aynıdır.

3.4.10 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ olasılık fonksiyonu, $0 < p < 1$ ve $q = 1-p$ için,

$$P(X = x) = p\, q^{x-1}, x = 1,2,3,...$$

olan bağımsız aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler olsun. $U = X_1 + X_2 + \ldots + X_r$ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: X_i lerin moment çıkaran fonksiyonu $q < e^{-t}$ için

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_{x=1}^{\infty}e^{tx}P(X=x)=\sum_{x=1}^{\infty}e^{tx}p\,q^{x-1}=\frac{p}{q}\sum_{x=1}^{\infty}(qe^t)^x$$
$$=\frac{p}{q}\left[\sum_{x=0}^{\infty}(qe^t)^x-1\right]=\frac{p}{q}\left[\frac{1}{1-qe^t}-1\right]=\frac{p}{q}\left[\frac{qe^t}{1-qe^t}\right]=\frac{pe^t}{1-qe^t}$$

olup X_i ler bağımsız olduğundan, U nun moment çıkaran fonksiyonu da

$$M_U(t)=E(e^{tU})=E(e^{t(X_1+\ldots+X_r)})=\prod_{i=1}^{r}M_{X_i}(t)=[pe^t/(1-qe^t)]^r$$

şeklindedir.

Şimdi herhangi bir Y rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$P(Y=y)=\binom{y+r-1}{r-1}p^r q^y\ ,\ y=0,1,2,3,...$$

olarak verilsin. Bu olasılık fonksiyonu,

$$P(Y=y)=\binom{y-1}{r-1}p^r q^{y-r}\ ,\ y=r,r+1,r+2,...$$

olarak yazıldığında, Y nin moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_Y(t)=E\left(e^{tY}\right)=\sum_{y=r}^{\infty}e^{ty}P(Y=y)=\sum_{y=r}^{\infty}e^{ty}\binom{y-1}{r-1}p^r q^{y-r}=p^r\sum_{y=r}^{\infty}e^{ty}\binom{y-1}{r-1}q^{y-r}$$
$$=\left(\frac{p}{q}\right)^r\sum_{y=r}^{\infty}\binom{y-1}{r-1}\left(qe^t\right)^y=\left(\frac{p}{q}\right)^r\left(\frac{qe^t}{1-qe^t}\right)^r=\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r$$

şeklinde olup, U rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu ile aynıdır. Buradan, $U=X_1+X_2+\ldots+X_r$ ile Y nin olasılık fonksiyonları aynıdır. Yani, U rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$P(U=u)=\binom{u-1}{r-1}p^r q^{u-r}\ ,\ u=r,r+1,r+2,...$$

dır (bu olasılık fonksiyonu beşinci bölümde bahsedilecek olan özel dağılımlardan biridir).

4.3. Çözümlü Problemler

4.3.1 $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere, bu a_i reel sayılarının aritmetik, geometrik ve harmonik ortalamaları

$$a_A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\ ,\qquad a_G=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{1/n},\qquad a_H=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^{-1}$$

şeklinde hesaplanır. $a_H \le a_G \le a_A$ olduğunu gösteriniz (Casella ve Berger (2002), sayfa 191).

Çözüm: Değer kümesi $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ olan herhangi bir X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$P(X = a_i) = \frac{1}{n}\ , i = 1, 2, 3, ..., n$$

olarak verilmiş olsun. $g(x) = \log(x)$ fonksiyonu konkavdır ($g''(x) = -1/x^2$ olup her zaman negatiftir). Bu durumda, X rasgele değişkeninin beklenen değeri

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, P(X = a_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = a_A$$

olup

$$\log(a_G) = \log\left(\left[\prod_{i=1}^{n} a_i\right]^{1/n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(a_i) = E\left(\log(X)\right)$$

ve

$$\log\left(E(X)\right) = \log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \log(a_A)$$

dir. Jensen eşitsizliğine göre, $E(\log(X)) \ge \log(E(X))$ olduğundan,

$$\log(a_G) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(a_i) = E(\log(X)) \le \log(E(X)) = \log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \log(a_A)$$

yazılabilir. Yani, $\log\left(a_G\right) \le \log(a_A)$ eşitsizliği elde edilir. Logaritma fonksiyonunun özelliğinden ise $a_G \le a_A$ dir. Yine $g(x) = \log(x)$ fonksiyonunun konkav olduğundan,

$$\log(1/a_H) = \log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) = \log\left(E\left(\frac{1}{X}\right)\right) \ge E\left(\log\left(\frac{1}{X}\right)\right) = -E(\log(X))$$

Eşitsizliği yazılır. $\log\left(a_G\right) = E\left(\log(X)\right)$ olup $-E(\log(X)) = -\log(a_G) = \log(1/a_G)$ dir. Yani, $\log(1/a_H) \ge \log(1/a_G)$ olup logaritmanın özelliğinden, $(1/a_H) \ge (1/a_G)$ yani, $a_H \le a_G$ elde edilir. Bu iki eşitsizlik birleştirildiğinde $a_H \le a_G \le a_A$ elde edilir.

4.3.2 Sonlu beklenen değere sahip bir rasgele değişken X olsun. $E(X) = \mu$ ve g de azalmayan konveks bir fonksiyon ise, $E(g(X)(X - \mu)) \ge 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: X in olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ olsun (kesikli ise integral yerine toplam gelir). $g(x)$ konveks olduğundan Jensen eşitsizliğine göre, $E\big(g(X)\big) \geq g\big(E(X)\big)$ dir. Ayrıca, $g(x)$ azalmayan ($x \leq y$ ise, $g(x) \leq g(y)$) olduğundan,

$$\begin{aligned}
E\big(g(X)(X-\mu)\big) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)(x-\mu)\, f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} g(x)(x-\mu)\, f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} g(x)(x-\mu)\, f(x)\,dx \\
&\geq \int_{-\infty}^{0} g(\mu)(x-\mu)\, f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} g(\mu)(x-\mu)\, f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(\mu)(x-\mu)\, f(x)\,dx = g(\mu)E\big((X-\mu)\big) = 0
\end{aligned}$$

şeklinde aranan eşitsizlik elde edilir.

$X \geq 1$ olacak şekilde bir rasgele değişken için, $E(X^{n+1}) \geq E(X)\,E(X^n)$ eşitsizliği $E\big(g(X)(X-\mu)\big) \geq 0$ nin bir sonucu olarak elde edilir. Bunun için $g(x) = x^n$ denirse, $g''(x) = n(n-1)\,x^{n-2} > 0$ olup $g(x) = x^n$ konveks ve $x \geq 1$ için azalmayandır. Yukarıdaki eşitsizlik $g(x) = x^n$ fonksiyonuna uygulandığında,

$$\begin{aligned}
0 \leq E(g(X)(X-\mu)) = E(X^n(X-\mu)) &= E(X^{n+1}) - \mu E(X^n) \\
&= E(X^{n+1}) - E(X)\,E(X^n)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$0 \leq E(X^{n+1}) - E(X)\,E(X^n) \Rightarrow E(X^{n+1}) \geq E(X)\,E(X^n)$$

eşitsizliği yazılır. Yani, $E(X^{n+1}) \geq E(X)\,E(X^n)$ dir.

4.3.3 X sürekli bir rasgele değişken ve $E(X) = 0$, $Var(X) = \sigma^2$ olsun. Buna göre,

a) $\lambda < 0$ ise $P\big(X \leq \lambda\big) \leq \sigma^2 / (\sigma^2 + \lambda^2)$

b) $\lambda \geq 0$ ise $P\big(X \leq \lambda\big) \leq 1 - \sigma^2 / (\sigma^2 + \lambda^2)$

eşitsizliklerinin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Sorunun çözümüne geçmeden önce $\lambda,\, t > 0$ olmak üzere önce

$$P\big(X \geq \lambda\big) \leq E(X+t)^2 / \big(\lambda + t\big)^2$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterelim. Buradaki beklenen değer

$$E(X+t)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x+t)^2 f(x)\,dx \geq \int_{\lambda}^{\infty} (x+t)^2 f(x)\,dx$$

$$\geq \int_{\lambda}^{\infty} (\lambda+t)^2 f(x)\,dx = (\lambda+t)^2 \int_{\lambda}^{\infty} f(x)\,dx = (\lambda+t)^2 P(X \geq \lambda)$$

şeklinde yazılabildiğinden, $P(X \geq \lambda) \leq E(X+t)^2 / (\lambda+t)^2$ bulunur. Bu eşitsizlik yardımı ile istenen eşitsizlikler kolayca gösterilir.

a) $\lambda < 0$ ise $-\lambda > 0$ olup,

$$P\left(X \leq \lambda\right) = P\left(-X \geq -\lambda\right) \leq E\left(-X+t\right)^2 / \left(-\lambda+t\right)^2$$

eşitsizliği yazılır. Buradan, $t = -\sigma^2 / \lambda$ için $E(X) = 0$ ve $Var(X) = \sigma^2$ olduğundan,

$$P\left(X \leq \lambda\right) = P\left(-X \geq -\lambda\right) \leq \frac{E(-X-\sigma^2/\lambda)^2}{(-\lambda-\sigma^2/\lambda)^2} = \frac{E(X^2)+\sigma^2 E(X)/\lambda+(\sigma^4/\lambda^2)}{(\lambda^2+\sigma^2)^2/\lambda^2}$$

$$= \frac{\sigma^2\lambda^2+\sigma^4}{(\lambda^2+\sigma^2)^2} = \frac{\sigma^2(\lambda^2+\sigma^2)}{(\lambda^2+\sigma^2)^2} = \frac{\sigma^2}{(\lambda^2+\sigma^2)}$$

şeklinde aranan eşitsizlik elde edilmiş olur.

b) $\lambda \geq 0$ olsun. X sürekli olduğundan $P(X > \lambda) = P(X \geq \lambda)$ dir (kesikli ise $P(X > \lambda) \leq P(X \geq \lambda)$ dir). Buradan,

$$P\left(X \leq \lambda\right) = 1 - P\left(X > \lambda\right) \geq 1 - P(X \geq \lambda) \geq 1 - E(X+t)^2 / (t+\lambda)^2$$

eşitsizliğinde $t = \sigma^2 / \lambda$ yazıldığında aranan eşitsizlik,

$$P\left(X \leq \lambda\right) \geq 1 - \frac{E\left(X^2\right)+\sigma^2 E(X)/\lambda+\left(\sigma^4/\lambda^2\right)}{\left(\lambda^2+\sigma^2\right)^2/\lambda^2} = 1 - \frac{\sigma^2\lambda^2+\sigma^4}{\left(\lambda^2+\sigma^2\right)^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{(\lambda^2+\sigma^2)}$$

şeklinde elde edilir.

Burada, $t = \sigma^2 / \lambda$ alınmasının nedeni, $E(X+t)^2 / (t+\lambda)^2$ oranının bu noktada minimum olmasıdır. Yani, $E(X+t)^2 / (t+\lambda)^2$ fonksiyonu (t fonksiyonudur) $t = \sigma^2 / \lambda$ noktasında minimumdur. $E(X) = 0$ ve $Var(X) = \sigma^2$ olduğundan,

$$E(X+t)^2 / (\lambda+t)^2 = (\sigma^2+t^2) / (\lambda+t)^2$$

olup,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{E(X+t)^2}{(\lambda+t)^2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma^2+t^2}{(\lambda+t)^2}\right)=\frac{2\left(\lambda t-\sigma^2\right)}{(\lambda+t)^2}=0 \Rightarrow t=\frac{\sigma^2}{\lambda}$$

bulunur. İkinci türev bu noktada

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{E(X+t)^2}{(\lambda+t)^2}\right)_{t=\frac{\sigma^2}{\lambda}}=\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sigma^2+t^2}{(\lambda+t)^2}\right)_{t=\frac{\sigma^2}{\lambda}}>0$$

pozitif olup, $E(X+t)^2/(t+\lambda)^2$ oranının $t=\sigma^2/\lambda$ noktasında minimum olduğu görülür.

4.3.4 Markov eşitsizliğini kullanılarak, $0<p<1$ için $(1-p)^n \le 1/(np)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Kesikli bir X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu $q=1-p$ olmak üzere,

$$P(X=x)=p\,q^{x-1}\ ,\ x=1,2,3,...$$

şeklinde verilmiş olsun. Bu durumda, $E(X)=1/p$ ve $P(X>n)$ olasılığı,

$$\begin{aligned}P(X>n)&=1-P(X\le n)=1-\sum_{x=1}^{n}P(X=x)=1-\sum_{x=1}^{n}p\,q^{x-1}=1-p\sum_{x=0}^{n-1}q^x\\&=1-p\frac{1-q^n}{1-q}=1-p\frac{1-q^n}{p}=q^n=(1-p)^n\end{aligned}$$

dir. Markov eşitsizliğinden,

$$(1-p)^n=P(X>n)\le E(X)/n=1/(np) \text{ veya } (1-p)^n\le 1/(np)$$

şeklinde aranan eşitsizlik elde edilir.

Aynı olasılık fonksiyonu kullanılarak Jensen eşitsizliğine göre $0<p<1$ için $\log(p)\le(p-1)$ eşitsizliği de yazılabilir. Bunun için $x>0$ için $g(x)=1/x$ fonksiyonu konveks olup, Jensen eşitsizliğine göre $E(1/X)\ \ge 1/E(X)$ dir. $g(X)=1/X$ in beklenen değeri

$$E\left(\frac{1}{X}\right)=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x}P(X=x)=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{p\,q^{x-1}}{x}=p\sum_{x=1}^{\infty}\frac{q^{x-1}}{x}=p\left(-\frac{\log(1-q)}{q}\right)=-\frac{p}{q}\log(p)$$

olup, $E(X)=1/p$ dir. Yani, Jensen eşitsizliğinden $E(1/X)\ \ge 1/E(X)$ olup,

$$E\left(\frac{1}{X}\right)=-\frac{p}{q}\log(p)\ \ge \frac{1}{E(X)}=\frac{1}{1/p}=p$$

elde edilir. Buradan da, $-(p/q)\ \log(p)\ \ge\ p$ dir. Ayrıca,

$$-(p/q)\log(p) \geq p \Rightarrow -\log(p) \geq q \Rightarrow \log(p) \leq -q = -(1-p) = p-1$$

olduğundan $\log(p) \leq (p-1)$ elde edilir.

4.3.5 a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $(n+1) \leq 2e^{n}/n$ olduğunu gösteriniz.

b) Her $n \in \mathbb{N}$ için $(1/2^{n-1}) \leq (1/n)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: a) X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olarak verilmiş olsun. Buna göre,

$$P(X > n) = \int_{x=n}^{\infty} x\, e^{-x} dx = (-x\, e^{-x} - e^{-x}) \Big|_{x=n}^{\infty} = n\, e^{-n} + e^{-n}$$

dir. Ayrıca, $E(X) = \Gamma(3) = 2$ olup Markov eşitsizliğinden,

$$n\, e^{-n} + e^{-n} = P(X > n) \leq E(X)/n = 2/n$$

eşitsizliği yazılır. Eşitsizlik biraz daha düzenlendiğinde

$$e^{-n}(n+1) \leq 2/n \text{ veya } (n+1) \leq 2e^{n}/n$$

şeklinde aranan eşitsizlik elde edilir.

b) X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu, $P(X = x) = 1/2^{x}$, $x = 1, 2, 3, \ldots$ şeklinde verilmiş olsun. $P(X > n)$ olasılığı,

$$P(X > n) = \sum_{x=n+1}^{\infty} P(X = x) = \sum_{x=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{x}} = \frac{1}{2^{n}}$$

dir. Ayrıca,

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x\, P(X = x) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x}{2^{x}} = 2$$

olup yine Markov eşitsizliğinden,

$$1/2^{n} = P(X > n) \leq E(X)/n = 2/n \text{ veya } (1/2^{n-1}) \leq (1/n)$$

eşitsizliği elde edilir.

4.3.6 Sonlu beklenen değere sahip herhangi iki rasgele değişken X ve Y olsun. Buna göre,

a) $E(\min\{X,Y\}) \le \min\{E(X),E(Y)\}$ b) $E(\max\{X,Y\}) \ge \max\{E(X),E(Y)\}$

c) $E(\min\{X,Y\}+\max\{X,Y\}) = E(X)+E(Y)$

eşitsizliklerinin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Önce,

$\min\{X,Y\} = 0.5[(X+Y) - |X-Y|]$ ve $\max\{X,Y\} = 0.5[(X+Y) + |X-Y|]$

olduğunu hatırlayalım. $g(x) = |x|$ fonksiyonu konveks olup Jensen eşitsizliğinden, $|E(X-Y)| \le E(|X-Y|)$ dir. Buradan da $-E(|X-Y|) \ge -|E(X-Y)|$ olup

$$-E\left(|X-Y|\right) \le -|E(X-Y)| = -|E(X)-E(Y)|$$

eşitsizliği yazılabilir. Şimdi eşitsizliklerin ispatına geçebiliriz.

a) $\min\{X,Y\}$ nin ifadesi Jensen eşitsizliği ile beraber kullanıldığında ($g(x) = |x|$ fonksiyonu konvekstir),

$$\begin{aligned} E(\min\{X,Y\}) &= 0.5\left[E(X+Y) - E(|X-Y|)\right] \\ &\le 0.5[E(X)+E(Y) - |E(X)-E(Y)|] = \min\{E(X),E(Y)\} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani, $E(\min\{X,Y\}) \le \min\{E(X),E(Y)\}$ dir.

b) Benzer şekilde $\max\{X,Y\}$ nin yukarıdaki ifadesi Jensen eşitsizliği ile beraber kullanıldığında,

$$\begin{aligned} E(\max\{X,Y\}) &= 0.5[E(X+Y) + E(|X-Y|)] \\ &\ge 0.5[E(X)+E(Y) + |E(X)-E(Y)|= \max\{E(X),E(Y)\} \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısı ile, $E(\max\{X,Y\}) \ge \max\{E(X),E(Y)\}$ dir.

c) $\min\{X,Y\}+\max\{X,Y\} = X+Y$ olduğundan, kolayca görüleceği gibi

$$E(\min\{X,Y\}+\max\{X,Y\}) = E(X+Y) = E(X)+E(Y)$$

dir.

4.3.7 Değer kümesi $D_X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ olan X herhangi bir kesikli rasgele değişken, f ve g azalmayan fonksiyonlar olsun. Bu durumda $E[f(X)]E[g(X)] \le E[f(X)g(X)]$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: X in olasılık fonksiyonu, $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$ için $P(X = x_i) = p_i$ olsun. Buradan eşitsizliğin ispatı için,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)P(X=x_k)\right)\left(\sum_{k=1}^{n} g(x_k)P(X=x_k)\right) \le \left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)g(x_k)P(X=x_k)\right)$$

olduğunun gösterilmesi gerekir. f ve g azalmayan fonksiyonlar olduğundan $1 \leq j \leq n$ ve $1 \leq k \leq n$ için $0 \leq \{f(x_k) - f(x_j)\}\{g(x_k) - g(x_j)\}$ dir. Buradan da,

$$f(x_k)g(x_j) + f(x_j)g(x_k) \leq f(x_j)g(x_j) + f(x_k)g(x_k)$$

yazılabilir. $P(X = x_i) = p_i \geq 0$ olduğundan, eşitsizliğin sol tarafı $P(X = x_j)P(X = x_k)$ ile çarpılıp toplandığında

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)g(x_j) + f(x_j)g(x_k)]P(X = x_j)P(X = x_k)$$

$$= 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)g(x_j)\,P(X = x_j)P(X = x_k)$$

$$= 2\left(\sum_{j=1}^{n} f(x_j)P(X = x_k)\right)\left(\sum_{k=1}^{n} g(x_k)P(X = x_k)\right) = \left[E(f(X))\right]\left[E(g(X))\right]$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde, yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı kullanıldığında

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[f(x_j)g(x_j) + f(x_k)g(x_k)]P(X = x_k)P(X = x_j)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}[f(x_k)g(x_k)]P(X = x_k)\sum_{j=1}^{n} P(X = x_j) + \sum_{j=1}^{n}[f(x_j)g(x_j)]P(X = x_j)\sum_{k=1}^{n} P(X = x_k)$$

$$= 2\sum_{j=1}^{n}[f(x_j)g(x_j)]P(X = x_j) = 2E[f(X)g(X)]$$

eşitliği elde edilir. Buradan da, bu iki eşitlik

$$f(x_k)g(x_j) + f(x_j)g(x_k) \leq f(x_j)g(x_j) + f(x_k)g(x_k)$$

eşitsizliğinde kullanıldığında, $E[f(X)]E[g(X)] \leq E[f(X)\,g(X)]$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik literatürde, *Chebyshev Lemması* olarak bilinir (Chebyshev eşitsizliği ile karıştırılmasın). Fonksiyonlardan biri azalmayan diğer artmayan ise eşitsizlik yön değiştirir.

4.3.8. Beklenen değeri sıfır, varyansı σ^2 olan bağımsız rasgele değişkenler $e_1, e_2, ..., e_n$ olsun ($E(e_i) = 0$ ve $Var(e_i) = \sigma^2$). $x_i, i = 1, 2, 3, ..., n$ rasgele olmayan değişkenler olmak üzere, $Y_i = \beta x_i + e_i$, $i = 1, 2, 3, ..., n$ modelini göz önüne alalım. Buradan,

$$\hat{\beta}_1 = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i \qquad \hat{\beta}_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]^{-1}\sum_{i=1}^{n} Y_i \qquad \hat{\beta}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i / x_i)$$

rasgele değişkenlerinin varyansları sırası ile,

$$Var\left(\hat{\beta}_1\right)=\sigma^2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{-1},\ Var\left(\hat{\beta}_2\right)=n\sigma^2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^{-2},\ Var\left(\hat{\beta}_3\right)=\frac{\sigma^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}$$

dir. Bu varyansları küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Çözüm: Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{-1} \le n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^{-2} \quad \text{ve} \quad \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{-1} \le \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}$$

olduğunu biliyoruz (Örnek (4.2.1)). Buradan $Var(\hat{\beta}_1)\le Var(\hat{\beta}_2)$ ve $Var(\hat{\beta}_1)\le Var(\hat{\beta}_3)$ dir. Yani, $Var(\hat{\beta}_1)$ diğer iki varyansdan da küçüktür. $Var(\hat{\beta}_2)$ ve $Var(\hat{\beta}_3)$ arasındaki sıralamaya bakalım. X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$P(X=x_i)=\frac{1}{n},\ i=1,2,3,...,n$$

olarak verilmiş olsun. Buna göre, $g(x)=1/x^2$ fonksiyonu konvekstir. Jensen eşitsizliğinden $E(g(X))\ge g(E(X))$ olup beklenen değerler,

$$E\left(g(X)\right)=\sum_{i=1}^{n}g(x_i)P(X=x_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2} \quad \text{ve} \quad E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i\,P(X=x_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

şeklinde hesaplanmıştır. Jensen eşitsizliğine göre,

$$E\left(g(X)\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2} \ \ge\ g\left(E(X)\right)=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^{-2}=n^2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^{-2}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2} \ge n^2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^{-2} \Rightarrow n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^{-2} \le \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}$$

bulunur. Yani, $Var(\hat{\beta}_2)\le Var(\hat{\beta}_3)$ dır. Bu eşitsizlikler birleştirildiğinde,

$$Var\left(\hat{\beta}_1\right)=\sigma^2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{-1} \le Var\left(\hat{\beta}_2\right)=n\sigma^2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^{-2} \le \frac{\sigma^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}=Var\left(\hat{\beta}_3\right)$$

sıralaması elde edilir. Yani, $Var(\hat{\beta}_1)\le Var(\hat{\beta}_2)\le Var(\hat{\beta}_3)$ dir.

4.3.9 X ve Y rasgele değişkenleri için $E(X)=E(Y)=0$, $Var(X)=Var(Y)=1$ ve X ile Y arasındaki korelasyon ρ olsun. Bu durumda,

$$E(\max\{X^2, Y^2\}) \le 1 + \sqrt{1-\rho^2}$$

olduğunu gösteriniz (Öztürk, 1993, sayfa 298).

Çözüm: Önce, Problem (4.3.7) de verilen $\max\{X,Y\} = 0.5\,[(X+Y) + |X-Y|]$ ifadesi X^2 ve Y^2 rasgele değişkenleri için

$$\max\{X^2, Y^2\} = 0.5[(X^2+Y^2) + |X^2 - Y^2|]$$

şeklinde düzenlendiğinde, $X^2 - Y^2 = (X-Y)(X+Y)$ olup Cauchy-Schwartz eşitsizliği de X^2 ve Y^2 rasgele değişkenleri için,

$$[E(|X^2 - Y^2|)]^2 \le [E(|X-Y|)^2][E(|X+Y|)^2]$$

şeklinde yazılır. Buradan da,

$$\begin{aligned} E(\max\{X^2, Y^2\}) &= \frac{1}{2}[E(X^2+Y^2) + E(|X^2-Y^2|)] \\ &\le \frac{1}{2}[E(|X^2-Y^2|) + 2] \le 1 + \frac{1}{2}\sqrt{E((X-Y)^2)E((X+Y)^2} \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılmış olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} &E((X-Y)^2)E((X+Y)^2) \\ &= [E(X^2) - 2E(XY) + E(Y^2)][E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2)] \\ &= (2-2\rho)(2+2\rho) = 4(1-\rho^2) \end{aligned}$$

dir. Dolayısı ile aranan eşitsizlik,

$$E\left(\max\left\{X^2, Y^2\right\}\right) \le 1 + \frac{1}{2}\sqrt{E\left((X-Y)^2\right)E\left((X+Y)^2\right)} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{4\left(1-\rho^2\right)} = 1 + \sqrt{1-\rho^2}$$

den $E(\max\{X^2, Y^2\}) \le 1 + \sqrt{1-\rho^2}$ olarak bulunmuş olur.

4.3.10 X ve Y aralarındaki korelasyon ρ olan herhangi iki rasgele değişken olsun. $\lambda > 0$ için $E(X) = \mu_x$, $E(Y) = \mu_y$, $Var(X) = \sigma_x^2$ ve $Var(Y) = \sigma_y^2$ olmak üzere,

$$P\left(|X - \mu_x| \ge \lambda\sigma_x \text{ veya } |Y - \mu_y| \ge \lambda\sigma_y\right) \le \frac{1}{\lambda^2}\left(1 - \sqrt{1-\rho^2}\right)$$

olduğunu gösteriniz (Öztürk, 1993, sayfa 299).

Çözüm: Eşitsizliğin sol tarafındaki olasılık açık olarak

$$P\left(\left|X-\mu_x\right|\geq \lambda\sigma_x \text{ veya } \left|Y-\mu_y\right|\geq \lambda\sigma_y\right)$$

$$=P\left(\left(\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\geq\lambda^2 \text{ veya } \left(\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\geq\lambda^2\right)=P\left(\max\left\{\left(\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2,\left(\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right\}\geq\lambda^2\right)$$

şeklinde yazılır. Markov eşitsizliğinden de,

$$P\left(\max\left\{\left(\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2,\left(\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right\}\geq\lambda^2\right)\leq\frac{1}{\lambda^2}E\left(\max\left\{\left(\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2,\left(\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right\}\right)$$

$$\leq\frac{1}{\lambda^2}\left(1-\sqrt{1-\rho^2}\right)$$

bulunur. Böylece,

$$P(|X-\mu_x| \text{ veya } |Y-\mu_y|\geq\lambda\sigma_y\leq(1-\sqrt{1-\rho^2}\ )/\lambda^2$$

eşitsizliği elde edilmiş olur.