HAFTA 2

5.2.5. Normal Dağılım

İstatistikte ve bir çok bilim alanında kuşkusuz en çok kullanılan normal dağılımdır. Bunun nedenlerinden biri, bir sonraki bölümde inceleyeceğimiz merkezi limit teoremi ile ilgilidir. Merkezi limit teoremine göre, ortalamada hemen hemen bütün dağılımlar normal dağılıma yakınsar. Kitlelerin bilinmeyenleri hakkında istatistiki sonuç çıkarım için verilerin normallik varsayımı olmazsa olmaz koşullardan biridir. Normallik özelliğinin sağlanmadığı durumlarda değişik teknikler ile normallik varsayımı sağlatılmaya çalışılır. Normallik varsayımı sağlandıktan sonra analizlerin ve devamında istatistiki sonuç çıkarımların yapılması gerekir. Normal dağılımın uygulamada önemi hakkında ne yazılırsa yazılsın yine de eksik kalan bir şeyler mutlaka olacaktır.

X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $\mu \in \mathbb{R}$, ve $\sigma \in \mathbb{R}^+$ için,

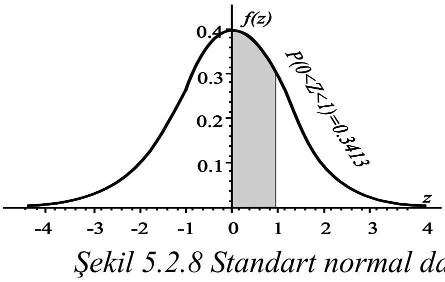
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,\sigma^2}}\; e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \qquad , x \in \mathbb{R}$$

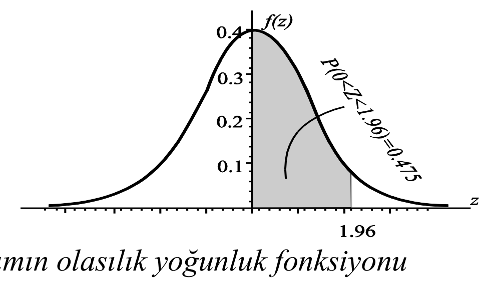
şeklinde ise X e beklenen değeri μ, varyansı σ^2 olan *normal dağılıma sahiptir* denir ve $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ile gösterilir.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ise $Z = (X - \mu)/\sigma$ rasgele değişkeni beklenen değeri 0, varyansı 1 olan standart normal dağılıma sahiptir ve $Z \sim N(0,1)$ şeklinde ifade edilir. Standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu da,

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\; e^{-z^2/2} \qquad , z \in \mathbb{R}$$

şeklindedir. Standart normal dağılımın olasılıkları için tablolar düzenlenmiştir. Bu tablolar hemen hemen bütün istatistik kitaplarında bulunmaktadır. Örneğin $Z \sim N(0,1)$ için $P(0 < Z < 1)$ olasılığı normal dağılım tablosundan 0.3413 olarak bulunur. Bu olasılık Şekil (5.2.8) de gösterilen taralı bölgenin alanıdır.





Şekil 5.2.8 Standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

Standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu sıfır noktasına göre simetriktir. Dolayısı ile, $P(-1<Z<0)$ ile $P(0<Z<1)$ olasılıkları aynıdır.

Bir h fonksiyonu tanımlı olduğu her x için $h(-x)=h(x)$ özelliğini sağlıyorsa çift, $h(-x)=-h(x)$ ise tektir. İki çift fonksiyonun çarpımı çift, iki tek fonksiyonun çarpımı da çift olup, tek bir fonksiyon ile çift bir fonksiyonun çarpımı tektir. Buna göre,

$$h(z)=e^{-z^2/2}=e^{-(-z)^2/2}=h(-z)$$

olduğundan $h(z)=e^{-z^2/2}$ fonksiyonu çifttir. Ayrıca, $g(z)=z$ fonksiyonu ise $g(-z)=-z$ $=-g(z)$ olduğundan tektir. Buradan $a>0$ olmak üzere herhangi bir f fonksiyonu için

$$\int_{-a}^{a} f(z)\,dz=\begin{cases} 0 & , \ f \text{ tek bir fonksiyon} \\ 2\int_{0}^{a} f(z)\,dz & , \ f \text{ çift bir fonksiyon} \end{cases}$$

eşitliği yazılabilir. $f(z)=z\,e^{-z^2/2}$ fonksiyonu tek olduğundan,

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{\infty} z\,f(z)\,dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z\,e^{-z^2/2}dz=0$$

dır. Dağılımın ikinci momenti ise,

$$E(Z^2)=\int_{-\infty}^{\infty} z^2\,f(z)\,dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z^2\,e^{-z^2/2}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} z^2\,e^{-z^2/2}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=1$$

dir (Maple VIII). Buradan standart normal dağılımın varyansı da,

$$Var(Z)=E(Z^2)-(E(Z))^2=1$$

olur. $Z=(X-\mu)/\sigma$ ise $X=\mu+\sigma Z$ olduğundan, $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ dağılımının beklenen değer ve varyansı,

$$E(X)=E(\mu+\sigma Z)=\mu+\sigma E(Z)=\mu \text{ ve } Var(X)=Var(\mu+\sigma Z)=\sigma^2\,Var(Z)=\sigma^2$$

şeklinde bulunur.

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ ise olasılıklar standart normal dağılıma dönüştürülerek standart normal dağılım tablosundan bulunur. Örneğin, $X\sim N(\mu=100,\sigma^2=100)$ ise $\mu=100$ ve $\sigma=10$ olup $Z=(X-100)/10\sim N(0,1)$ dir. Buradan $P(100<X<110)$ olasılığı,

$$P(100 < X < 110) = P\left(\frac{100-100}{10} < \frac{X-100}{10} < \frac{110-100}{10}\right) = P(0 < Z < 1) = 0.3413$$

şeklinde standart normal dağılım tablosundan bulunur.

Şimdi, $Z \sim N(0,1)$ olmak üzere olasılık yoğunluk fonksiyonu $z \in \mathbb{R}$ için

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

fonksiyonun olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğunu gösterelim. $f(z)$ fonksiyonu çift olup,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-z^2/2} dz$$

dir. Ayrıca, $\int_{0}^{\infty} e^{-z^2/2} dz$ integralinin doğrudan hesaplanması zordur. İntegralin çift katlı integrale dönüştürülmesi integral hesabını kolaylaştırır.

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz \Leftrightarrow \int_{0}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \left(\int_{0}^{\infty} e^{-z^2/2} dz\right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_{0}^{\infty} e^{-z^2/2} dz\right)\left(\int_{0}^{\infty} e^{-u^2/2} du\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-(z^2+u^2)/2}\, dz = \frac{\pi}{2}$$

denkliklerinden, $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = 1$ için $\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-(z^2+u^2)/2}\, dzdu = \frac{\pi}{2}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $r > 0$ ve $0 < \theta < \pi/2$ için $z = r\cos(\theta)$ ve $u = r\sin(\theta)$ kutupsal koordinat dönüşümlerinden $dz\,du = r\,dr\,d\theta$ olup yukarıdaki çift katlı integral,

$$\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-(z^2+u^2)/2}\, dz\,du = \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi/2} e^{-r^2/2} r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{r=0}^{\infty} r\,e^{-r^2/2}\,dr \int_{\theta=0}^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2} \int_{r=0}^{\infty} r\,e^{-r^2/2}\,dr = \frac{\pi}{2}$$

olarak hesaplanır. Yani, $f(z)$ bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

$Z \sim N(0,1)$ dağılımının moment çıkaran fonksiyonu, $M_Z(t) = e^{t^2/2}$ dir. Buradan da, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dağılımının moment çıkaran fonksiyonu $X = \mu + \sigma Z$ eşitliğinden,

$$M_X(t) = M_{\mu+\sigma Z}(t) = E(e^{(\mu+\sigma Z)t}) = e^{\mu t} M_X(\sigma t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$$

olarak bulunur.

Örnek 5.2.2 a) $Z \sim N(0,1)$ ise Z nin bütün momentlerinin

$$E(Z^n) = \begin{cases} \dfrac{2^{n/2}\Gamma\big((n+1)/2\big)}{\sqrt{\pi}} & , \quad n \text{ çift} \\ 0 & , \quad n \text{ tek} \end{cases}$$

formülü ile hesaplanabilir. Şimdi bunu gösterelim. $n \in \mathbb{N}$ için

$$E(Z^n) = \int_{-\infty}^{\infty} z^n f(z)\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^n e^{-z^2/2} dz = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^{\infty} z^n e^{-z^2/2} dz & , \quad n \text{ çift} \\ 0 & , \quad n \text{ tek} \end{cases}$$

olup çift n ler için $u = z^2/2$ dönüşümü ile $z = \sqrt{2u}$ ve $du = z\,dz$ olduğundan $E(Z^n)$,

$$E(Z^n) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} z^n e^{-z^2/2} dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} z^n e^{-z^2/2} dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} z^{n-1} e^{-z^2/2} z\,dz$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (2u)^{(n-1)/2} e^{-u}\,du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} 2^{(n-1)/2} u^{(n-1)/2} e^{-u}\,du = \frac{2^{n/2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} u^{\left(\frac{n+1}{2}\right)-1} e^{-u}\,du$$

$$= \frac{2^{n/2}\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi}}$$

olarak elde edilir. n tek ise $z^n e^{-z^2/2}$ fonksiyonu tek olduğundan $E(Z^n) = 0$ dır.

b) $X \sim N(\mu = 100, \sigma^2 = 100)$ dağılımı için bazı olasılıklar aşağıda hesaplanmıştır.

$$P(90 < X < 110) = P\left(\frac{90-100}{10} < \frac{X-100}{10} < \frac{110-100}{10}\right)$$
$$= P(-1 < Z < 1) = 2P(0 < Z < 1) = 2(0.3413) = 0.6826$$

Bu olasılık Şekil (5.2.9a) da belirtilen taralı bölgenin alanıdır. Ayrıca,

$$P(110 < X < 120) = P\left(\frac{110-100}{10} < \frac{X-100}{10} < \frac{120-100}{10}\right)$$
$$= P(1 < Z < 2) = P(0 < Z < 2) - P(0 < Z < 1) = 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$$

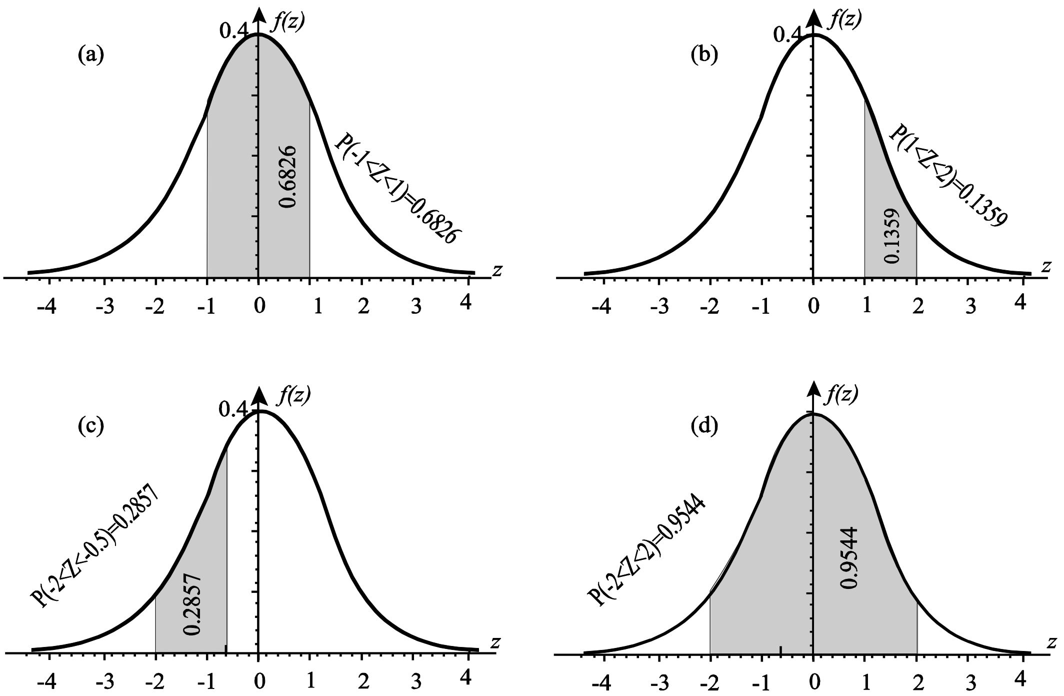
olup, bu olasılık da yine Şekil (5.2.9b) de gösterilen taralı alana eşittir. Diğer taraftan,

$$P(80 < X < 95) = P\left(\frac{80-100}{10} < \frac{X-100}{10} < \frac{95-100}{10}\right) = P(-2 < Z < -0.5)$$
$$= P(0.5 < Z < 2) = P(0 < Z < 2) - P(0 < Z < 0.5) = 0.4772 - 0.1915 = 0.2857$$

dir. Bu olasılık da Şekil (5.2.9c) de belirtilen bölgenin alanıdır. Son olarak da,

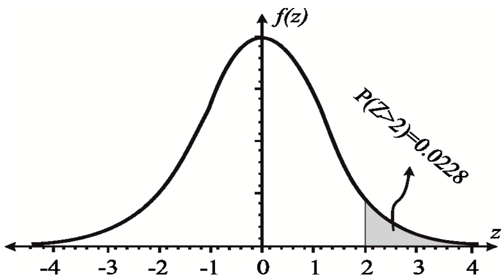
$$P(|X-100| \le 20) = P(-20 \le X - 100 \le 20) = P(-2 \le Z \le 2)$$
$$= 2P(0 \le Z \le 2) = 2(0.4772) = 0.9544$$

olup, bu olasılık da Şekil (5.2.9d) de gösterilmiştir.



Şekil 5.2.9 Normal dağılımda bazı olasılıklar (Örnek (5.2.2.b))

c) Bir dersten sınava giren öğrencilerin notları, beklenen değeri 70 varyansı 100 olan normal dağılıma sahip olsun. Sınavdan 4 öğrencinin 90 ve üzerinde not aldığı bilindiğine göre, sınava giren öğrenci sayısını yaklaşık olarak bulmak isteyelim. Bunun için $P(X > 90)$ olasılığının hesaplanması yeterlidir.



Şekil 5.2.9a Normal dağılımda olasılık hesabı (Örnek (5.2.2.c))

Bu olasılık,

$$P(X > 90) = P\left(\frac{X-70}{10} > \frac{90-70}{10}\right) = P\left(Z > 2\right) = 0.0228$$

olup öğrencilerin yaklaşık olarak $\%2.5$'i 90 ve üzerinde not almıştır. Buna göre, sınava giren öğrencilerin yaklaşık $\%2.5$'i 4 kişi ise sınava giren öğrencilerin tamamı $400/(2.5) = 160$ dır$\oplus$

$X_1, X_2, ..., X_k$ bağımsız $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ dağılımlı rasgele değişkenler ise $\mu = \mu_1 + ... + \mu_k$ ve $\sigma^2 = \sigma_i^2 + ... + \sigma_k^2$ olmak üzere $X = X_1 + X_2 + ... + X_k \sim N(\mu, \sigma^2)$ dir. Yani, bağımsız normal dağılıma sahip rasgele değişkenlerin toplamı da normal dağılıma sahiptir.

Örnek 5.2.3 $Z \sim N(0,1)$ olsun. Bazen, $E_{-\infty}^{b}(Z) = \int_{-\infty}^{b} z\, f(z)\, dz$ gibi beklenen değerlere (truncated expectation) ihtiyaç duyulabilir. Şimdi bunlardan bazılarını göstermeye çalışalım.

a) Önce, $E_{-\infty}^{b}(Z) = \int\limits_{-\infty}^{b} z\, f(z)\, dz$ integrali için $z^2/2 = u$ ise $zdz = du$ dur. Buradan bir defa kısmi integrasyon sonucunda,

$$E_{-\infty}^{b}(Z) = \int\limits_{-\infty}^{b} z\, f(z)\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{b} z\, e^{-z^2/2} dz = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \Big|_{z=-\infty}^{b} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} e^{-b^2/2} = -f(b)$$

elde edilir. Yani, $E_{-\infty}^{b}(Z) = -f(b)$ dir.

b) Benzer şekilde,

$$E_{b}^{\infty}(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{b}^{\infty} z\, e^{-z^2/2} dz = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \Big|_{z=b}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-b^2/2} = f(b)$$

dir. Yani, $E_{b}^{\infty}(Z) = f(b)$ dir. Genel olarak, $E_{-\infty}^{b}(Z^n) = -b^{n-1} f(b) + (n-1) E_{-\infty}^{b}(Z^{n-2})$ eşitliği yazılabilir. Şimdi bu eşitliğin doğru olduğunu gösterelim. $E_{-\infty}^{b}(Z^n)$ değeri,

$$E_{-\infty}^{b}(Z^n) = \int\limits_{-\infty}^{b} z^n\, f(z)\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{b} z^n\, e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{b} z^{n-1}\, e^{-z^2/2} z\, dz$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $u = z^{n-1}$ denirse $du = (n-1)\, z^{n-2}$ olur. Ayrıca,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} z\, dz = dv \Rightarrow v = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

olduğundan $\int u dv = uv - \int v\, du$ kısmni integrasyon formülü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} E_{-\infty}^{b}(Z^n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{b} z^{n-1}\, e^{-z^2/2} z\, dz \\ &= -\frac{z^{n-1}}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \Big|_{z=-\infty}^{b} + (n-1) \int\limits_{-\infty}^{b} z^{n-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz \\ &= -b^{n-1} f(b) + (n-1) E_{-\infty}^{b}(Z^{n-2}) \end{aligned}$$

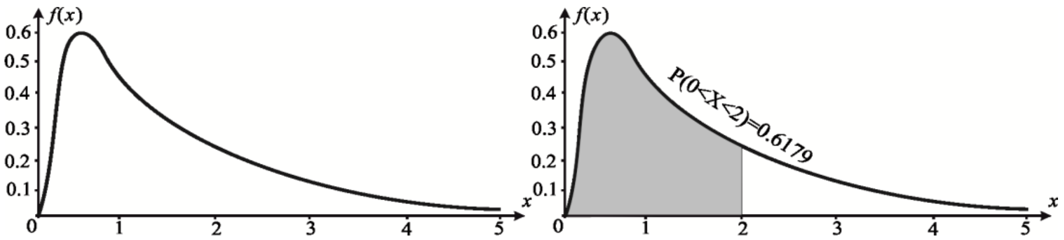
bulunur. Sonuç olarak, $E_{-\infty}^{b}(Z^n) = -b^{n-1} f(b) + (n-1) E_{-\infty}^{b}(Z^{n-2})$ şeklinde aranan eşitlik elde edilir$\oplus$

5.2.6. Log-Normal Dağılım

Bir X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $\mu \in \mathbb{R}$ ve $\sigma \in \mathbb{R}^+$ için

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log(x)-\mu)^2} \quad , x \in \mathbb{R}^+$$

şeklinde ise X *log-normal dağılıma sahiptir* denir ve $X \sim \log N(\mu,\sigma^2)$ ile gösterilir. $X \sim \log N(\mu,\sigma^2)$ ise $Y = \log(X) \sim N(\mu,\sigma^2)$ dir. Bu dağılım için önemli uygulama alanları vardır. Örneğin, iktisadi veriler analiz edilmeden önce verilerin logaritmaları alınır. Bunun nedenlerinden biri iktisadi verilerin log-normal dağılıma uygun olduğu varsayımıdır. İstatistiki sonuç çıkarım için normallik varsayımı önemlidir. Normallik varsayımının sağlanması için verilerin logaritmaları alınır. Dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği, $\mu = 0$ ve $\sigma = 1$ için Şekil (5.2.10) da verilmiştir.



Şekil 5.2.10 $\mu = 0$ *ve* $\sigma = 1$ *için log-normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu*

Şimdi, $X \sim \log N(0,1)$ olsun. $P(0 < X < 1)$ olasılığını hesaplamak isteyelim. Bu olasılık $Z \sim N(0,1)$ olmak üzere doğrudan

$$P(0 < X < 1) = \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \frac{1}{x} e^{-(\log(x))^2/2} dx \ , \ \log(x) = u \Rightarrow \frac{1}{x}dx = du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-u^2/2} du = P(-\infty < Z < 0) = 0.5$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde $P(0 < X < 2)$ olasılığı

$$P(0 < X < 2) = \int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^2 \frac{1}{x} e^{-(\log(x))^2/2} dx \ , \ \log(x) = u \Rightarrow \frac{1}{x}dx = du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\log(2)} e^{-u^2/2} du = P(-\infty < Z < \log(2)) \cong P(-\infty < Z < 0.3) = 0.6179$$

olarak bulunmuştur. Bu olasılık da, Şekil (5.2.10) da belirtilen taralı alandır. Dağılımın beklenen değeri ve varyansı,

$$E(X) = e^{\mu + \sigma^2/2} \quad \text{ve} \quad Var(X) = e^{2(\mu+\sigma^2)} - e^{2\mu+\sigma^2}$$

dir.

5.3. İki Boyutlu Normal Dağılım

Bu kısımda, çok değişkenli normal dağılımı kısaca tanıdıktan sonra iki değişkenli normal dağılımın bazı özellikleri ele alınacaktır. $\underset{\sim}{\mu},\ \underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^k$ ve Σ da $k \times k$ boyutlu varyans-kovaryans matrisi olsun. Buna göre $|\Sigma| = |\det(\Sigma)|$ olmak üzere, k *-değişkenli normal dağılımın ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu*,

$$f(\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu})' \Sigma^{-1} (\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\mu}) \right) \quad , \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{\mu} \in \mathbb{R}^k$$

şeklindedir ve $\underset{\sim}{X} \sim MN_k(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ ile gösterilir.

$\underset{\sim}{X} \sim MN_k(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ ve A uygun boyutlu sabit bir matris olmak üzere, $\underset{\sim}{Y} = A\,\underset{\sim}{X}$ de çok değişkenli normal dağılıma sahiptir. Yani, $\underset{\sim}{Y} = A\,\underset{\sim}{X} \sim MN_{rank(A)}(A\underset{\sim}{\mu},\ A\Sigma A')$ dır. Burada,

$$E(\underset{\sim}{Y}) = E(A\,\underset{\sim}{X}) = A\,E(\underset{\sim}{X}) = A\underset{\sim}{\mu} \quad \text{ve} \quad Var(\underset{\sim}{Y}) = Var(A\underset{\sim}{X}) = A\,Var(\underset{\sim}{X})\,A' = A\Sigma A'$$

dır. Buna göre, $\underset{\sim}{X} \sim MN_k(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ ise A matrisinin özel seçimi ile marjinallerin de normal olduğu görülür.

Şimdi, $k = 2$ için iki değişkenli normal dağılımı ele alalım. İki boyutlu rasgele değişkenin bileşenleri X ve Y olsun. $\mu_x, \mu_y \in \mathbb{R}$, $\sigma_x > 0$, $\sigma_y > 0$ ve $-1 < \rho < 1$ olmak üzere, iki değişkenli normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) \right]}$$

şeklindedir. Bu ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\underset{\sim}{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix} \text{ ve } \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, yukarıda verilen çok değişkenli normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu ile aynıdır. Bunu,

$$\underset{\sim}{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim MN_2\left(\begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \right)$$

olarak ifade edebiliriz.

İki değişkenli normal dağılımın bazı özellikleri aşağıdaki teoremde özetlenmiştir.

Teorem 5.3.1 Bileşenleri X ve Y olan iki boyutlu $\underset{\sim}{X}$ rasgele vektörü $\underset{\sim}{X} \sim MN_2(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ olsun. Buna göre,

a) Marjinaller normaldir. Yani, $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ ve $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ dir.

b) $\rho_{X,Y} = \rho$ dir. Yani aralarındaki korelasyon ρ dur.

c) $a, b \in \mathbb{R}$ için, $aX + bY \sim N(a\mu_x + b\mu_y, a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + 2ab\rho\sigma_x\sigma_y)$ dir.

d) Koşullu dağılımlar normaldir. Yani,

$$\mu_{y|x} = \mu_y + \rho(\sigma_y / \sigma_x)(x - \mu_x) \quad , \quad \mu_{x|y} = \mu_x + \rho(\sigma_x / \sigma_y)(y - \mu_y),$$

$$\sigma_{y|x}^2 = \sigma_y^2(1 - \rho^2) \quad , \quad \sigma_{x|y}^2 = \sigma_x^2(1 - \rho^2)$$

olmak üzere,

$$Y \,|\, X = x \sim N(\mu_{y|x}, \sigma_{y|x}^2) \text{ ve } X \,|\, Y = y \sim N(\mu_{x|y}, \sigma_{x|y}^2)$$

dir.

İspat: İşlemlerin basit yürütülebilmesi için $\mu_x = \mu_y = 0$ ve $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$ alalım. Buna göre, iki boyutlu normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^2$ için

$$f(\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{2\pi |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\underset{\sim}{x}' \Sigma^{-1/2} \underset{\sim}{x}}$$

olup $\underset{\sim}{x} = (x, y)'$ ve

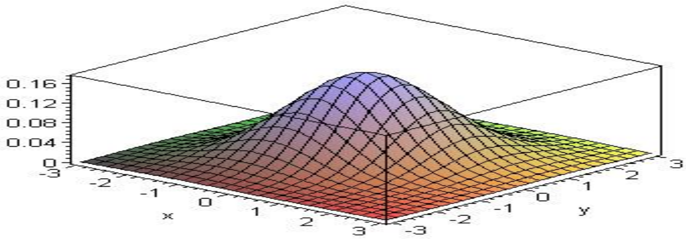
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}, \qquad \det(\Sigma) = 1 - \rho^2 \quad \text{ve} \quad \Sigma^{-1} = \frac{1}{1 - \rho^2}\begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\underset{\sim}{x}' \Sigma^{-1} \underset{\sim}{x} = \frac{1}{1 - \rho^2}(x, y)\begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \rho^2}\left(x - \rho y, -\rho x + y\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1 - \rho^2}(x^2 + y^2 - 2\rho x y)$$

dir.



Şekil 5.3.1 $\rho = 0.4$ *için iki değişkenli normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu*

Yani, X ve Y nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2+y^2-2\rho xy)}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi ispata geçelim.

a) $\underset{\sim}{X} \sim MN_2(\mu, \Sigma)$ olduğundan uygun bir $\underset{\sim}{a}$ vektörü için $\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{X} \sim N(\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{\mu}\ ,\ \underset{\sim}{a}'\Sigma\underset{\sim}{a})$ olduğunu biliyoruz. $\underset{\sim}{a} = (1,0)'$ için $a'\underset{\sim}{X} = X$ olup $\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{\mu} = \mu_X$ ve $\underset{\sim}{a}'\Sigma\underset{\sim}{a} = \sigma_X^2$ dir. Buradan,

$$\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{X} = (1,0)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = X \sim N\left(\underset{\sim}{a}'\underset{\sim}{\mu} = \mu_X,\ \underset{\sim}{a}'\Sigma\underset{\sim}{a} = \sigma_X^2\right)$$

olup X normal dağılıma sahiptir. Benzer şekilde $\underset{\sim}{a} = (1,0)'$ için Y nin dağılımının da normal olduğu görülür. Aynı sonuç, ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun Y nin değer kümesi üzerinden integrali ile de elde edilir. X in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu $x \in \mathbb{R}$ için,

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{y=-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(x^2+y^2-2\rho xy\right)\right)dy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\left(1-\rho^2\right)}\right) \int_{y=-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(y^2-2\rho xy+\rho^2x^2-\rho^2x^2\right)\right)dy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{-x^2+\rho^2x^2}{2\left(1-\rho^2\right)}\right) \int_{y=-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-1}{2\left(1-\rho^2\right)}(y-\rho x)^2\right)dy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \int_{y=-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-1}{2\left(1-\rho^2\right)}(y-\rho x)^2\right)dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{-1}{2\left(1-\rho^2\right)}(y-\rho x)^2\right)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$$

dir. Bu da, standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

b) $\mu_x = \mu_y = 0$ ve $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$ olduğundan, X ile Y arasındaki korelasyon,

$$\rho_{X,Y}=\frac{Cov\left(X,Y\right)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}=\frac{E\left(X\,Y\right)-E\left(X\right)E\left(Y\right)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}=E(XY)$$

dir. Buna göre $c^{-1}=\left(2\pi\sqrt{1-\rho^2}\right)$ olmak üzere $E(XY)$ değeri,

$$E\left(XY\right)=c\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x\,y\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[x^2+y^2-2\rho\,x\,y\right]\right)dx\,dy$$

şeklinde yazılabilir. $t=x, s=x\,y$ dönüşümleri altında ters dönüşümler $x=t$ ve $y=s/t$ olup Jacobien matrisi ile determinantı

$$J=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial x}{\partial s}\\ \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial x}{\partial s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{s}{t^2} & \dfrac{1}{t}\end{bmatrix},\ \det\left(J\right)=\frac{1}{t}$$

dir. $|\det(J)|=1/t$ olup bunu $|\det(J)|=1/\sqrt{t^2}$ şeklinde yazalım. Bu dönüşüm altında $E(XY)$ nin değeri,

$$E\left(XY\right)=c\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}s\ \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[t^2+(s/t)^2-2\rho\,s\right]\right)\frac{1}{\sqrt{t^2}}dt\ ds$$

şekline dönüşür. Ayrıca,

$$\left[t^2+(s/t)^2-2\rho\,s\right]=\left(\frac{s-\rho\,t}{t}\right)^2+(1-\rho^2)t^2$$

olduğundan integralin değeri, yani X ile Y arasındaki korelasyon

$$E\left(XY\right)=c\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x\,y\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[x^2+y^2-2\rho\,x\,y\right]\right)dx\,dy$$

$$=c\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s}{\sqrt{t^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{s-\rho\,t^2}{t}\right)+\left(1-\rho^2\right)t^2\right]\right)ds\,dt$$

$$=c\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s}{\sqrt{t^2}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{s-\rho\,t^2}{t}\right)^2\right]\right)ds\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)t^2}}\exp\left(-\frac{(s-\rho t^2}{2(1-\rho^2)t^2}\right)ds\right]dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) [E(S)]\, dt \quad , E(S) = \rho t^2$$

$$= \rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \quad , T \sim N(0,1)$$

$$= \rho$$

olarak hesaplanmış olur.

c) $\underset{\sim}{X} \sim MN_2(\underset{\sim}{\mu} \, , \Sigma)$ ise $\underset{\sim}{a}' \underset{\sim}{X} \sim N(\underset{\sim}{a}' \underset{\sim}{\mu} \, , \, \underset{\sim}{a}' \Sigma \underset{\sim}{a})$ olduğunu biliyoruz. $\underset{\sim}{a}' = (a,b)$ için,

$$\underset{\sim}{a}' \underset{\sim}{\mu} = (a,b) \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix} = a\mu_x + b\mu_y$$

ve

$$\underset{\sim}{a}' \Sigma \underset{\sim}{a} = (a,b) \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + 2ab\rho\sigma_x\sigma_y$$

olduğundan, $a, b \in \mathbb{R}$ için,

$$aX + bY \sim N(a\mu_x + b\mu_y \, , a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + 2ab\rho\sigma_x\sigma_y)$$

bulunur.

d) Marjinal dağılımların da normal olduğunu biliyoruz. Koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunun tanımından, $Y = y$ verildiğinde X in koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X|Y=y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\dfrac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\dfrac{1}{2(1-\rho^2)}\left[x^2 + y^2 - 2\rho x y\right]\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{y^2}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[x^2 + y^2 - 2\rho x y - (1-\rho^2)y^2\right]\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[x^2 + \rho^2 y^2 - 2\rho x y\right]\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{\left(x^2 - \rho y\right)^2}{2(1-\rho^2)}\right)$$

olarak bulunur. Bu fonksiyon da, beklenen değeri ρy, varyansı $1-\rho^2$ olan normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Yani,

$$E\left(X \mid Y = y\right) = \rho y \quad \text{ve} \quad Var\left(X \mid Y = y\right) = 1 - \rho^2$$

dir.

Bu sonuç, $\mu_x = \mu_y = 0$ ve $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$ olması halinde elde edildi. $X_1 = \mu_x + \sigma_x X$ ve $Y_1 = \mu_y + \sigma_y Y$ dönüşümleri altında koşullu beklenen değer ile koşullu varyans

$$\mu_{y|x} = \mu_y + \rho\left(\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\right)(x-\mu_x) \quad , \quad \mu_{x|y} = \mu_x + \rho\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\right)(y-\mu_y),$$
$$\sigma_{y|x}^2 = \sigma_y^2(1-\rho^2) \quad , \quad \sigma_{x|y}^2 = \sigma_x^2(1-\rho^2)$$

olarak bulunur ◊

Örnek 5.3.1 İki değişkenli standart normal dağılımı göz önüne alalım. Yani, X ve Y nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu, $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2+y^2-2\rho xy)\right)$$

olarak verilmiş olsun. Buna göre $P\left(X>0,\, Y>0\right)$ olasılığını hesaplayalım. Bunun için,

$$U = X \ , \ V = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(Y-\rho X\right)$$

dönüşümlerinden ters dönüşümler, $X = U$, $Y = \sqrt{1-\rho^2}\ V + \rho U$ olup Jacobien matrisi ve determinantı,

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial U} & \frac{\partial X}{\partial V} \\ \frac{\partial Y}{\partial U} & \frac{\partial Y}{\partial V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix}, \quad \det\left(J\right) = \sqrt{1-\rho^2}$$

dir. Ayrıca, $x^2+y^2-2\rho xy = (1-\rho^2)(u^2+v^2)$ olup U ve V nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{U,U}(u,v) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{\left(1-\rho^2\right)\left(u^2+v^2\right)}{2\left(1-\rho^2\right)}\right) = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)\right]$$
$$= f_U(u)\, f_V(v)$$

şeklinde elde edilir. Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarının çarpımı şeklinde yazılabildiğinden U ve V bağımsızdır. Diğer taraftan,

$$\left\{X>0,\, Y>0\right\} = \left\{U>0\ ,\ V>-\rho U/\sqrt{1-\rho^2}\right\}$$

eşitliği yardımı ile $P(X>0, Y>0)$ olasılığı,

$$P\left(\{X>0,\,Y>0\}\right)=P\left(\left\{U>0\;,\;V>\frac{-\rho U}{\sqrt{1-\rho^2}}\right\}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{\frac{-\rho u}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{\infty}\exp\left(-\frac{u^2+v^2}{2}\right)dv\,du$$

şeklinde yazılabilir. $0<\theta<\pi/2$ ve $r>0$ olmak üzere, $u=r\cos(\theta)$ ve $v=r\sin(\theta)$ kutupsal koordinatları için $du\,dv=r\,dr\,d\theta$ dir. $\tan(\theta)=v/u$ olduğundan $\theta=\arctan(v/u)$ yazılır. Buradan integralin alt sınırı

$$\arctan\left(-\frac{\rho u}{u\sqrt{1-\rho^2}}\right)=\arctan\left(-\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

olup aranan olasılık,

$$P\left(\{X>0,\,Y>0\}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{\frac{-\rho u}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{\infty}\exp\left(-\frac{u^2+v^2}{2}\right)dv\,du$$

$$=\int_{\theta=\arctan\left(\frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)}^{\pi/2}\left[\int_0^{\infty}\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)r\,dr\right]d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=\arctan\left(\frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)}^{\pi/2}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi}\arctan\left(\frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\arctan\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

olarak bulunur. Ayrıca,

$$\arctan\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)=\arcsin(\rho)$$

trigonometrik eşitliğinden aranan olasılık

$$P\left(\{X>0,\,Y>0\}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\arctan\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\arcsin(\rho)$$

olarak hesaplanmış olur.