HAFTA 9

HİPOTEZ TESTLERİNE GİRİŞ

Önceki bölümlerde temel olasılık kavramlarının yanında parametre tahmini ve tahmin edicilerin özellikleri incelendi. Bir parametre için iyi bir tahmin edici bulduktan sonra gözlemlere dayalı bir tahmin değeri elde edilir. Bu tahminin kitle parametresini temsil edip etmediği sınanmalıdır. Bu bölümde, kitle parametrelerine ilişkin hipotez testleri ile ilgili temel kavramlar ile normal dağılımın parametrelerine ilişkin hipotez testleri incelenecektir. Daha sonra, kitle parametrelerine ilişkin hipotez testleri ile test istatistiklerinin bulunma yöntemleri üzerinde durulacaktır. Bayes testleri ile kitle parametrelerine ait güven aralıkları da bu bölümde incelenecek konular arasındadır.

9.1. Genel Kavramlar

Bu kısımda, hipotez testleri ile ilgili temel tanım ve kavramlar kısaca özetlenecektir. Burada, parametre kümesi reel sayıların bir alt kümesi olup Θ ile gösterilecektir.

Tanım 9.1.1 Kitlenin parametresi hakkındaki herhangi bir iddiaya *hipotez* denir $\otimes$

Genellikle, iki tür hipotezden bahsedilir. Bunlar; H_0 ile gösterilen yokluk hipotezi ve H_a (bazen H_1) ile gösterilen alternatif hipotezlerdir. Ayrıca, $\Theta_0 \cup \Theta_0^c = \Theta$ ve $\Theta_0 \cap \Theta_0^c = \varnothing$ olmak üzere bu hipotezler genellikle, herhangi bir $\theta \in \Theta$ için $H_0 : \theta \in \Theta_0$ ve $H_a : \theta \in \Theta_0^c$ şeklinde ifade edilir. Hipotez testlerinde amaç deneysel gözlemlere bağlı olarak kitle parametreleri hakkında istatistiki sonuç çıkarımlar yapmaktır. Yani, yapılan denemeler sonunda elde edilen gözlem değerlerine göre $H_0 : \theta \in \Theta_0$ yokluk hipotezinin $H_a : \theta \in \Theta_0^c$ alternatif hipotezine karşı test edilmesidir. Sonuçta, gözlem değerlerine bağlı olarak $H_0 : \theta \in \Theta_0$ hipotezi ya red edilir ya da red edilemez. Hipotez testi problemi genel olarak

$H_0 : \theta \in \Theta_0$ karşı $H_a : \theta \in \Theta_0^c$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca, hipotezler basit ve karmaşık olmak üzere de iki gruba ayrılır. Parametre kümesinde sadece bir elemanı olan hipotezlere *basit (simple) hipotez,* birden fazla eleman olan hipotezlere de *karmaşık hipotez* denir. Örneğin, $H_0 : \theta = \theta_0$ bir basit hipotezdir (

$\Theta_0=\{\theta_0\}$) dır. Diğer taraftan, $H_a:\theta\neq\theta_0$ veya $H_a:\theta>\theta_0$ gibi hipotezler karmaşık hipotezlerdir.

Tanım 9.1.2 H_0 yokluk hipotezini red etmek için oluşturulan bir kurala *test* denir. Gözlem değerlerine bağlı olarak, H_0 yokluk hipotezinin red edileceği noktaların kümesine testin *red bölgesi* denir ve $\mathcal{R}$ ile gösterilir$\otimes$

$X_1,X_2,\dots,X_n$ parametresi θ olan kitleden bir örneklem, bu örneklemin gözlem değerleri $(x_1,x_2,\dots,x_n)'$ ve θ yı tahmin etmek için de $T(\underset{\sim}{X})$ istatistiği önerilmiş olsun. Bu istatistiğin değerine t diyelim ($T(\underset{\sim}{x})=t$). Buna göre, red bölgesi $\mathcal{R}$ olan $T(\underset{\sim}{X})$ tahmin edicisine bağlı olarak test kuralı

$$\phi(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1 & , \quad T(\underset{\sim}{x})\in\mathcal{R}\\ 0 & , \quad T(\underset{\sim}{x})\in\mathcal{R}^c\end{cases}$$

şeklinde ifade edilebilir. Yani, $T(\underset{\sim}{X})$ istatistiğinin değeri $\mathcal{R}$ nin bir elemanı ise $H_0:\theta\in\Theta_0$ yokluk hipotezi red edilir. Aksi halde red edilemez. Burada, $\phi(\underset{\sim}{x})$ test istatistiğinin gözlem değeri olup $\phi(\underset{\sim}{X})$, sadece 0 ve 1 değerlerini alan Bernoulli rasgele değişkenidir. Yani $\phi(\underset{\sim}{X})$ test istatistiği olup, $\phi(\underset{\sim}{x})$ bu test istatistiğinin gözlem değeridir. Örneğin, $X_1,X_2,\dots,X_n$ rasgele değişkenlerinin değerleri $(x_1,x_2,\dots,x_n)'$ şeklinde gözlenmiş ve test kuralı, "$\overline{x}_n>3$ ise $H_0:\theta\in\Theta_0$ yokluk hipotezi red edilir" şeklinde oluşturulmuş ise testin red bölgesi, $\mathcal{R}=\{\underset{\sim}{x}:\overline{x}_n>3\}$ şeklinde olur. Bu durumda test kuralı,

$$\phi(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1 & , \quad \overline{x}_n>3\\ 0 & , \quad \overline{x}_n\leq 3\end{cases}$$

olarak yazılır. Hipotez testlerinde amaç böyle bir kuralın oluşturulması yani, testin red bölgesinin belirlenmesidir. Bu kuralın nasıl elde edileceğine ilişkin birçok yöntem öne sürülebilir. Ancak, parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicilerine bağlı olarak oluşturulan en çok olabilirlik oran testleri öne çıkmaktadır.

Hipotez testlerinde genellikle örneklemin normal dağılımdan geldiği varsayılır. Veriler normal dağılıma uygun değilse, dönüşümler yapılarak normallik varsayımları sağlatılır. Normal olmayan durumlarda, merkezi limit teoreminden faydalanılır.

$N(\mu,\sigma^2)$ dağılımından bir örneklem $X_1,X_2,\dots,X_n$ olsun. Normal dağılımın beklenen değerine ilişkin hipotezler varyansın durumuna göre değişir. Aşağıdaki örneklerde, önceden belirlenen ve testin anlam düzeyi olarak bilinen $\alpha-$ birinci tür hata olasılığı ile testin gücü bu bölümün üçüncü kısımında incelenecektir. Dolayısı ile, bu kısımda testlerin gücü ayrıntıya girilmeden verilecektir. Testin gücü denildiği zaman H_0 yokluk hipotezinin red edilmesi olasılığını anlayacağız.

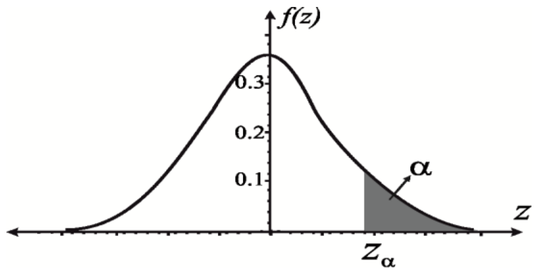
A) Kitle varyansı σ^2 biliniyor:

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ beklenen değeri μ varyansı σ^2 olan normal dağılımdan bir örneklem ise $\sqrt{n}\,(\overline{X}_n - \mu_0)/\sigma \sim N(0,1)$ dir. $Z \sim N(0,1)$ ve $P(Z > z_\alpha) = \alpha$ olmak üzere, normal dağılımın beklenen değeri μ için hipotez testleri aşağıda özetlenmiştir. Aşağıdaki test istatistiğinin hesaplanan değeri her üç durumda da aynıdır ($z_h = \sqrt{n}\,(\overline{x}_n - \mu_0)/\sigma$). Ayrıca z_α değerleri standart normal dağılım tablosundan bulunur.

1. $H_0 : \mu = \mu_0$ yokluk hipotezinin $H_a : \mu > \mu_0$ alternatif hipotezine karşı testi problemini düşünelim. Burada, $H_0 : \mu = \mu_0$ hipotezi yerine $H_0 : \mu \le \mu_0$ de yazılabilir. Bu problem için test fonksiyonu,

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & , \quad z_h > z_\alpha \\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklindedir. Yani, $z_h > z_\alpha$ ise $H_0 : \mu = \mu_0$ hipotezi $H_a : \mu > \mu_0$ alternatif hipotezine karşı red edilir. Testin red bölgesi ile red bölgesinin alanı Şekil (9.1.1a) da verilmiştir.

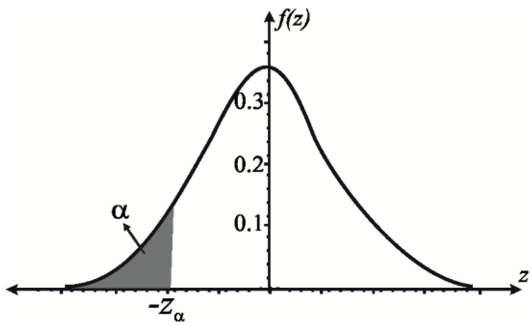


Şekil 9.1.1a $H_0 : \mu = \mu_0$ *hipotezinin* $H_a : \mu > \mu_0$ *alternatif hipotezine karşı testi problemi için red bölgesi ve alanı (varyans biliniyor)*

2. $H_0 : \mu = \mu_0$ yokluk hipotezinin $H_a : \mu < \mu_0$ alternatif hipotezine karşı testi problemi ($H_0 : \mu = \mu_0$ hipotezi yerine $H_0 : \mu \ge \mu_0$ de yazılabilir) için test fonksiyonu,

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & , \quad z_h < -z_\alpha \\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olup $z_h < -z_\alpha$ ise $H_0 : \mu = \mu_0$ yokluk hipotezi H_a alternatif hipotezine karşı red edilir. Yine testin red bölgesi ile red bölgesinin alanı Şekil (9.1.1b) de verildiği gibidir.

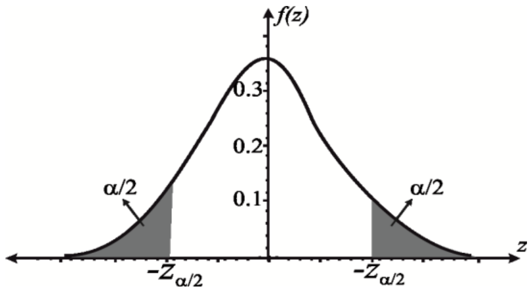


Şekil 9.1.1b $H_0 : \mu = \mu_0$ *hipotezinin* $H_a : \mu < \mu_0$ *alternatif hipotezine karşı testi problemi için red bölgesi ve alanı (varyans biliniyor)*

3. $H_0 : \mu = \mu_0$ yokluk hipotezinin $H_a : \mu \neq \mu_0$ alternatif hipotezine karşı testi problemi için test fonksiyonu,

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & , \quad |z_h| > z_{\alpha/2} \\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olup, $|z_h| > z_{\alpha/2}$ ise $H_0 : \mu = \mu_0$ hipotezi H_a alternatif hipotezine karşı red edilir. Testin red bölgesi ile red bölgesinin alanı (Şekil 9.1.1c) de verildiği gibidir.



Şekil 9.1.1c $H_0 : \mu = \mu_0$ *hipotezinin* $H_a : \mu \neq \mu_0$ *alternatif hipotezine karşı testi problemi için red bölgesi ve alanı (varyans biliniyor)*

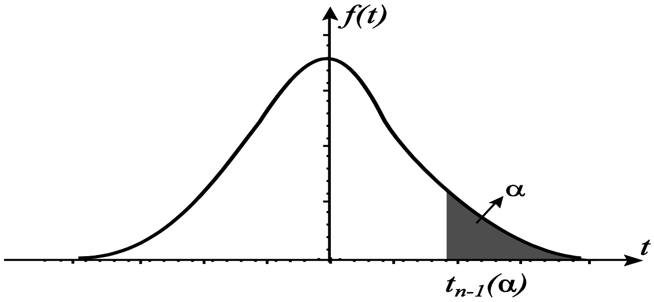
B) Kitle varyansı σ^2 bilinmiyor:

Kitle varyansı σ^2 bilinmiyorsa S_n^2 örneklem varyansı ile tahmin edilir. S_n^2 nin değeri σ^2 için kullanılır. X_i ler bağımsız $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ise, $\sqrt{n}\,(\bar{X}_n - \mu)/S_n \sim t_{n-1}$ olduğu altıncı bölümde gösterildi. $P(t_{n-1} > t_{n-1}(\alpha)) = \alpha$ olmak üzere, varyansın bilinmediği durumda, normal dağılımın beklenen değeri için oluşturulacak hipotez testleri aşağıda özetlenmiştir. Aşağıdaki test istatistiğinin hesaplanan değeri her üç durumda da $t_h = \sqrt{n}\left(\bar{x}_n - \mu_0\right)/s_n$ dir. $t_{n-1}(\alpha)$ değerleri *t*-dağılım tablosundan bulunabilir.

1. $H_0 : \mu = \mu_0$ yokluk hipotezinin $H_a : \mu > \mu_0$ alternatif hipotezine karşı testi problemi için test fonksiyonu,

$$\phi(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1 & , \quad t_h > t_{n-1}(\alpha) \\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde}\end{cases}$$

şeklindedir. Yani, $t_h > t_{n-1}(\alpha)$ ise $H_0 : \mu = \mu_0$ hipotezi $H_a : \mu > \mu_0$ alternatif hipotezine karşı red edilir. Testin red bölgesi ile red bölgesinin alanı Şekil (9.1.2a) da verildiği gibidir.

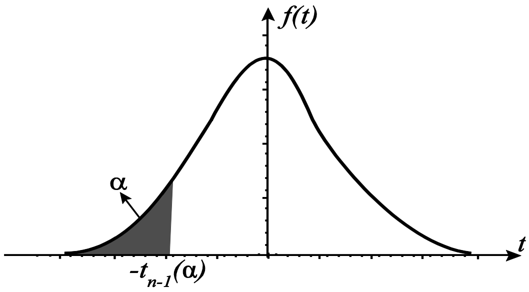


Şekil 9.1.2a $H_0 : \mu = \mu_0$ *hipotezinin* $H_a : \mu > \mu_0$ *alternatif hipotezine karşı testi problemi için red bölgesi ve alanı (varyans bilinmiyor)*

2. $H_0 : \mu = \mu_0$ yokluk hipotezinin $H_a : \mu < \mu_0$ alternatif hipotezine karşı testi problemi için test fonksiyonu,

$$\phi(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1 & , \quad t_h < -t_{n-1}(\alpha) \\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde}\end{cases}$$

şeklinde olup $t_h < -t_{n-1}(\alpha)$ ise $H_0 : \mu = \mu_0$ hipotezi $H_a : \mu < \mu_0$ alternatif hipotezine karşı red edilir. Testin red bölgesi ile red bölgesinin alanı Şekil (9.1.2b) de verildiği gibidir.

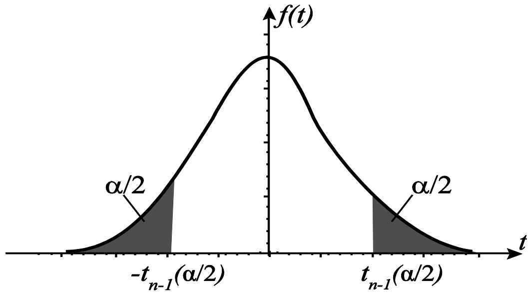


Şekil 9.1.2b $H_0 : \mu = \mu_0$ *hipotezinin* $H_a : \mu < \mu_0$ *alternatif hipotezine karşı testi problemi için red bölgesi ve alanı (varyans bilinmiyor)*

3. $H_0 : \mu = \mu_0$ yokluk hipotezinin $H_a : \mu \neq \mu_0$ alternatif hipotezine karşı testi problemini düşünelim. Bu problem için de test fonksiyonu

$$\phi(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1 & , \quad |t_h| > t_{n-1}(\alpha/2) \\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde}\end{cases}$$

şeklindedir. Yani, $|t_h| > t_{n-1}(\alpha/2)$ ise $H_0 : \mu = \mu_0$ yokluk hipotezi $H_a : \mu \neq \mu_0$ alternatif hipotezine karşı red edilir. Testin red bölgesi ile red bölgesinin alanı Şekil (9.1.2c) de verilmiştir.



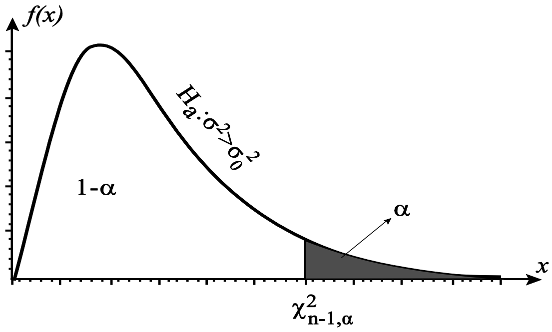
Şekil 9.1.2c $H_0 : \mu = \mu_0$ *hipotezinin* $H_a : \mu \neq \mu_0$ *alternatif hipotezine karşı testi problemi için red bölgesi ve alanı (varyans bilinmiyor)*

C) Kitle varyansı σ^2 için testler:

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ beklenen değeri μ, varyansı σ^2 olan normal dağılımdan bir örneklem olsun. $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ yokluk hipotezini

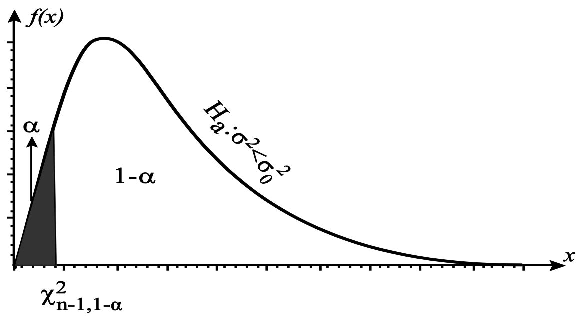
i) $H_a : \sigma^2 > \sigma_0^2$ ii) $H_a : \sigma^2 < \sigma_0^2$ iii) $H_a : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

alternatif hipotezlerine karşı $\alpha-$anlam düzeyinde test etmek isteyelim. S_n^2 nin dağılımı $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ hipotezi altında $(n-1)S_n^2 / \sigma_0^2 \sim \chi_{n-1}^2$ olup H_0 hipotezinin reddine ilişkin test kuralları ve red bölgeleri ile kritik değerleri $K_h = (n-1)S_n^2 / \sigma_0^2$ olmak üzere aşağıda verilmiştir. Burada $X_{n-1,\alpha}^2$ değerleri ki-kare dağılım tablosundan bulunur.



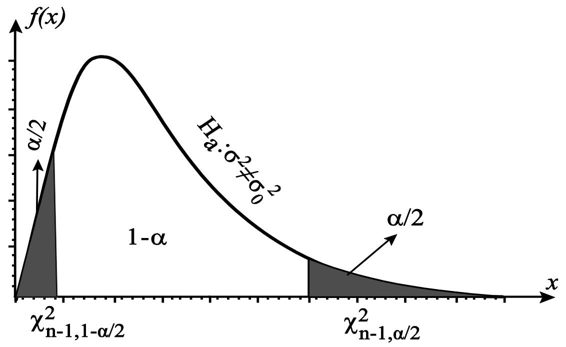
Şekil 9.1.3a $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ *hipotezinin* $H_a : \sigma^2 > \sigma_0^2$ *alternatifine karşı testi için red bölgesi ve red bölgesinin alanı*

Buna göre, $K_h > \chi_{n-1,\alpha}^2$ ise $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ yokluk hipotezi $\alpha-$anlam düzeyinde $H_a : \sigma^2 > \sigma_0^2$ alternatif hipotezine karşı red edilir (şekil (9.1.3.a)).



Şekil 9.1.3b $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ *hipotezinin* $H_a : \sigma^2 < \sigma_0^2$ *alternatifine karşı testi için red bölgesi ve red bölgesinin alanı*

Benzer şekilde, $K_h < \chi^2_{n-1,1-\alpha}$ ise $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ yokluk hipotezi $\alpha -$anlam düzeyinde $H_a : \sigma^2 < \sigma_0^2$ alternatif hipotezine karşı red edilir (Şekil (9.1.3b)).



Şekil 9.1.3c $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ *hipotezinin* $H_a : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ *alternatifine karşı testi için red bölgesi ve red bölgesinin alanı*

Ayrıca, $K_h < \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ veya $K_h > \chi^2_{n-1,\alpha/2}$ ise $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ yokluk hipotezi $\alpha -$anlam düzeyinde $H_a : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ alternatif hipotezine karşı red edilir (Şekil (9.1.3c)).

Örnek 9.1.1 Bir istatistik dersinden öğrencilerin notları beklenen değeri μ , varyansı σ^2 olan normal dağılıma sahiptir. Rasgele seçilen 50 öğrencinin notları aşağıda verilmiştir.

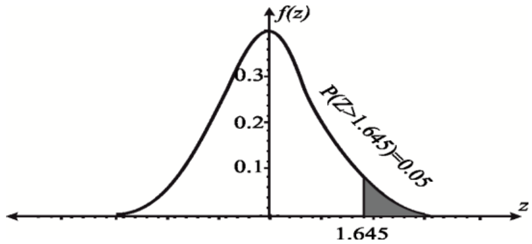
50 Öğrencinin istatistik dersinden aldığı notlar

67	50	65	26	72	25	64	68	20	30	65	72	30	26	12	67
17	16	65	75	20	12	21	60	81	29	51	37	80	44	40	26
71	43	50	75	55	65	76	38	47	24	87	38	47	43	80	24
45	59														

a) $\sigma^2 = 400$ olsun (kitle varyansı biliniyor). $H_0 : \mu = 45$ yokluk hipotezini $H_a : \mu > 45$ alternatif hipotezine karşı $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde test etmek isteyelim. $P(Z > z_\alpha) = 0.05$ ise normal dağılım tablosundan $z_\alpha = 1.645$ dir. Buradan,

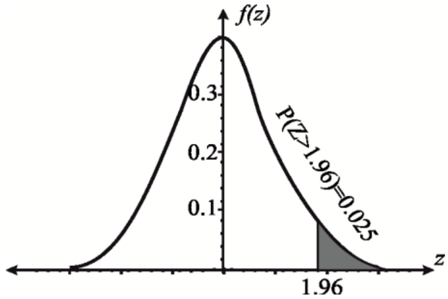
$$z_h = \sqrt{n}\,(\bar{x}_n - \mu_0) / \sigma = \sqrt{50}\,(48-45)/20 \cong 1.06$$

olup bu değer 1.645 den küçüktür ($z_h = 1.06 < 1.645 = z_\alpha$) yani, $H_0 : \mu = 45$ hipotezi $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde $H_a : \mu > 45$ alternatif hipotezine karşı red edilemez. Testin red bölgesi $\{\underset{\sim}{x} : \sqrt{n}\,(\bar{x}_n - 45)/20 > 1.645\}$ olup red bölgesinin alanı Şekil (9.1.4a) da verilmiştir.



Şekil 9.1.4a Örnek (9.1.1a) daki hipotez testi propblemi için testin red bölgesi ve red bölgesinin alanı ($\alpha = 0.05$ *)*

Aynı hipotezi $\alpha = 0.025$ anlam düzeyinde test etmek isteseydik, $P(Z > z_\alpha) = 0.025$ için $z_\alpha = 1.96$ olup, $z_h = 1.06 < 1.96 = z_\alpha$ olduğundan $H_0 : \mu = 45$ yokluk hipotezi $\alpha = 0.025$ anlam düzeyinde de $H_a : \mu > 45$ alternatif hipotezine karşı red edilemez. Bu problem için testin red bölgesi $\{\underset{\sim}{x} : \sqrt{n}\,(\bar{x}_n - 45)/20 > 1.96\}$ olup red bölgesinin alanı Şekil (9.1.4b) de verilmiştir.



Şekil 9.1.4b Örnek (9.1.1a) daki hipotez testi propblemi için testin red bölgesi ve red bölgesinin alanı ($\alpha = 0.025$ *)*

b) Testin gücünün H_0 yokluk hipotezinin red edilmesi olasılığı olduğunu söylemiştik. Testin gücü ileride tekrar tartışılacaktır (Tanım 9.3.2)). $\alpha = 0.05$ için testin güç fonksiyonu ($\beta(\mu)$ ile gösterirsek),

$$\beta_1(\mu) = P_\mu(H_0 \text{ Red}) = P_\mu\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma} > z_\alpha\right) = P_\mu\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu + \mu - \mu_0)}{\sigma} > z_\alpha\right)$$

$$= P_\mu\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} > z_\alpha - \frac{\sqrt{n}\,(\mu - \mu_0)}{\sigma}\right) = P\left(Z > z_\alpha - \frac{\sqrt{n}\,(\mu - \mu_0)}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z > 1.645 - \frac{\sqrt{50}\,(\mu - 45)}{20}\right) = P\big(Z > z_{0.05}(1,\mu)\big)$$

dir. İkinci testin ($\alpha = 0.025$) güç fonksiyonu ise,

$$\beta_2(\mu) = P_\mu(H_0 \text{ Red}) = P\left(Z > 1.96 - \frac{\sqrt{50}\,(\mu - 45)}{20} \right) = P(Z > z_{0.025}(2,\mu))$$

olarak hesaplanmıştır. μ nün değişik değerleri için $z_\alpha(1,\mu)$ ve $z_\alpha(2,\mu)$ değerleri ile bu değerlere karşılık gelen olasılıklar (yani, testin gücü) normal dağılım tablosundan bulunarak aşağıda tablo halinde verilmiştir.

Tablo değerlerinden de görüldüğü gibi testin gücü, α anlam düzeyine bağlıdır ve her iki testin de fonksiyonu μ nün artan bir fonksiyonudur. Bununla birlikte, testin gücü hipotezlere de bağlıdır. Alternatif hipotez $H_a: \mu < \mu_0$ olarak alınmış olsaydı, testin gücü μ nün azalan bir fonksiyonu olurdu.

μ	40	42	44	45	46	48	50	52	54	56	58	60
$z_\alpha(1)$	3.41	2.71	1.99	1.645	1.29	0.58	-0.12	-0.83	-1.54	-2.24	-2.95	-3.66
$\beta_1(\mu)$	0.0003	0.0033	0.023	**0.05**	0.098	0.281	0.548	0.797	0.938	0.987	0.998	0.999
$z_\alpha(2)$	3.73	3.02	2.31	1.96	1.61	0.90	0.19	-0.51	-1.22	-1.93	-2.64	-3.34
$\beta_2(\mu)$	0.000	0.0013	0.01	**0.025**	0.054	0.184	0.425	0.695	0.889	0.973	0.996	0.999

c) Şimdi, kitle varyansının bilinmediğini varsayalım ve $H_0: \mu = 40$ yokluk hipotezini $H_a: \mu > 40$ alternatif hipotezine karşı test etmek isteyelim. Verilerden σ^2 nin tahmin değeri,

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}_n\right)^2 = \frac{1}{49}\sum_{i=1}^{50}\left(x_i - \bar{x}_n\right)^2 = \frac{1}{49}\left[\sum_{i=1}^{50} x_i^2 - 50(\bar{x}_n)^2\right] = 467.84$$

olarak hesaplanmıştır. Bilindiği gibi H_0 hipotezi altında $\sqrt{n}\,(\bar{X}_n - \mu_0)/S_n \sim t_{n-1}$ olup, $t_h = \sqrt{n}\,(\bar{x}_n - \mu_0)/s_n$ olmak üzere, $t_h > t_{n-1}(\alpha)$ ise $H_0: \mu = 40$ hipotezi $H_a: \mu > 40$ alternatif hipotezine karşı $\alpha-$anlam düzeyinde red edilir. Test istatistiğinin değeri

$$t_h = \sqrt{n}\,(\bar{x}_n - \mu_0)/s_n = \sqrt{50}\,(48-40)/21.63 \cong 2.62$$

olup kritik değerler $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.025$ için $t_{49}\left(0.05\right) = 1.6759$, $t_{49}(0.025) = 2.0086$ şeklinde $t-$tablosundan bulunmuştur. Her iki test için de, $t_h > t_{n-1}(\alpha)$ olduğundan, $H_0: \mu = 40$ hipotezi $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.025$ anlam düzeylerinde $H_a: \mu > 40$ alternatif hipotezine karşı red edilir$\oplus$

Uygulamada, iki kitlenin beklenen değerlerinin karşılaştırılması da varyansın bilinip bilinmemesi durumuna göre yukarıdaki gibi yapılır. $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ dağılımından bir örneklem

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ve bu örneklemden bağımsız $N(\mu_y, \sigma_y^2)$ dağılımından başka bir örneklem de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ olsun. $H_0 : \mu_x = \mu_y$ yokluk hipotezinin (veya $H_0 : \mu_x - \mu_y = 0$ hipotezinin) $H_a : \mu_x > \mu_y$, $H_a : \mu_x < \mu_y$ ve $H_a : \mu_x \neq \mu_y$ alternatif hipotezlerine karşı testi problemini inceleyelim. $\mu = \mu_x - \mu_y$ denirse, problem $H_0 : \mu = 0$ yokluk hipotezinin $H_a : \mu > 0$, $H_a : \mu < 0$ ve $H_a : \mu \neq 0$ alternatif hipotezlerine karşı test edilmesine dönüşür. Buradan,

$$E(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) = E(\bar{X}_n) - E(\bar{Y}_m) = \mu_x - \mu_y = \mu$$

ve

$$Var(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) = Var(\bar{X}_n) + Var(\bar{Y}_m) = (\sigma_x^2 / n) + (\sigma_y^2 / m)$$

olduğundan,

$$\bar{X}_n - \bar{Y}_m \sim N(\mu_x - \mu_y,\ (\sigma_x^2 / n) + (\sigma_y^2 / m))$$

ve

$$(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) / \sqrt{(\sigma_x^2 / n) + (\sigma_y^2 / m)} \sim N(0,1)$$

dir. Ayrıca $(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) / \sqrt{(\sigma_x^2 / n) + (\sigma_y^2 / m)}$ istatistiğinin gözlenen değerini

$$z_h = (\bar{x}_n - \bar{y}_m) / \sqrt{(\sigma_x^2 / n) + (\sigma_y^2 / m)}$$

ile gösterelim.

A) Her iki kitlenin de varyansı biliniyor olsun. Bu durumda,

1. $H_0 : \mu_x = \mu_y$ yokluk hipotezi $H_a : \mu_x > \mu_y$ alternatif hipotezine karşı $\alpha-$anlam düzeyinde testi için test kuralı “$z_h > z_\alpha$ ise H_0 yokluk hipotezi red edilir” şeklinde olur.

2. $H_0 : \mu_x = \mu_y$ hipotezi $H_a : \mu_x < \mu_y$ alternatif hipotezine karşı $\alpha-$anlam düzeyinde test edilmek istendiğinde ise test kuralı “$z_h < -z_\alpha$ için H_0 hipotezi red edilir” şeklindedir.

3. $H_0 : \mu_x = \mu_y$ hipotezi $H_a : \mu_x \neq \mu_y$ alternatif hipotezine karşı $\alpha-$anlam düzeyinde test edilmek istenirse, test kuralı “$| z_h | > z_{\alpha/2}$ ise H_0 yokluk hipotezi red edilir” şeklinde oluşturulur.

B) Kitlelerin varyansları bilinmiyor olsun. Bu durumda, kitle varyanslarının durumuna göre uygulanacak testler farklılıklar gösterir. Kitle varyansları aynı ($\sigma_x^2 = \sigma_y^2$) ise varyans gerek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ gerekse $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ örneklem değerlerinden tahmin edilebilir. Ancak, her iki kitlenin de varyansı aynı olduğundan varyansı iki örneklem de kullanılarak (toplam $n+m$ örnek değer ile) tahmin edildiğinde daha iyi bir sonuç vermesi beklenir. Buna göre, σ^2 yi $X_1, X_2, \ldots, X_n$ örnekleminden $S^2_{n,X}$ ile, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ örnekleminden de $S^2_{m,Y}$ ile tahmin ederiz. Bu iki örneklemin beraber kullanılması halinde ise σ^2,

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S^2_{n,X} + (m-1)S^2_{m,Y}}{n+m-2}$$

ile tahmin edilir. İki örneklem bir birinden bağımsız olduğundan S_P^2 de σ^2 nin yansız bir tahmin edicisidir. Diğer taraftan, $Var(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) = (\sigma_x^2 / n) + (\sigma_y^2 / m) = \sigma^2((1/n) + (1/m))$ olup, $[(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) - (\mu_x - \mu_y)] / [S_p \sqrt{(1/n) + (1/m)}\,] \sim t_{n+m-2}$ dir. Buna göre,

$$t_h = [(\bar{x}_n - \bar{y}_m) - (\mu_x - \mu_y)] / [s_p \sqrt{(1/n) + (1/m)}\,]$$

olmak üzere,

1. $H_0 : \mu_x = \mu_y$ yokluk hipotezinin $H_a : \mu_x > \mu_y$ alternatif hipotezine karşı $\alpha -$anlam düzeyinde testi problemi için test kuralı "$t_h > t_{n+m-2}(\alpha)$ ise H_0 hipotezi red edilir" şeklindedir.

2. $H_0 : \mu_x = \mu_y$ yokluk hipotezi $H_a : \mu_x < \mu_y$ alternatif hipotezine karşı $\alpha -$anlam düzeyinde test edilmek istenirse test kuralı "$t_h < -t_{n+m-2}(\alpha)$ ise H_0 hipotezi red edilir" şeklinde oluşturulur.

3. $H_0 : \mu_x = \mu_y$ yokluk hipotezi $H_a : \mu_x \neq \mu_y$ alternatif hipotezine karşı $\alpha -$anlam düzeyinde test edilmek istendiğinde test kuralı, "$|t_h| > t_{n+m-2}(\alpha / 2)$ ise H_0 yokluk hipotezi red edilir" şeklinde olur.

Örnek 9.1.2 Bir istatistik dersinin sınavı aynı anda iki farklı gruba uygulansın. Bu gruplardan rasgele seçilen 16 şar öğrencinin sınav notları aşağıda verilmiştir.

A Grubu (X)								B Grubu (Y)							
60	65	60	70	75	80	65	69	70	72	65	64	50	62	67	66
83	78	63	67	69	73	79	67	49	84	73	67	48	66	63	72

Verilere ait bazı özet bilgiler;

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1123\,, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 79587\,, \quad \bar{x}_n = 70.1875\,, \quad s^2_{n,X} = 51.095$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1038\,, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 68682\,, \quad \bar{y}_m = 64.8750, \quad s^2_{m,Y} = 89.45$$

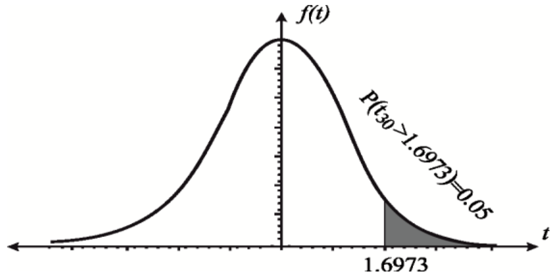
ve

$$s_p^2 = \frac{(n-1)s_{n,X}^2 + (m-1)s_{m,Y}^2}{n+m-2} = \frac{(16-1)s_{n,X}^2 + (16-1)s_{m,Y}^2}{(16+16)-2} = \frac{s_{n,X}^2 + s_{m,Y}^2}{2} = 70.27$$

olarak hesaplanmıştır. Buna göre, birleştirilmiş standart hata $s_p = 8.38$ olup $H_0 : \mu_x = \mu_y$ yokluk hipotezinin $H_a : \mu_x > \mu_y$ alternatif hipotezine karşı testi problemini ele alalım. Test istatistiğinin değeri,

$$t_h = \frac{(\overline{x}_n - \overline{y}_m) - (\mu_x - \mu_y)}{s_p\sqrt{(1/n)+(1/m)}} = \frac{(70.1875 - 64.8750)}{8.38\sqrt{(1/16)+(1/16)}} = \frac{\sqrt{16}\left(70.1875 - 64.8750\right)}{8.38\sqrt{2}} \cong 1.8$$

olup, kritik değer $\alpha = 0.05$ için $t-$dağılım tablosundan $t_{30}(0.05) = 1.6973$ olarak bulunur. Buna göre, $t_h = 1.8 > 1.6973 = t_{30}(\alpha)$ olduğundan, $H_0 : \mu_x = \mu_y$ hipotezi $H_a : \mu_x > \mu_y$ alternatif hipotezine karşı $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde red edilir. Bu hipotez testi problemine ait testin red bölgesi ve red bölgesinin alanı Şekil (9.1.5) de verilmiştir.



Şekil 9.1.5 Örnek (9.1.2) deki hipotez testi propblemi için testin red bölgesi ve red bölgesinin alanı ($\alpha = 0.05$)

Yani, $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde birinci grup ikinci gruba göre ortalamada daha iyidir (daha yüksek beklenen değere sahiptir) $\oplus$

C) Bir önceki örnekte, iki kitlenin varyanslarının aynı olduğu kabul edildi. Kitle varyansları farklı ise, başka testlerin uygulanması gerektiğini söylemiştik. Öyleyse, böyle bir test yapılmadan önce, kitle varyanslarının aynı olup olmadığının sınanması ($H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_x^2$ yokluk hipotezinin $H_a : \sigma_x^2 \neq \sigma_x^2$ alternatif hipotezine karşı test edilmesi) gerekir. Bunun için, $S_{n,X}^2$ ve $S_{m,Y}^2$ örneklem varyanslarının oranına bakmak yeterlidir. $S_{n,X}^2$ ve $S_{m,Y}^2$ oranlarının dağılımının serbestlik dereceleri $n-1$ ve $m-1$ olan F olduğunu biliyoruz. $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ yokluk hipotezi altında (ortak varyansa σ^2 diyelim),

$$F = \frac{S_{n,X}^2}{S_{n,Y}^2} = \frac{[(n-1)S_{n,X}^2 / \sigma^2]/(n-1)}{[(m-1)S_{m,Y}^2 / \sigma^2]/(m-1)} \sim F\left(n-1, m-1\right)$$

dir. Burada, F istatistiği $F = \max\{S_{n,X}^2, S_{m,Y}^2\} / \min\{S_{n,X}^2, S_{m,Y}^2\}$ olarak alındığında, maksimuma karşılık gelen serbestlik derecesi df_1, minimum olana karşılık gelen serbestlik derecesi de df_2 olmak üzere, $F = \max\{S_{n,X}^2, S_{m,Y}^2\} / \min\{S_{n,X}^2, S_{m,Y}^2\} \sim F(df_1, df_2)$ olur.

Buradan, $\alpha-$anlam düzeyinde, $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ hipotezi $H_a : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ alternatif hipotezine karşı test edilmek istenirse, F istatistiğinin gözlem (hesaplanan) değeri $s_{n,X}^2$ ve $s_{m,Y}^2$ örneklem varyanslarının hesaplanan değerleri ve $F_h = \max\{s_{n,X}^2, s_{m,Y}^2\} / \min\{s_{n,X}^2, s_{m,Y}^2\}$ olmak üzere, $F_h > F^{1-\alpha/2}(df_1, df_2)$ ise $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ yokluk hipotezi red edilir. Yani kitle varyansları farklıdır.

Yukarıdaki örnekte (Örnek (9.1.2)) varyansların eşit olduğu varsayılmış ve varyanslar $s_{n,X}^2 = 51.095$ ve $s_{m,Y}^2 = 89.45$ olarak gözlenmişti. Buradan,

$$F_h = \frac{\max\{s_{n,X}^2, s_{m,Y}^2\}}{\min\{s_{n,X}^2, s_{m,Y}^2\}} = \frac{\max\{51.095, 89.45\}}{\min\{51.095, 89.45\}} = \frac{89.45}{51.095} = 1.75 < 2.40 = F^{0.95}(15,15)$$

olduğundan $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ yokluk hipotezi red edilemez. Yani, varyansların aynı olduğu varsayımı istatistiki olarak anlamlıdır.

Aynı kitle üzerinden, farklı zamanlarda iki ayrı deneyin yapıldığını düşünelim. Örneğin, bir istatistik dersinde öğrencilerin arasınav ortalamaları ile belli bir süre sonra uygulanan final sınavlarının ortalamalarının karşılaştırılması, öğrencilerin başarılarında bir gelişmenin olup olmadığının sınanmasıdır. Bu durumda, verileri iki ayrı veri gibi değerlendirmek yerine, aradaki farkların sıfır olduğunun test edilmesi daha anlamlı olur (belli bir artış da dikkate alınabilir). Bununla ilgili aşağıdaki örneği ele alalım.

Örnek 9.1.3 Bir istatistik dersinden rasgele seçilen 16 öğrencinin arasınav ve final notları aşağıdadır. Buna göre, arasınavdan sonra öğrencilerin başarılarında bir artış olup olmadığını $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde test etmek isteyelim. İki ayrı örnek aynı kitle üzerinden alındığı için, varyansları karşılaştırmaya gerek yoktur. Elde edilen farklardan oluşan verilere ait varyans tahmininin dikkate alınması yeterlidir. Öğrencilerin başarılarında bir gelişmenin sınanması demek, $H_0 : \mu_x = \mu_y$ yokluk hipotezinin $H_a : \mu_x < \mu_y$ (veya $H_a : \mu_x > \mu_y$) alternatif hipotezine karşı test edilmesi demektir. Bu problem yerine, $Z_i = Y_i - X_i$ fark verileri ($H_0 : \mu_x = \mu_y$ hipotezi altında $E(\bar{X}_n - \bar{Y}_n) = 0$) kullanılarak $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ örneklemine göre, $H_0 : \mu = 0$ hipotezi $H_a : \mu > 0$ (veya $H_a : \mu < 0$) alternatif hipotezine karşı test edilir.

Arasınav, X						Final, Y						Fark, $Z = Y - X$					
70	72	65	64	50	62	60	65	60	70	75	80	-10	-7	-5	6	25	18
67	66	49	84	73	67	65	69	83	78	63	67	-2	3	34	-6	-10	0
48	66	63	72			69	73	79	67			21	7	16	-5		

Buna göre, fark verilerine ait gözlenen örneklem ortalama ve varyansı

$$\bar{z}_n = 5.3125 \text{ ve } s_z^2 = (1/15)\sum_{i=1}^{16}\left(z_i - \bar{z}_n\right)^2 = 185.56$$

olarak hesaplanmıştır. $\alpha = 0.05$ için tablo değeri $t_{15}(0.05) = 1.753$ olup

$$t_h = \sqrt{n}\,\bar{z}_n / s_z = 4(5.3125)/13.62 = 1.56 < 1.753 = t_{15}(0.05)$$

olduğundan $H_0 : \mu = 0$ hipotezi $H_a : \mu > 0$ alternatif hipotezine karşı red edilemez. Yani, öğrencilerin arasınav ortalamaları ile final ortalamaları aynıdır. Başka bir deyişle, öğrenciler arasınavdan sonra başarılarını geliştirmek için hiçbir çaba göstermemiştir. Ayrıca, $|t_h| = 1.56 < 2.131 = t_{15}(0.025)$ olduğundan $H_0 : \mu = 0$ hipotezi, aynı anlam düzeyinde $H_a : \mu \neq 0$ alternatif hipotezine karşı da red edilemez $\oplus$