KONU 4: DOĞRUSAL PROGRAMLAMA MODELİ İÇİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ – I

4.1. Dışbükeylik ve Uç Nokta

Bir d.p.p.' de model kısıtlarını aynı anda sağlayan $\mathbf{X}=\left[X_1\ X_2 \ldots\ X_n\right]'$ karar değişkenleri vektörüne ***çözüm*** denir. Eğer bu $\mathbf{X}$ vektörü, kısıtlar ile birlikte negatif olmama kısıtlayıcısını da sağlıyorsa ***uygun çözüm*** adını alır. ***Uygun çözüm alanı***, uygun çözümlerin oluşturduğu kümedir (bütün kısıtları sağlayan noktalar kümesidir). Uygun çözüm alanındaki $\mathbf{X}$ vektörüne göre amaç fonksiyonunun en büyük ve en küçük değerini aldığı çözüm ***en iyi çözüm*** olarak adlandırılır. ***En iyi çözüm değeri***, en iyi çözüm vektörüne karşılık gelen fonksiyon değeridir. Bir d.p.p.' ni çözmek, tüm uygun çözümlerin içinden en iyisini belirlemektir.

Bir d.p.p.' nin uygun çözüm alanı dışbükey kümedir.

Dışbükey (konveks) bileşim: $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ aynı kümenin farklı çözüm noktaları iken

λ_i , $i=1,2,\ldots,n$ ve $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ olmak üzere,

$$\mathbf{X}_0=\lambda_1\mathbf{X}_1+\lambda_2\mathbf{X}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{X}_n \tag{4.1}$$

biçiminde elde edilen $\mathbf{X}_0$'a verilen noktaların dışbükey (konveks) bileşimi denir.

Örnek:

$\mathbf{X}_1=\left[1\ \ 0\ \ 1\right]$ ve $\mathbf{X}_2=\left[-1\ \ 2\ \ 1\right]$ çözüm vektörlerinin dışbükey bileşimi $0\leq\lambda_i\leq 1$, $i=1,2,\ldots,n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\mathbf{X}&=\lambda_1\mathbf{X}_1+\lambda_2\mathbf{X}_2\\ &=\lambda\left[1\ \ 0\ \ 1\right]+\left(1-\lambda\right)\left[-1\ \ 2\ \ 1\right]\\ &=\left[\lambda\ \ 0\ \ \lambda\right]+\left[\lambda-1\quad 2-2\lambda\quad 1-\lambda\right]\\ &=\left[2\lambda-1\quad 2-2\lambda\quad 1\right]\end{aligned}$$

olup, λ' nın $\left[0,1\right]$ aralığındaki her bir değeri için $\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ vektörlerini birleştiren doğru parçası üzerinde yeni bir çözüm vektörü bulunur.

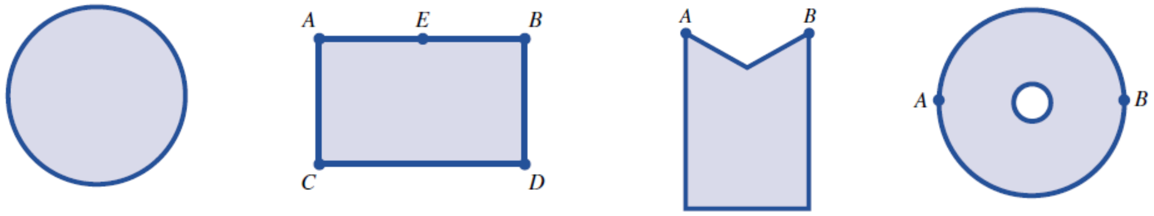
$$\lambda=0\Rightarrow\mathbf{X}=\mathbf{X}_2=\left[-1\ \ 2\ \ 1\right]$$
$$\lambda=1\Rightarrow\mathbf{X}=\mathbf{X}_1=\left[1\ \ 0\ \ 1\right]$$
$$\lambda=\frac{1}{2}\Rightarrow\mathbf{X}=\left[0\ \ 1\ \ 1\right]$$

Dışbükey küme: $\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ aynı S kümesinin farklı iki elemanı iken, $\forall\ \mathbf{X}_1 \neq \mathbf{X}_2$ için

$$\mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}_2 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2 \quad , \quad 0 \le \lambda \le 1 \tag{4.2}$$

biçiminde elde edilen $\mathbf{X}$' ler de S kümesinin elemanı ise, S' ye dışbükey küme denir.

Aşağıdaki Şekil 4.1' de R^2' de yer alan dışbükey ve dışbükey olmayan (içbükey) küme örnekleri yer almaktadır. Burada, (a) ve (b) dışbükey kümeleri, (c) ve (d) dışbükey olmayan (içbükey) kümeleri göstermektedir.



(a) **(b)** **(c)** **(d)**

Şekil 4.1. R^2' de dışbükey ve dışbükey olmayan (içbükey) küme örnekleri

Bir d.p.p.' nin uygun çözüm alanının dışbükey olması, farklı iki uygun çözüme erişildiğinde, bunları birleştiren doğru parçası üzerindeki her noktanın da uygun çözüm olduğunu gösterir.

Uç nokta: Bir kümenin farklı iki noktasının dışbükey bileşimi olarak yazılamayan noktası var ise, buna uç nokta (köşe nokta) denir.

Uygun çözüm alanının uç noktaları, amaç fonksiyonunun en iyi değerini sonlu elemandan oluşan bir küme içinde arama olanağı vermesi bakımından önemlidir. Düzlemde bir üçgenin, karenin, üç boyutlu uzayda bir prizma ve piramidin köşeleri birer uç noktadır.

Uç nokta ile ilgili aşağıdaki iki özellik d.p.p.' nin çözümünde önem taşır. Bunlar:

i. Eğer, d.p.p.' nin bir uç noktası var ise bu nokta uygun çözüm alanının bir uç noktasıdır.
ii. Amaç fonksiyonu, en iyi değerini birden fazla uç noktada alıyorsa bu noktaların her dışbükey bileşimi de en iyi çözümdür.

Bir d.p.p.' nin çözümü ile ilgili önemli özellikler:

- Her d.p.p.' nin en iyi çözümü olmayabilir.
- En iyi çözümün varlığı kısıtlara bağlıdır.
- Uygun çözüm alanının durumu en iyi çözümün varlığını belirler.

- Uygun çözüm alanı boş küme ise çözüm yoktur.
- Amaç fonksiyonu uygun çözüm alanı üzerinde istenen yönde sınırsız ise en iyi çözüm bulunamaz.
- Uygun çözüm alanı, amaç fonksiyonu minimum yapılmak istendiğinde alttan, maksimum yapılmak istendiğinde üstten sınırlı olmalıdır.
- Uygun çözüm alanı boş olmadığı halde, amaç fonksiyonunun uygun çözüm alanında sonlu olmadığı durumlarda sınırsız çözüm vardır.
- En iyi çözüm, uygun çözüm alanının sınırlarında oluşur. Hiç bir zaman uygun çözüm alanının iç noktalarında oluşmaz.

4.2. İki Değişkenli Doğrusal Programlama Problemlerinin Grafiksel Çözümü

Bir d.p.p.' de karar değişkeni sayısı iki olduğunda uygun çözüm alanının grafiğini çizmek mümkündür. Doğrusal kısıtların her biri, düzlemde bir doğru oluşturur. Bu doğrunun ikiye ayırdığı düzlemin bir bölgesi ilgili kısıtı sağlayan çözüm vektörünü ($\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]$) verir. Modelin tüm kısıtları aynı koordinat sisteminde çizilerek, kısıtları birlikte gerçekleştiren $[x_1 \ x_2]$ ikililerinin oluşturduğu küme, uygun çözüm alanı olarak belirlenir.

İki değişkenli d.p.p.' nin amaç fonksiyonu değeri $c_1, c_2 \in R$ olmak üzere,

$$z_0 = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{4.3}$$

biçiminde olur. Her bir $[x_1 \ x_2]$ ikilisi bunlara karşılık gelen z_0 amaç fonksiyon değeri ile birlikte ele alındığında, düzlemden üç boyutlu uzaya geçiş yapılır. Buna göre, düzlemdeki

$$c_1x_1 + c_2x_2 = sabit \tag{4.4}$$

doğrusu, z_0' ın verilen sabit değere eşit olduğu izdüşüm doğrusudur. Farklı z_0 değerlerine karşı gelen izdüşüm doğruları çizildiğinde, düzlemde birbirine paralel doğru demeti elde edilir. Artan z_0 değerlerine karşı gelen paralel doğru demetinin, uygun çözüm alanına ilk girdiği nokta, $\min z_0$ için, uygun öçzüm alanını son terk ettiği nokta $\max z_0$ için en iyi çözümdür.

Yukarıdaki açıklamalara göre, iki değişkenli bir d.p.p.' nin grafiksel çözümünde yapılacak işlem adımları aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Adım 1: Problemdeki her bir doğrusal kısıt bir eşitlik olarak ele alınıp, karşı gelen doğrunun grafiği çizilerek, kısıtları ortak sağlayan $[x_1\ x_2]$ ikililerinin olduğu bölge taranır. Bu bölge "uygun çözüm alanı" adını alır. Adım 2' ye geçilir. Aksi halde, modelin kısıtlarını birlikte sağlayan hiçbir $[x_1\ x_2]$ ikilisi yoktur denir ve durulur. Bu durum, "uygun çözüm alanı boş kümedir, çözümsüz model sözkonusudur" demektir.

Adım 2: $z_0 = c_1x_1 + c_2x_2$ amaç fonksiyonuna bir başlangıç z_0 değeri verilerek, karşı gelen doğrunun grafiği çizilir. z_0'a farklı değerler verilerek, başlangıç doğruya paralel doğrular çizilir. Artan z_0 değerlerine karşı gelen paralel doğruların, uygun çözüm alanına ilk girdiği nokta, $\min z_0$ için, uygun çözüm alanını son terk ettiği nokta $\max z_0$ için en iyi çözümdür. Durulur. Aksi halde Adım 3' e geçilir.

Adım 3: Paralel doğrular, z_0' ın azalan değerlerine göre sonlu bir en küçük değere sahip değilse $\min z_0$ için, z_0' ın artan değerlerine göre sonlu bir en büyük değere sahip değilse $\max z_0$ için sınırsız çözüm vardır. Durulur. Bu durumda, amaç fonksiyonu uygun çözüm alanı üzerinde istenen yönde sonlu olmadığından karar vericiye en iyi çözüm önerilemez.

Problemin grafiksel çözümü araştırılırken, paralel doğruların uygun çözüm alanına ilk girişi veya son çıkışı bir doğru parçası boyunca oluyorsa, birden fazla uç noktada en iyi çözüm var demektir. Bu durumda, ilgili doğru parçası üzerindeki her $[x_1\ x_2]$ ikilisi modelin en iyi çözümü olup, "alternatif (seçenek) çözüm" durumu söz konusudur.

Örnek 1: (Uygun çözüm alanı ve en iyi çözümün var olduğu durum)

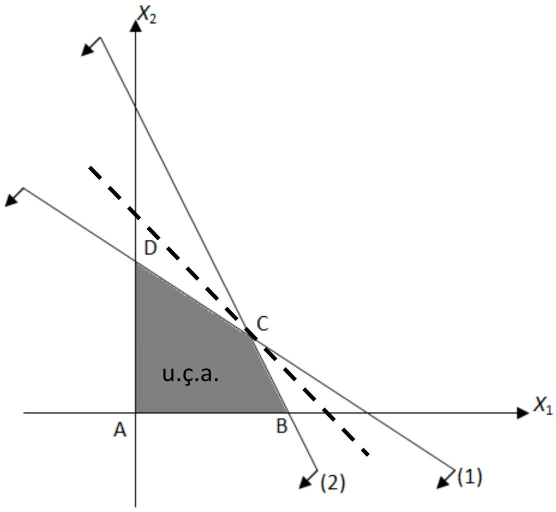
$$
\begin{aligned}
P:\ \ & \max\ Z = 3X_1 + 2X_2 \\
& 2X_1 + 3X_2 \le 12 \\
& 2X_1 + X_2 \le 8 \\
& X_1, X_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlı d.p.p.' nin grafiksel yöntem ile uygun çözüm alanını belirleyerek, en iyi çözüm değerini elde ediniz.

Çözüm:

<u>Kısıt 1:</u> $2X_1 + 3X_2 = 12 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 0,\ X_2 = 4 \\ X_1 = 6,\ X_2 = 0 \end{cases}$

<u>Kısıt 2:</u> $2X_1 + X_2 = 8 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 0,\ X_2 = 8 \\ X_1 = 4,\ X_2 = 0 \end{cases}$



Grafik 1. Primal problemin uygun çözüm alanı (u.ç.a.)

Tablo 1. Primal problemin uç nokta ve çözüm değerleri

Uç nokta	Değişken vektörü değeri	Amaç fonksiyon değeri
A	(0,0)	0
B	(4,0)	12
C	**(3,2)**	**13**
D	(0,4)	8

Grafiksel yöntem ile elde edilen sonuçlara göre, verilen primal d.p.p.' nin optimal çözüm vektörü Grafik 1' deki C noktası olup, $\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$ ve amaç fonksiyon değeri Z^*= 13 tür.

Örnek 2: (Uygun çözüm alanı ve alternatif/seçenek çözümün var olduğu durum)

$$
\begin{aligned}
P:\ & \max\ Z = 6X_1 + 3X_2 \\
& 2X_1 + X_2 \le 8 \\
& 2X_1 + 3X_2 \le 12 \\
& X_2 \le 3 \\
& X_1, X_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

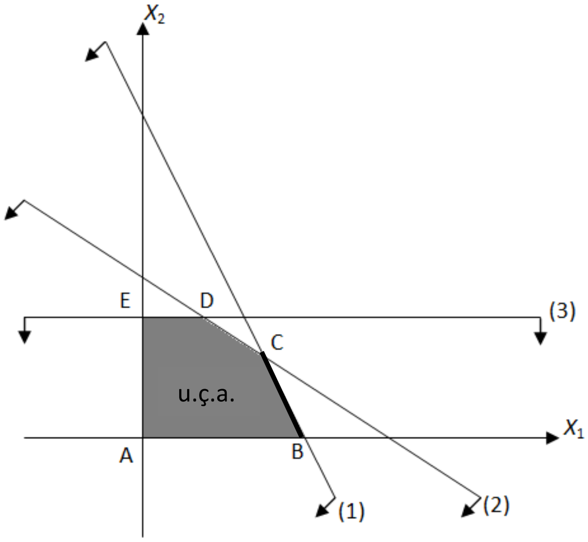
biçiminde tanımlı d.p.p.' nin grafiksel yöntem ile uygun çözüm alanını belirleyerek, en iyi çözüm değerini elde ediniz.

Çözüm:

<u>Kısıt 1:</u> $2X_1 + X_2 = 8 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 0,\ X_2 = 8 \\ X_1 = 4,\ X_2 = 0 \end{cases}$

Kısıt 2: $2X_1 + 3X_2 = 12 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 0,\ X_2 = 4 \\ X_1 = 6,\ X_2 = 0 \end{cases}$

Kısıt 3: $X_2 = 3$



Grafik 2. Primal problemin uygun çözüm alanı (u.ç.a.)

Tablo 2. Primal problemin uç nokta ve çözüm değerleri

Uç nokta	Değişken vektörü değeri	Amaç fonksiyon değeri
A	(0,0)	0
B	(4,0)	24
C	**(3,2)**	**24**
D	**(1.5,0)**	**9**
E	(0,3)	9

Grafiksel yöntem ile elde edilen sonuçlara göre, Grafik 2' deki [BC] doğru parçası üzerindeki tüm noktalar verilen primal d.p.p.' nin optimal çözüm değerleridir. [BC] doğru parçası üzerindeki tüm noktalar, probleme aynı çözüm sonucunu vereceğinden seçenek (alternatif) çözüm olarak adlandırılır.

Örnek 3: (Sınırsız Çözüm)

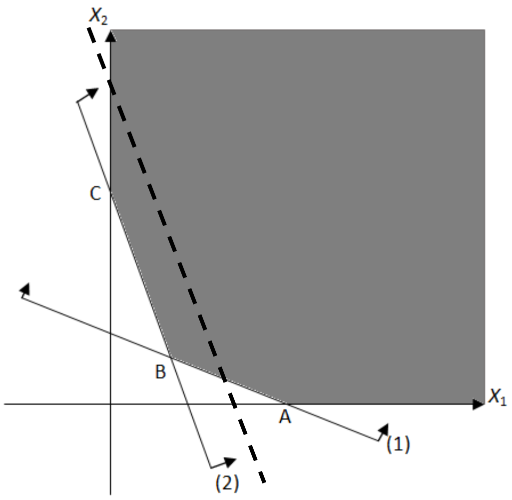
$$\begin{aligned} P:\ & \max\ Z = 3X_1 + X_2 \\ & 2X_1 + 5X_2 \geq 10 \\ & 3X_1 + X_2 \geq 6 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı d.p.p.' nin grafiksel yöntem ile en iyi çözüm değerini elde ediniz.

Çözüm:

Kısıt 1: $2X_1 + 5X_2 = 10 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 0,\ X_2 = 2 \\ X_1 = 5,\ X_2 = 0 \end{cases}$

Kısıt 2: $3X_1 + X_2 = 6 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 0,\ X_2 = 6 \\ X_1 = 2,\ X_2 = 0 \end{cases}$



Grafik 3. Primal problemin kısıtlarının oluşturduğu alan

Tablo 3. Primal problemin uç nokta ve çözüm değerleri

Uç nokta	Değişken vektörü değeri	Amaç fonksiyon değeri
A	(5,0)	15
B	(20/13, 18/13)	24
C	(0,6)	6

Grafiksel yöntem ile elde edilen sonuçlara göre, Grafik 3' de gösterilen kısıtların ve negatif olmama kısıtlayıcılarının oluşturduğu alan kapalı olmadığından karar değişkenlerinin değeri sonsuza kadar artırılabilir. Karar değişkenlerinin değeri büyüdükçe amaç fonksiyonun değeri de artacaktır. Bu durumda verilen primal problemin sınırsız çözümü vardır.

Örnek 4: (Uygun çözüm alanı yok)

$$
\begin{aligned}
P:\ \ &\max\ Z = 3X_1 + 5X_2 \\
&5X_1 + 10X_2 \leq 400 \\
&6X_1 + 4X_2 \leq 240 \\
&X_1 + X_2 \geq 90 \\
&X_1, X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

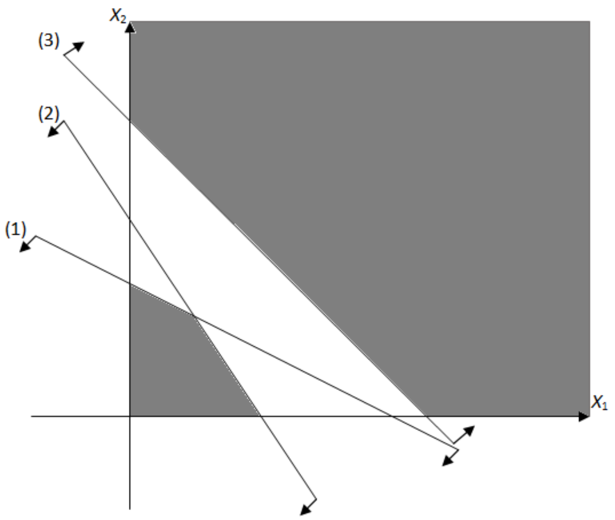
biçiminde tanımlı d.p.p.' nin grafiksel yöntem ile en iyi çözüm değerini elde ediniz.

Çözüm:

Kısıt 1: $5X_1 + 10X_2 = 400 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 0,\ X_2 = 40 \\ X_1 = 80,\ X_2 = 0 \end{cases}$

Kısıt 2: $6X_1 + 4X_2 = 240 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 0,\ X_2 = 60 \\ X_1 = 40,\ X_2 = 0 \end{cases}$

Kısıt 3: $X_1 + X_2 = 90 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 0,\ X_2 = 90 \\ X_1 = 90,\ X_2 = 0 \end{cases}$



Grafik 4. Primal problemin kısıtlarının oluşturduğu alan

Grafiksel yöntem ile elde edilen sonuçlara göre, Grafik 4' de gösterilen kısıtların ve negatif olmama kısıtlayıcılarını aynı anda sağlayan bir kapalı bölge yoktur. Problem için kapalı bir uygun çözüm alanı olmadığından, problemin uygun çözümü yoktur.

Örnek 5: (Uygun çözüm alanı yok)

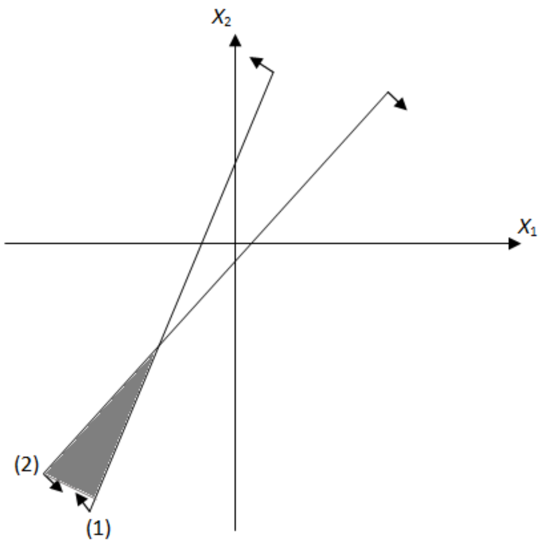
$$
\begin{aligned}
P:\ \min\ Z &= 2X_1 + 3X_2 \\
X_1 - X_2 &\geq 1 \\
-2X_1 + X_2 &\geq 4 \\
X_1, X_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlı d.p.p.' nin grafiksel yöntem ile en iyi çözüm değerini elde ediniz.

Çözüm:

<u>Kısıt 1:</u> $X_1 - X_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 0,\ X_2 = -1 \\ X_1 = 1,\ X_2 = 0 \end{cases}$

<u>Kısıt 2:</u> $-2X_1 + X_2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 0,\ X_2 = 4 \\ X_1 = -2,\ X_2 = 0 \end{cases}$



Grafik 5. Primal problemin kısıtlarının oluşturduğu alan

Grafiksel yöntem ile elde edilen sonuçlara göre, Grafik 5' de gösterilen kısıtların ve negatif olmama kısıtlayıcılarını aynı anda sağlayan bir kapalı bölge yoktur.

Örnek 6: (Artık kısıt)

$$
\begin{aligned}
P:\ & \max\ Z = 6X_1 + 12X_2 \\
& 2X_1 + 3X_2 \leq 12 \\
& X_2 \leq 3 \\
& X_1 + X_2 \leq 8 \\
& X_1, X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

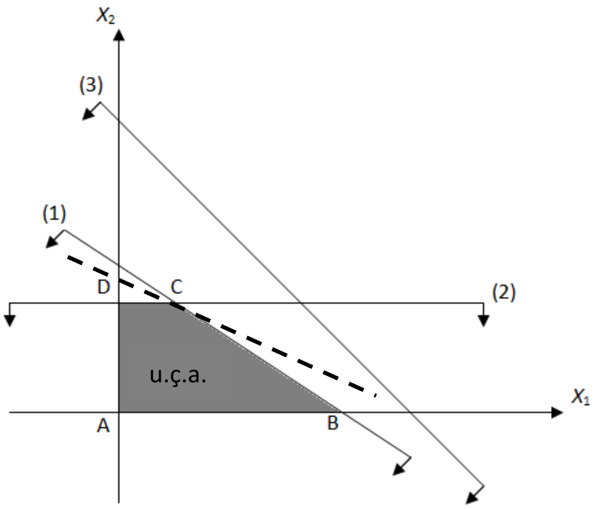
biçiminde tanımlı d.p.p.' nin grafiksel yöntem ile en iyi çözüm değerini elde ediniz.

Çözüm:

Kısıt 1: $2X_1 + 3X_2 = 12 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 0,\ X_2 = 4 \\ X_1 = 6,\ X_2 = 0 \end{cases}$

Kısıt 2: $X_2 = 3$

Kısıt 3: $X_1 + X_2 = 8 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 0,\ X_2 = 8 \\ X_1 = 8,\ X_2 = 0 \end{cases}$



Grafik 6. Primal problemin uygun çözüm alanı (u.ç.a.)

Tablo 4. Primal problemin uç nokta ve çözüm değerleri

Uç nokta	Değişken vektörü değeri	Amaç fonksiyon değeri
A	(0,0)	0
B	(6,0)	36
C	**(3/2,3)**	**45**
D	(0,3)	36

Grafiksel yöntem ile elde edilen sonuçlara göre, verilen primal d.p.p.' nin optimal çözüm vektörü Grafik 6' daki C noktası olup, $\mathbf{X}^* = [3/2 \quad 3]$ ve amaç fonksiyon değeri Z^*= 45 tir. Uygun çözüm alanı 1. ve 2. kısıtlar ile belirlenmiştir. Grafik 6' da belirtilen bölgenin elde edilmesinde 3. kısıt aktif olamayan kısıt görünümündedir. Buna göre, 3. kısıt artık kısıt olarak adlandırılır.

4.3. Grafik Yöntem ile Doğrusal Programlama Problemlerinin Çözümünde Karşılaşılan Durumlar

- Uygun çözümlerin bulunması durumunda, uygun çözüm alanı konvekslik özelliğine sahiptir. Uygun çözüm alanının sınırlarını doğrular oluşturur.
- $z_0 = c_1x_1 + c_2x_2$ ile tanımlı amaç fonksiyonunun sabit bir z_0 değeri için, amaç fonksiyonu bir doğru ile gösterilir. Uygun çözüm alanının en az bir uç noktası en iyi çözümdür.
- Birden fazla en iyi çözüm olması durumunda (seçenek çözümler), amaç fonksiyonu birden fazla uç noktada en iyi değerine ulaşır.
- Amaç fonksiyonunun istenildiği kadar büyük yapılabildiği durumlarda, hiçbir uç nokta en iyi çözüm olamaz. Sınırsız çözüm durumu söz konusudur. Sınırsız çözümler en iyi çözüm olarak adlandırılamazlar. Çünkü en iyi çözüm ancak amaç fonksiyonu sonlu değerli olduğunda bulunabilir.

Karar değişkeni sayısının ikiden fazla olması durumunda grafiksel yöntem ile en iyi çözüme ulaşmak zor olacaktır. Bu nedenle d.p.p.’ nin çözümü için yeni yaklaşımlar gerekmektedir. Bu çerçevede geliştirilmiş en yaygın kullanılan yöntem, “Simpleks Yöntem” dir.