KONU 8: SİMPLEKS TABLODA KARŞILAŞILAN BAZI DURUMLAR - II

8.1. İki Evreli Yöntem

Standart biçime dönüştürülmüş

$$\begin{aligned} &\min/\max\ Z=\mathbf{cX} \\ &A\mathbf{X}=\mathbf{b} \\ &\mathbf{X}\geq\mathbf{0} \end{aligned} \tag{8.1}$$

biçiminde tanımlı d.p.p.' nin en iyi çözüm değerinin elde edilmesinde, A katsayılar matrisinde birim matris olmaması durumunda, simpleks algoritmasının kullanımı için geliştirilen bir diğer yaklaşım "İki Evreli Yöntem" dir. Yöntemin birinci evresinde yapay değişkenler sıfıra götürülerek verilen d.p.p.' ne bir başlangıç temel uygun çözüm araştırılır. İkinci evrede, hiç yapay vektör içermeyen ya da sıfır düzeyde yapay vektör içeren bir temel uygun çözüm ile başlanarak, (8.1) ifadesi ile tanımlı d.p.p.' nin çözümü bulunur. Buna göre, en iyi değeri elde edilmek istenilen d.p.p.

$$\begin{aligned} &\min\ Z=\mathbf{cX}+\mathbf{q} \\ &A\mathbf{X}+\mathbf{q}=\mathbf{b} \\ &\mathbf{X},\ \mathbf{q}\geq\mathbf{0} \end{aligned} \tag{8.2}$$

veya

$$\begin{aligned} &\max\ Z=\mathbf{cX}-\mathbf{q} \\ &A\mathbf{X}+\mathbf{q}=\mathbf{b} \\ &\mathbf{X},\ \mathbf{q}\geq\mathbf{0} \end{aligned} \tag{8.3}$$

biçiminde olur.

İlk evrede orijinal değişkenlerin ve problemi standart hale getirmek için kullanılan değişkenlerin fiyatları sıfır olarak alınır. Buna göre,

$$Z=\mathbf{q} \tag{8.4}$$

veya

$$Z=-\mathbf{q} \tag{8.5}$$

olur. Simpleks yöntemde $\mathbf{q}$ hiç bir zaman negatif değer alamaz. En düşük sıfır olabilir. O zaman Z' nin en düşük değeri sıfır olur. Bu durumda ancak $\mathbf{q}=\mathbf{0}$ olması ile olanaklıdır. Bu nedenle $Z=0$ olunca Evre-I' in sonunda üç durum söz konusudur.

NOT: (8.1) ifadesi ile tanımlı d.p.p.' nin en iyi çözümünün bulunabilmesi için, birim matris oluşturmak amacıyla eklenen yapay değişkenlerin sıfır olması gerekir. Çünkü, $A\mathbf{X}=\mathbf{b}$ sisteminin çözümü yalnız ve ancak $A\mathbf{X}+\mathbf{q}=\mathbf{b}$ sisteminde $\mathbf{q}=\mathbf{0}$ olması ile mümkündür. Bu sistemin çözümü için "Charnes' in M Yöntemi" ve "İki evreli Yöntem" geliştirilmiştir.

Durum 1: En iyilik koşulu sağlandığında, $\max Z^* < 0$ ya da $\min Z^* > 0$ ise, bir ya da daha çok yapay değişken temelde pozitif düzeyde kalmıştır. Bu durumda Evre-II' ye geçilemez. Problemin formülasyonu hatalıdır. Verilen d.p.p.' nin uygun çözümü bulunamaz.

Durum 2: En iyilik koşulu sağlandığında, $\max Z^* = 0$ ya da $\min Z^* = 0$ ve temelde yapay değişken yok ise, Evre-I' in son tablosu Evre-II' nin ilk tablosu olacak biçimde Evre-II' ye geçilir. Bu evrede d.p.p. model değişkenlerine kendi fiyatları verilir. Simpleks yöntemin bilinen adımları uygulanır.

Durum 3: En iyilik koşulu sağlandığında, $\max Z^* = 0$ ya da $\min Z^* = 0$ ve temelde sıfır düzeyli yapay değişken/değişkenler var ise, d.p.p.' ne temel olmayan bir uygun çözüm bulunmuş olur. Evre-I sonunda temelde sıfır düzeyli yapay değişkenler var ise, bu yapay değişkenlerin Evre-II' de pozitif düzeyli olması olasıdır. Eğer bu yapay değişken/değişkenler pozitif düzeyli hale gelirse, amaç fonksiyonunun değeri minimum problemde artar ki bu da Simpleks yöntemin yapısına aykırı bir durumdur. Bunu önlemek için şu durumlara dikkat etmek gerekir:

- **a.** Evre-I sonunda temelde sıfır düzeyli yapay değişken olsun. Temelin yapay değişken içeren satırında temel dışı tüm değişkenler için $y_{ij} = 0$ ise, bu yapay vektör temelden atılır. Daha küçük bir temel ile Evre-II' ye geçilir. Çünkü bu yapay değişken

  $$\frac{X_{Br}}{y_{rk}} = \min\left\{ \frac{X_{Bi}}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\} \tag{8.6}$$

  ölçütüne göre temelden çıkamaz. Bu durum kısıt kümesinde artık kısıt olduğunu gösterir. $\forall\, j$ için $y_{ij} = 0$ olan i. satır tablodan çıkarılır. Burada, i. kısıt "artık kısıt"tır.

- **b.** Evre-I sonunda, bir ya da daha fazla yapay değişken sıfır düzeyde temelde olsun. Yapay değişkenin bulunduğu satırda bir ya da daha çok $y_{ij} \neq 0$ olsun. Evre-II' nin her yinelemesinde yapay değişkenlerin sıfır düzeyli kalacağından emin olmalıyız. Evre-II' de temele girecek vektörü belirlemek için her zaman kullanılan ölçüt kullanılır. Temelde sıfır düzeyde yapay değişken içeren bir ya da daha çok i için $y_{ij} > 0$ ise, i. yapay değişken temelden ayrılabilir ve $\mathbf{a}_j$ temele alınır. Temeldeki değişkenlerin değeri değişmez. Eğer temelde birden çok yapay değişken var ise, bu değişkenlerin değeri yine sıfır düzeyde kalacaktır. Bu durum “bozulmuş çözüm”dür.

c. Evre-I sonunda, bir ya da daha fazla yapay değişken sıfır düzeyde olsun. Temelin yapy değişken içeren $i.$ satırında temel dışı değişkene ilişkin bir ya da daha çok $y_{ik} < 0$ olsun. Bu durumda, $\mathbf{a}_k$ temele alınır. Temelden çıkacak vektör seçimi için her zamanki ölçüt kullanılamaz. Bu ölçüt kullanılırsa d.p.p.’ nin modellenmesinde kullanılan değişkenlerden biri temelden çıkar. Temelden çıkan değişkene ilişkin değer X_{Br} olsun ($X_{Br} > 0$). $y_{ik} < 0$ olan yapay değişken değeri $X_{Bi} = 0$ olduğundan, yeni temelde bu yapay değişken değeri

$$\hat{X}_{Bi} = X_{Bi} - \frac{X_{Br}}{y_{rk}} y_{ik} > 0 \tag{8.7}$$

olur. Elde edilecek olan bir sonraki simpleks tabloda yapay değişken pozitif düzeyli olarak temelde olacaktır. Bu istenilmeyen bir durumdur. Bu durumdan kurtulmak için orijinal vektörün temelden çıkması yerine $y_{ik} < 0$ olan yapay değişkenlerden biri temelden çıkarılır. Bu durumda “bozulmuş çözüm”e ulaşılır.

Örnek 1: (Durum 1**)**

$$\begin{aligned}
P:\ \min\ & Z = -X_1 - 3X_2 + X_3 \\
& X_1 + X_2 + 2X_3 \le 4 \\
& -X_1 + X_3 \ge 4 \\
& X_3 \ge 3 \\
& X_1, X_2, X_3 \ge 0
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlı d.p.p.‘ nin simpleks tablo ile en iyi çözümünü bulunuz.

Çözüm:

Verilen primal d.p.p. standart hale getirilir.

$$\begin{aligned}
P:\ \min\ & Z = -X_1 - 3X_2 + X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 \\
& X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 = 4 \\
& -X_1 + X_3 - X_5 = 4 \\
& X_3 - X_6 = 3 \\
& X_i \ge 0\ ,\ i = 1,2,\ldots,5
\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

A katsayılar matrisinde birim matris olmadığından, standart haldeki primal probleme İki Evreli yöntem uygulanarak, yapay değişkenler eklenir.

$$P: \ \min \ Z = -X_1 - 3X_2 + X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 + q_2 + q_3$$
$$X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 = 4$$
$$-X_1 + X_3 - X_5 + q_2 = 4$$
$$X_3 - X_6 + q_3 = 3$$
$$X_i \geq 0 \ , \ i = 1,2,\ldots,5$$

$$A = \left[\begin{array}{cccccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

A katsayılar matrisinde birim matris oluşturulur. Buna göre, yapay değişkenler hariç diğer değişkenlerin fiyat değerleri sıfır alınarak, Evre-I' de simpleks tablo ile çözümleme yapılır.

- **Evre-I**

Tablo-I			0	0	0	0	0	0	1	1	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$	$\mathbf{y}_6$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	
0	X_4	4	1	1	2	1	0	0	0	0	
1	q_2	4	-1	0	1	0	-1	0	1	0	
1	q_3	3	0	0	1	0	0	-1	0	1	
		$Z=7$	-1	0	2	0	-1	-1	0	0	≤ 0 olmalı

Tablo-II			0	0	0	0	0	0	1	1	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$	$\mathbf{y}_6$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	
0	X_3	2	1/2	1/2	1	1/2	0	0	0	0	
1	q_2	2	-3/2	-1/2	0	-1/2	-1	0	1	0	
1	q_3	1	-1/2	-1/2	0	-1/2	0	-1	0	1	
		$Z=3$	-2	-1	0	-1	-1	-1	0	0	≤ 0 sağlandı

Evre-I sonunda en iyilik koşulu sağlandı. Verilen d.p.p. için $Z^* = 3 > 0$ olduğundan, temelde pozitif düzeyli yapay değişken vardır. Verilen problemin formülasyonu hatalıdır. Uygun çözüm yoktur. Evre-II' ye geçilemez.

Örnek 2: (Durum 2**)**

$$
\begin{aligned}
P:\ \ \min\ Z &= 4X_1 + 6X_2 \\
2X_1 + X_2 &\geq 3 \\
X_1 + 3X_2 &\geq 7 \\
X_1, X_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlı d.p.p.' nin simpleks tablo ile en iyi çözümünü bulunuz.

Çözüm:

Verilen primal d.p.p. standart hale getirilir.

$$
\begin{aligned}
P:\ \ \min\ Z &= 4X_1 + 6X_2 + 0X_3 + 0X_4 \\
2X_1 + X_2 - X_3 &= 3 \\
X_1 + 3X_2 - X_4 &= 7 \\
X_1, X_2, X_3, X_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}
$$

A katsayılar matrisinde birim matris olmadığından, standart haldeki primal probleme İki Evreli yöntem uygulanarak, yapay değişkenler eklenir.

$$
\begin{aligned}
P:\ \ \min\ Z &= 4X_1 + 6X_2 + 0X_3 + 0X_4 + q_1 + q_2 \\
2X_1 + X_2 - X_3 + q_1 &= 3 \\
X_1 + 3X_2 - X_4 + q_2 &= 7 \\
X_1, X_2, X_3, X_4, q_1, q_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
A = \left[\begin{array}{cccc|cc} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

A katsayılar matrisinde birim matris oluşturulur. Buna göre, yapay değişkenler hariç diğer değişkenlerin fiyat değerleri sıfır alınarak, Evre-I' de simpleks tablo ile çözümleme yapılır.

- **Evre-I**

Tablo-I			0	0	0	0	1	1	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	
1	q_1	3	2	1	-1	0	1	0	
1	q_2	7	1	3	0	-1	0	1	
		$Z=10$	3	4	-1	-1	0	0	≤ 0 olmalı

Tablo-II			0	0	0	0	1	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{q}_1$	
1	q_1	2/3	5/3	0	-1	1/3	1	
0	X_2	7/3	1/3	1	0	-1/3	0	
		$Z=2/3$	5/3	0	-1	1/3	0	≤ 0 olmalı

Tablo-III			0	0	0	0	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	
0	X_1	2/5	1	0	-3/5	1/5	
0	X_2	11/5	0	1	1/5	-6/15	
		$Z=0$	0	0	0	0	≤ 0 sağlandı

Evre-I sonunda en iyilik koşulu sağlandı. Verilen d.p.p. için $Z^*=0$ olduğundan ve temelde yapay değişken bulunmadığından Evre-I' in son tablosu, Evre-II' nin ilk tablosu olacak biçimde Evre-II' ye geçilir. Evre-II' nin ilk tablosunda d.p.p. model değişkenlerine kendi fiyatları verilir ve simpleks yöntem ile devam edilir.

- **Evre-II**

Tablo-I			4	6	0	0	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	
4	X_1	2/5	1	0	-3/5	1/5	
6	X_2	11/5	0	1	1/5	-6/15	
		$Z=74/5$	0	0	-6/5	-8/5	≤ 0 sağlandı

Evre-II' nin ilk tablosunda en iyilik ölçütü sağlanmıştır. Temelde yapay değişken yoktur. Verilen d.p.p.' nin en iyi çözümü elde edilmiştir.

$\mathbf{X}^*=\begin{bmatrix} 2/5 \\ 11/5 \end{bmatrix}$ ve $Z^*=74/5$