

KONU 9: DOĞRUSAL PROGRAMLAMA MODELİNDE DUALLİK KURAMI - I

Her d.p.p. kendisi ile içsel bağlantılı, ikincil bir problem yapısına sahiptir. Bir d.p.p.' de, problem modelinin başlangıç formülasyonu Primal (birincil) olarak tanımlanırsa, diğeri Dual (ikincil) olarak adlandırılır. DP' da duallik, d.p.p.' nin çözümüne kolaylık getirmesinin yanı sıra verilen modele uygun olarak ekonomik açıklama ve yorum yapma olanağı sağlayıp, modelin yapısına veya parametrelerdeki değişimler ile ilgili işlemlere kolaylık getirmektedir.

Primal ve dual problemlerin yansıttığı çözümler farklı ekonomik göstergelerdir. Eğer bir d.p.p.' de amaç, optimal ürün/faaliyet belirlenmesi ise primal model, kaynakların en etkin kullanımı söz konusu ise de dual model tercih edilecektir.

9.1. Dual Modelin Gösterimi

Bir primal modeli dual modele dönüştürme işleminde aşağıdaki bilgiler dikkate alınmalıdır.

- Primal modelde amaç maksimizasyon (minimizasyon) ise, dual modelde amaç minimizasyon (maksimizasyon) olur.
- Primal modeldeki her bir kısıt için bir dual değişken vardır.
- Primal modeldeki her değişken için bir kısıt vardır.
- Primal modelin kısıtlarının sağ yan değerleri, dual modelin amaç fonksiyonu değişkenlerinin katsayıları olur.
- Primal modelin amaç fonksiyonu değişkenlerinin katsayıları, dual modelin kısıtlarının sağ yan değerleri olur.
- Primal modelde n tane değişken ve m tane kısıt varsa, dual modelde m tane değişken ve n tane kısıt vardır.
- Primal modelde kısıtların yönleri " \leq " biçiminde ise, dual modelde kısıtların yönleri " \geq " biçimindedir. Bu ilişkinin tersi de doğrudur.
- Her iki modelde de karar değişkenleri negatif olmama koşuluna sahiptirler.

Primal-Dual modelin yasal biçimde gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{array}{ll} P: \max Z = \mathbf{cX} & D: \min Z = \mathbf{b'V} \\ \mathbf{AX} \leq \mathbf{b} & \Rightarrow \mathbf{A'V} \geq \mathbf{c'} \\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0} & \mathbf{V} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} P: \min Z = \mathbf{cX} & D: \max Z = \mathbf{b'V} \\ \mathbf{AX} \geq \mathbf{b} & \Rightarrow \mathbf{A'V} \leq \mathbf{c'} \\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0} & \mathbf{V} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Örnek 1:

$$\begin{aligned} P: \min Z &= 3X_1 + 5X_2 \\ 2X_1 + 4X_2 &\leq 5 \\ X_1 + 7X_2 &\geq 8 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı primal problemin yasal biçimde dualini alınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} P: \min Z &= 3X_1 + 5X_2 \\ -2X_1 - 4X_2 &\geq -5 \\ X_1 + 7X_2 &\geq 8 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} D: \max Z &= -5V_1 + 8V_2 \\ -2V_1 + V_2 &\leq 3 \\ -4V_1 + 7V_2 &\leq 5 \\ V_1, V_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Örnek 2:

$$\begin{aligned} P: \min Z &= 3X_1 + 5X_2 \\ 2X_1 + 4X_2 &\leq 5 \\ X_1 + 7X_2 &\geq 8 \\ 5X_1 + 2X_2 &= 3 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı primal problemin yasal biçimde dualini alınız.

Çözüm:

NOT: Bir d.p.p.' d herhangi bir kısıt "=" biçiminde verilmiş ise bu kısıt, " \leq " ve " \geq " biçiminde iki kısıt olarak yazılır. Daha sonra problem yasal biçime dönüştürülerek, duali alınır.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}X_j = b_i \quad \begin{cases} \nearrow \sum_{j=1}^n a_{ij}X_j \leq b_i \\ \searrow \sum_{j=1}^n a_{ij}X_j \geq b_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\begin{aligned} P: \min Z &= 3X_1 + 5X_2 \\ -2X_1 - 4X_2 &\geq -5 \\ X_1 + 7X_2 &\geq 8 \\ 5X_1 + 2X_2 &\geq 3 \\ 5X_1 + 2X_2 &\leq 3 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} P: \min Z &= 3X_1 + 5X_2 \\ -2X_1 - 4X_2 &\geq -5 \\ X_1 + 7X_2 &\geq 8 \\ 5X_1 + 2X_2 &\geq 3 \\ -5X_1 - 2X_2 &\geq -3 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} D: \max Z &= -5V_1 + 8V_2 + 3V_3 - 3V_4 \\ -2V_1 + V_2 + 5V_3 - 5V_4 &\leq 3 \\ -4V_1 + 7V_2 + 2V_3 - 2V_4 &\leq 5 \\ V_1, V_2, V_3, V_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

9.2. Primal-Dual Model Özellikleri

Teorem 1: Bir d.p.p.

$$\begin{aligned} P: \max Z &= \mathbf{c}\mathbf{X} \\ \mathbf{A}\mathbf{X} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlansın. Buna göre, dual model

$$\begin{aligned} D: \min Z &= \mathbf{b}'\mathbf{V} \\ \mathbf{A}'\mathbf{V} &\geq \mathbf{c}' \\ \mathbf{V} &\text{ işareti belirtilmemiş} \end{aligned}$$

dır.

İspat:

$$\begin{aligned} P: \max Z &= \mathbf{c}\mathbf{X} \\ \mathbf{A}\mathbf{X} &\leq \mathbf{b} \\ -\mathbf{A}\mathbf{X} &\leq -\mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} D: \min Z &= \mathbf{b}'\mathbf{V}' - \mathbf{b}'\mathbf{V}'' \\ \mathbf{A}'\mathbf{V}' - \mathbf{A}'\mathbf{V}'' &\geq \mathbf{c}' \\ \mathbf{V}', \mathbf{V}'' &\geq \mathbf{0} \end{aligned}, \quad \begin{aligned} D: \min Z &= \mathbf{b}'(\mathbf{V}' - \mathbf{V}'') \\ \mathbf{A}'(\mathbf{V}' - \mathbf{V}'') &\geq \mathbf{c}' \\ \mathbf{V}', \mathbf{V}'' &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

NOT: $\mathbf{V} = \mathbf{V}' - \mathbf{V}''$ vektörüne işareti belirlenmemiş vektör denir. Çünkü, $\mathbf{V}', \mathbf{V}'' \geq \mathbf{0}$ olduğundan, iki negatif olmayan vektör farkına eşit olan \mathbf{V} vektörünün elemanları negatif, sıfır veya pozitif olabilir. Buna göre,

$$\mathbf{V}' > \mathbf{V}'' \Rightarrow \mathbf{V} > \mathbf{0}$$

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V}'' \Rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{V}' < \mathbf{V}'' \Rightarrow \mathbf{V} < \mathbf{0}$$

dır. Bu nedenle \mathbf{V} vektörü işareti belirtilmemiş olarak adlandırılır. Verilen primal modelin duali

$$\begin{aligned} D: \min Z &= \mathbf{b}'(\mathbf{V}' - \mathbf{V}'') \\ \mathbf{A}'(\mathbf{V}' - \mathbf{V}'') &\geq \mathbf{c}' \\ \mathbf{V} &\text{ işareti belirtilmemiş} \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

Teorem 2: Bir d.p.p.

$$\begin{aligned} P: \min Z &= \mathbf{c}\mathbf{X} \\ \mathbf{A}\mathbf{X} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlansın. Buna göre, dual model

$$D: \max Z = \mathbf{b}'\mathbf{V}$$

$$A'\mathbf{V} \leq \mathbf{c}'$$

\mathbf{V} işareti belirtilmemiş

dır.

NOT: Primal modelin i . kısıtı eşitlik biçiminde ise i . dual değişkenin işareti belirtilmemiştir.

Teorem 3: Bir d.p.p.

$$P: \max Z = \mathbf{c}\mathbf{X}$$

$$A\mathbf{X} \leq \mathbf{b}$$

\mathbf{X} işareti belirtilmemiş

biçiminde tanımlansın. Buna göre, dual model

$$D: \min Z = \mathbf{b}'\mathbf{V}$$

$$A'\mathbf{V} = \mathbf{c}'$$

$$\mathbf{V} \geq \mathbf{0}$$

dır.

İspat: \mathbf{X} işareti belirtilmemiş değişken yerine $\mathbf{X} = \mathbf{X}' - \mathbf{X}''$ yazılırsa, tüm değişkenler " $\geq \mathbf{0}$ " koşulunu sağlar ve d.p.p.

$$P: \max Z = \mathbf{c}(\mathbf{X}' - \mathbf{X}'')$$

$$A(\mathbf{X}' - \mathbf{X}'') \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{X}', \mathbf{X}'' \geq \mathbf{0}$$

biçimine dönüşür. Bu primal problemin duali alınır,

$$D: \min Z = \mathbf{b}'\mathbf{V}$$

$$A'\mathbf{V} \geq \mathbf{c}'$$

$$-A'\mathbf{V} \geq -\mathbf{c}'$$

$$\mathbf{V} \geq \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow$$

$$D: \min Z = \mathbf{b}'\mathbf{V}$$

$$A'\mathbf{V} = \mathbf{c}'$$

$$\mathbf{V} \geq \mathbf{0}$$

olur.

NOT: Primal modelde i . değişkenin işareti belirtilmemiş ise, i . dual kısıt eşitlik biçimindedir.