2. HAFTA

Kesikli Rasgele Değişkenlerin Bağımsızlığı

Rasgele değişkenlerin koşullu dağılımı tanımlandığında, bu rasgele değişkenlerin bağımsızlığı da tanımlanabilir.

Tanım: ((Stokastik)Bağımsızlık)

$\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_p)$ p-boyutlu bir rasgele vektör olsun. Rasgele vektörün elemanları olan $X_1, X_2, ..., X_p$ rasgele değişkenlerinin (stokastik) bağımsız olması için gerek ve yeter şart bütün $x_1, x_2, ..., x_p$ 'ler için

$$F_{X_1, X_2, ..., X_p}(x_1, x_2, ..., x_p) = \prod_{i=1}^{p} F_{X_i}(x_i)$$

olmalıdır.

Tanım: ((Stokastik)Bağımsızlık)

$\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_p)$, ortak olasılık fonksiyonu $f_{X_1, X_2, ..., X_p}(x_1, x_2, ..., x_p)$ olan p-boyutlu bir rasgele vektör olsun. Rasgele vektörün elemanları olan $X_1, X_2, ..., X_p$ rasgele değişkenlerinin (stokastik) bağımsız olması için gerek ve yeter şart bütün $x_1, x_2, ..., x_p$ 'ler için

$$f_{X_1, X_2, ..., X_p}(x_1, x_2, ..., x_p) = \prod_{i=1}^{p} f_{X_i}(x_i)$$

olmalıdır.

Özel olarak $p = 2$ için $\underline{X}' = (X, Y)$ rasgele vektörü göz önüne alınsın. X ve Y rasgele değişkenlerinin istatistiksel bağımsız olması için gerek ve yeter şart bütün x ve y' ler için

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

dir.

Not: i) A ve B olayları bağımsız iki olay ise

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

ii) Bütün x ve y' ler için

$$P(X = x / Y = y) = P(X = x)$$

ise X ve Y rasgele değişkenleri bağımsızdır.

Teorem: X ve Y kesikli rasgele değişkenlerinin bağımsız olması için gerek ve yeter şart $f_{X,Y}(x,y)$'nin, x'in bir fonksiyonu ile y'nin bir fonksiyonunun çarpımı biçiminde yazılabilmesidir. Yani bütün x ve y'ler için ancak ve ancak öyle bir g ve h fonksiyonları vardır ki

$$f_{X,Y}(x,y) = g(x)\ h(y)$$

olmalıdır. Eğer $f_{X,Y}(x,y) = g(x)\ h(y)$ ise marjinal olasılık fonksiyonları

$$f_X(x) = \frac{g(x)}{\sum_u g(u)} \quad \text{ve} \quad f_Y(y) = \frac{h(y)}{\sum_u h(u)}$$

dir.

İspat: Bu teoremin ispatı için aşağıdaki iki durum gösterilmelidir:

i) X ve Y kesikli rasgele değişkenlerinin bağımsız ise $f_{X,Y}(x,y) = g(x)\ h(y)$

ii) $f_{X,Y}(x,y) = g(x)\ h(y)$ ise X ve Y kesikli rasgele değişkenlerinin bağımsız

dır.

i) Bağımsızlığın tanımından X ve Y rasgele değişkenleri bağımsız ise bütün x ve y'ler için

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

dir. $g(x) = f_X(x)$ ve $h(y) = f_Y(y)$ alınırsa **i)** kısmının ispatı tamamlanmış olur.

ii) Bütün x ve y'ler ve g , h 'nın bazı fonksiyonları için $f_{X,Y}(x,y) = g(x)\ h(y)$ olduğunu kabul edelim. X'in marjinal olasılık fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \sum_y f_{X,Y}(x,y) \\ &= \sum_y g(x) h(y) \\ &= g(x) \sum_y h(y) \\ &= g(x) H \end{aligned}$$

biçiminde verilsin burada $H = \sum_{y} h(y)$ dir.

Benzer biçimde,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \sum_{x} f_{X,Y}(x,y) \\ &= \sum_{x} g(x)h(y) \\ &= h(y)\sum_{y} g(x) \\ &= h(y)G \end{aligned}$$

biçiminde verilsin burada $G = \sum_{x} g(x)$ dir.

$f_X(x)$ ve $f_Y(y)$ için elde edilen sonuçlardan, $g(x) = \frac{f_X(x)}{H}$ ve $h(y) = \frac{f_Y(y)}{G}$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= g(x)\ h(y) \\ &= \frac{f_X(x)}{H}\frac{f_Y(y)}{G} \\ &= \frac{f_X(x)f_Y(y)}{GH} \end{aligned}$$

dir. Bu sonuçtan, $f_{X,Y}(x,y)$ ortak olasılık fonksiyonu $f_X(x)f_Y(y)$'e orantılıdır. $GH = 1$ olduğu gösterilir ise, $f_{X,Y}(x,y)$'nin $f_X(x)f_Y(y)$'e eşit olacaktır.

G ve *H'*nın tanımından,

$$\begin{aligned} GH &= \sum_{x} g(x)\sum_{y} h(y) \\ &= \sum_{x}\sum_{y} g(x)h(y) \\ &= \sum_{x}\sum_{y} f_{X,Y}(x,y) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olur. Böylece bütün x ve y'ler için

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= \frac{f_X(x) f_Y(y)}{GH} \\ &= \frac{f_X(x) f_Y(y)}{1} \\ &= f_X(x) f_Y(y) \end{aligned}$$

dır ve bu da X ve Y rasgele değişkenlerinin bağımsız olduğunu gösterir.

$GH = 1$ olduğunda $H = \dfrac{1}{G}$ ve $G = \dfrac{1}{H}$ dır. Buradan,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= g(x)H \\ &= g(x)\frac{1}{G} \\ &= \frac{g(x)}{\sum_u g(u)} \end{aligned} \qquad \text{ve} \qquad \begin{aligned} f_Y(y) &= h(y)G \\ &= h(y)\frac{1}{H} \\ &= \frac{h(y)}{\sum_u h(u)} \end{aligned}$$

olması gerekir.

Beklenen Değerin Ortak Dağılımdan Bulunması

X, olasılık fonksiyonu $f_X(x)$ olan kesikli bir rasgele değişken ise, $g(X)$ fonksiyonunun beklenen değeri

$$E(g(X)) = \sum_x g(x) f_X(x)$$

biçimindedir.

Tanım: $\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_p)$, p-boyutlu kesikli bir rasgele vektör yani her X_i nin tek değişkenli kesikli bir rasgele değişken olduğu kabul edilsin. $g: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ 'ye $\mathbb{R}^p$ üzerinde sabit bir fonksiyon (yani g, $\mathbb{R}$ 'de sabit değerler alsın) olsun. Buradan $g(\underline{X})$ 'in beklenen değeri

$$E(g(\underline{X})) = \sum_{\underline{x}} g(\underline{\mathrm{x}}) f_{\underline{X}}(\underline{\mathrm{x}})$$

biçiminde tanımlanır.

Not: Bu bir vektör toplamı değil bir sabit toplamıdır. Burada $g(\underline{\mathrm{x}})$, $\underline{\mathrm{x}}$ ' in bir fonksiyonunun toplamıdır.

Özel olarak $\underline{X}' = (X, Y)$ kesikli bir rasgele değişken ve $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ise

$$
\begin{aligned}
E(g(\underline{X})) &= E(g(X, Y)) \\
&= \sum_x \sum_y g(x, y) f_{X,Y}(x, y)
\end{aligned}
$$

dir. Örneğin $g(\underline{X}) = \dfrac{x}{\sqrt{y}}$ ' in beklenen değeri $E(\dfrac{x}{\sqrt{y}}) = \sum_x \sum_y \dfrac{x}{\sqrt{y}} f_{X,Y}(x, y)$ dir.

Beklenen Değerin Özellikleri:

Aşağıda verilen özellikler beklenen değerin var olması altında geçerlidir.

i) $\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_p)$, *p*-boyutlu kesikli bir rasgele vektör ise her *a* ve *b* sabitleri ve her *g* ve *h* fonksiyonları için

$$E(a\, g(\underline{X}) + b\, h(\underline{X})) = a\, E(g(\underline{X})) + b\, E(h(\underline{X}))$$

dir.

İspat:

$$
\begin{aligned}
E(a\, g(\underline{X}) + b\, h(\underline{X})) &= \sum_{\underline{\mathrm{x}}} (a\, g(\underline{\mathrm{x}}) + b\, h(\underline{\mathrm{x}})) f_{\underline{X}}(\underline{\mathrm{x}}) \\
&= a \sum_{\underline{\mathrm{x}}} g(\underline{\mathrm{x}}) f_{\underline{X}}(\underline{\mathrm{x}}) + b \sum_{\underline{\mathrm{x}}} h(\underline{\mathrm{x}}) f_{\underline{X}}(\underline{\mathrm{x}}) h(\underline{\mathrm{x}}) \\
&= a\, E(g(\underline{X})) + b\, E(h(\underline{X}))
\end{aligned}
$$

dir.

ii) Her *X* ve *Y* kesikli rasgele değişkeni için

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

dir. Bu sonuçtan, $X_1, X_2, ..., X_p$ kesikli rasgele değişkenleri için

$$E(X_1 + X_2 + ... + X_p) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_p)$$

dir. Burada $X_1, X_2, ..., X_p$ rasgele değişkenlerinin bağımsız olması gerekmez.

İspat:

$$\begin{aligned}E(X+Y) &= \sum_x \sum_y (x+y) f_{X,Y}(x,y) \\ &= \sum_x x \sum_y f_{X,Y}(x,y) + \sum_y y \sum_x f_{X,Y}(x,y) \\ &= \sum_x x\, f_X(x) + \sum_y y\, f_Y(y) \\ &= E(X)+E(Y)\end{aligned}$$

dir.

iii) X ve Y bağımsız kesikli rasgele değişkenler ve g, h fonksiyonlar ise,

$$E(XY)=E(X)E(Y) \text{ ve } E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y))$$

dir. Bu sonuç X ve Y 'nin bağımsız olmasını gerektirir.

İspat:

$$\begin{aligned}E(XY) &= \sum_x \sum_y (xy) f_{X,Y}(x,y) \\ &= \sum_x \sum_y (xy) f_X(x) f_Y(y) \\ &= (\sum_x x\, f_X(x))(\sum_y y\, f_Y(y)) \\ &= E(X)E(Y)\end{aligned}$$

dir.

Örnek: Örnek 1 de verilen ortak olasılık ve marjinal olasılık fonksiyonlarından X ve Y rasgele değişkenlerinin toplamlarının beklenen değerini; ortak dağılımdan ve marjinallerinden yararlanarak bulunuz.

$f_{X,Y}(x,y)$		y = 0	1	2	3	$f_X(x)$
x	0	0.05	0.05	0.10	0.00	**0.20**
	1	0.05	0.10	0.25	0.10	**0.50**
	2	0.00	0.15	0.10	0.05	**0.30**
$f_Y(y)$		**0.10**	**0.30**	**0.45**	**0.15**	**1**

Çözüm: Beklenen değerin tanımından,

$$\begin{aligned}
E(X+Y) &= \sum_x \sum_y (x+y) f_{X,Y}(x,y) \\
&= \sum_{x=0}^{2} \sum_{y=0}^{3} (x+y) f_{X,Y}(x,y) \\
&= (0+0)(0.05) + (0+1)(0.05) + (0+2)(0.10) + (0+3)(0.00) \\
&\quad + (1+0)(0.05) + (1+1)(0.10) + (1+2)(0.25) + (1+3)(0.10) \\
&\quad + (2+0)(0.00) + (2+1)(0.15) + (2+2)(0.10) + (2+3)(0.05) \\
&= 0.25 + 1.40 + 1.10 \\
&= 2.75
\end{aligned}$$

dir.

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_x x\, f_X(x) \\
&= \sum_{x=0}^{2} x\, f_X(x) \\
&= (0)(0.20) + (1)(0.50) + (2)(0.30) \\
&= 1.10
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_y y\, f_Y(y) \\
&= \sum_{y=0}^{3} y\, f_Y(y) \\
&= (0)(0.10) + (1)(0.30) + (2)(0.45) + (3)(0.15) \\
&= 1.65
\end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned}
E(X+Y) &= 1.10 + 1.65 \\
&= 2.75
\end{aligned}$$

olarak aynı sonuç elde edilir.

Kovaryans

X bir rasgele değişken olmak üzere, bu rasgele değişkenin varyansı

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(\left[(X - E(X)\right]^2) \\ &= E(\left[(X - \mu_X)\right]^2) \\ &= \sigma_X^2 \end{aligned}$$

dir.

X ve Y rasgele değişkenleri arasındaki ilişki önemlidir. Kovaryans iki rasgele değişken arasındaki lineer ilişkinin ölçüsüdür.

Tanım: X ve Y rasgele değişkenleri arasındaki kovaryans

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E(X - E(X))E(Y - E(Y)) \\ &= E(X - \mu_X)E(Y - \mu_Y) \\ &= \sigma_X \sigma_Y \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E(X - \mu_X)E(Y - \mu_Y) \\ &= E(XY - X\mu_Y - \mu_X Y + \mu_X \mu_Y) \\ &= E(XY) - E(X)\mu_Y - \mu_X E(Y) + \mu_X \mu_Y \\ &= E(XY) - \mu_X \mu_Y - \mu_X \mu_Y + \mu_X \mu_Y \\ &= E(XY) - \mu_X \mu_Y \end{aligned}$$

olarak da verilir. Burada

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xy\, f_{X,Y}(x, y)$$

dir.

X ve Y rasgele değişkenleri bağımsız ise, $Cov(X,Y) = 0$ dır. Ancak tersi her zaman doğru değildir. X ve Y rasgele değişkenleri bağımsız olduğunda $E(XY) = E(X)E(Y)$ olduğundan

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= E(X)E(Y) - E(X)E(Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Tersi için aşağıdaki ortak dağılımı göz önüne alalım.

Örnek:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & ; \quad (x,y)=(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)\\[2ex] 0 & ; \quad d.y.\end{cases}$$

Bu ortak dağılım

$f_{X,Y}(x,y)$		y			$f_X(x)$
		-1	0	1	
x	-1	0	1/4	0	**1/4**
	0	1/4	0	1/4	**2/4**
	1	0	1/4	0	**1/4**
$f_Y(y)$		**1/4**	**2/4**	**1/4**	**1**

biçimimde de verilebilir. Buradan,

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_x x\,f_X(x)\\&=\sum_x x\;P(X=x)\\&=(-1)(1/4)+(0)(2/4)+(1)(1/4)\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(Y)&=\sum_y y\,f_Y(y)\\&=\sum_y y\;P(Y=y)\\&=(-1)(1/4)+(0)(2/4)+(1)(1/4)\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(XY)&=\sum_x\sum_y x\mathrm{y}\,f_{X,Y}(x,y)\\&=\sum_x\sum_y xy\;P(X=x,Y=y))\\&=(-1)(-1)(0)+(-1)(0)(1/4)+(-1)(1)(0)\\&\quad+(0)(-1)(1/4)+(0)(0)(0)+(0)(1)(1/4)\\&\quad+(1)(-1)(0)+(1)(0)(1/4)+(1)(1)(0)\\&=0\end{aligned}$$

dır. Ancak

$$P(X=0,Y=0)=0$$

ve

$$P(X=0)P(Y=0)=(\frac{2}{4})(\frac{2}{4})$$
$$=\frac{1}{4}$$

dir. Buradan

$$P(X=0,Y=0)\neq P(X=0)P(Y=0)$$

olduğundan X ve Y rasgele değişkenleri bağımsız değildir. Yani $Cov(X,Y)=0$ olduğu halde, X ve Y rasgele değişkenleri bağımsız değildir.

Rasgele Değişkenlerin Toplamlarının Varyansı

Bu kısımda rasgele değişkenlerin veya lineer birleşimlerinin toplamının varyansı verilecektir. Buradaki sonuçlar beklenen değerin var olması halinde geçerlidir.

Teorem: X ve Y her hangi iki rasgele değişken ve a, b sabitleri için:

i) $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$

ii) $Var(X-Y)=Var(X)+Var(Y)-2Cov(X,Y)$

iii) $Var(aX+bY)=a^2Var(X)+b^2Var(Y)+2abCov(X,Y)$

iv) $a_1,a_2,...,a_p$ sabitleri için

$$Var(\sum_{i=1}^{p}a_iX_i)=\sum_{i=1}^{p}a_i^2Var(X_i)+2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j>i}a_ia_jCov(X_i,X_j)$$

dir.

İspat:

i)

$$\begin{aligned}
Var(X+Y) &= E\left[X+Y-E(X+Y)\right]^2 \\
&= E\left[X+Y-E(X)-E(Y)\right]^2 \\
&= E\left[X+Y-\mu_X-\mu_Y\right]^2 \\
&= E\left[(X-\mu_X)+(Y-\mu_Y)\right]^2 \\
&= E\left[(X-\mu_X)^2+(Y-\mu_Y)^2+2(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] \\
&= E(X-\mu_X)^2+E(Y-\mu_Y)^2+2E(X-\mu_X)(Y-\mu_Y) \\
&= Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
Var(X-Y) &= E\left[X-Y-E(X-Y)\right]^2 \\
&= E\left[X-Y-(E(X)-E(Y))\right]^2 \\
&= E\left[X-Y-(\mu_X-\mu_Y)\right]^2 \\
&= E\left[(X-\mu_X)-(Y-\mu_Y)\right]^2 \\
&= E\left[(X-\mu_X)^2+(Y-\mu_Y)^2-2(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] \\
&= E(X-\mu_X)^2+E(Y-\mu_Y)^2-2E(X-\mu_X)(Y-\mu_Y) \\
&= Var(X)+Var(Y)-2Cov(X,Y)
\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
Var(aX+bY) &= E\left[aX+bY-E(aX+bY)\right]^2 \\
&= E\left[aX+bY-E(aX)-E(bY)\right]^2 \\
&= E\left[aX+bY-a\mu_X-b\mu_Y\right]^2 \\
&= E\left[a(X-\mu_X)+b(Y-\mu_Y)\right]^2 \\
&= E\left[a^2(X-\mu_X)^2+b^2(Y-\mu_Y)^2+2ab(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] \\
&= a^2E(X-\mu_X)^2+b^2E(Y-\mu_Y)^2+2abE(X-\mu_X)(Y-\mu_Y) \\
&= a^2Var(X)+b^2Var(Y)+2abCov(X,Y)
\end{aligned}$$

iv)

$$Var\left(\sum_{i=1}^{p} a_i X_i\right) = E\left[\sum_{i=1}^{p} a_i X_i - E\left(\sum_{i=1}^{p} a_i X_i\right)\right]^2$$

dir. Ayrıca

$$E(\sum_{i=1}^{p} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{p} a_i E(X_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{p} a_i \mu_{X_i}$$

dir. Buradan

$$Var(\sum_{i=1}^{p} a_i X_i) = E\left[\sum_{i=1}^{p} a_i X_i - \sum_{i=1}^{p} a_i \mu_{X_i}\right]^2$$
$$= E\left[\sum_{i=1}^{p} a_i (X_i - \mu_{X_i})\right]^2$$
$$= E\left[a_1(X_1 - \mu_{X_1}) + a_2(X_2 - \mu_{X_2}) + ... + a_p(X_p - \mu_{X_p})\right]^2$$
$$= E\left[\sum_{i=1}^{p} a_i^2 (X_i - \mu_{X_i})^2 + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j>i} a_i a_j (X_i - \mu_{X_i})(X_j - \mu_{X_j})\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{p} a_i^2 E(X_i - \mu_{X_i})^2 + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j>i} a_i a_j E(X_i - \mu_{X_i})(X_j - \mu_{X_j})$$
$$= \sum_{i=1}^{p} a_i^2 Var(X_i) + 2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j>i} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

olarak bulunur.

Korelasyon

X ve Y rasgele değişkenleri arasındaki korelasyon, kovaryansla oldukça ilişkili olmasına rağmen -1 ile 1 arasında değer alır.

Tanım: X ve Y rasgele değişkenleri arasındaki korelasyon

$$Corr(X,Y) = \rho_{X,Y}$$
$$= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$
$$= \frac{\sigma_{X,Y}}{\sqrt{\sigma_X^2}\sqrt{\sigma_Y^2}}$$

biçiminde verilir. Korelasyon X ve Y rasgele değişkenleri arasındaki lineer ilişkinin ölçüsüdür.

Teorem: *X* ve *Y* rasgele değişkenleri arasındaki korelasyon katsayısı $\rho_{X,Y}$ aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i) $-1 \le \rho_{X,Y} \le 1$

ii) Bazı a ve b sabitleri için

$\rho^2_{X,Y} = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b$

dir, burada $\rho_{X,Y} = 1$ ise $a > 0$ ve $\rho_{X,Y} = -1$ ise $a < 0$ dır.

iii) *X* ve *Y* rasgele değişkenleri bağımsız ise $\rho_{X,Y} = 0$ dır. Ancak $\rho_{X,Y} = 0$ olduğunda *X* ve *Y* rasgele değişkenlerinin bağımsız olması gerekmez. ($\rho_{X,Y} = 0$ olması bağımsızlık için gerekli ancak yeterli değildir).

İspat:

i) Her hangi bir a sabiti için $Z = Y - aX$ olsun ve bu Z rasgele değişkenin varyansı $Var(Z) \ge 0$ dır. Böylece,

$$Var(Z) = Var(Y - aX)$$
$$= [Var(Y) + a^2 Var(X) - 2aCov(X,Y)] \ge 0$$

dır. Bu ifade *a*'ya göre kareselleştirilir ise

$$Var(Z) = [a^2\sigma_X^2 - 2a\sigma_{X,Y} + \sigma_Y^2] \ge 0$$

olur. En son elde edilen ifade $\sigma_X\sigma_Y$ ' ye bölünür ise

$$\frac{Var(Z)}{\sigma_X\sigma_Y} = [(\frac{\sigma_X}{\sigma_Y})a^2 - (2\frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X\sigma_Y})a + (\frac{\sigma_Y}{\sigma_X})] \ge 0$$
$$= [(\frac{\sigma_X}{\sigma_Y})a^2 - (2\rho_{X,Y})a + (\frac{\sigma_Y}{\sigma_X})] \ge 0$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade *a*'nın bütün değerleri için geçerlidir.

Eğer *a*'ya göre karesel bir ifade her zaman ≥ 0 ise, bu karesel ifadenin eğrisi hiçbir zaman a-eksenini altında bir değer almaz. Böylece, karesel ifade ya gerçek bir köke sahip değil ya da sadece bir kökü vardır. Buradan karesel ifadenin kökleri

$$(2\rho_{X,Y})^2 - (\frac{\sigma_X}{\sigma_Y})(\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}) \le 0$$

dır ve bu sonuçta

$$4\rho_{X,Y}^2 - 4 \le 0$$

olmasını gerektirir. Buradan karesel ifadenin ya gerçek bir kökü yoktur ya da sadece bir gerçek kökü vardır. Bu da

$$4\rho_{X,Y}^2 - 4 \le 0$$
$$\rho_{X,Y}^2 \le 1$$

sonucunu verir ve bu sonuçtan

$$-1 \le \rho_{X,Y} \le 1$$

elde edilmiş olur.

ii) $\rho_{X,Y}^2 = 1 \Rightarrow Y = aX + b$ ve $Y = aX + b \Rightarrow \rho_{X,Y}^2 = 1$ sonuçlarının her ikisinin de doğruluğu gösterilmelidir.

Öncelikle $\rho_{X,Y}^2 = 1$ olduğunu kabul edelim. Böylece $\rho_{X,Y} = \pm 1$ dir. $Z = Y - aX$ için

$$\frac{Var(Z)}{\sigma_X \sigma_Y} = (\frac{\sigma_X}{\sigma_Y})a^2 - (2\rho_{X,Y})a + (\frac{\sigma_Y}{\sigma_X})$$

ifadesi $Var(Z)$'yi sıfır yapacak a değerleri için çözülsün. Eğer böyle a'lar var ise, $Z = Y - aX$, a'nın bu değerlerinde sabit olmalıdır. Karesel ifade $Var(Z) = 0$ olacak şekilde çözülür ise

$$a = \frac{2\rho_{X,Y} \pm \sqrt{4\rho_{X,Y}^2 - 4}}{2\sigma_X / \sigma_Y}$$
$$= \frac{2\rho_{X,Y} \pm \sqrt{4x1 - 4}}{2\sigma_X / \sigma_Y}$$
$$= \frac{2\rho_{X,Y}}{2\sigma_X / \sigma_Y}$$
$$= \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho_{X,Y}$$

olur. Böylece $\rho_{X,Y} = \pm 1$ ve $a = (\frac{\sigma_Y}{\sigma_X})\rho_{X,Y}$ olduğunda

$$
\begin{aligned}
Var(Z) &= a^2\sigma_X^2 - 2a\sigma_{X,Y} + \sigma_Y^2 \\
&= a^2\sigma_X^2 - 2a(\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y) + \sigma_Y^2 \\
&= (\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho_{X,Y})^2\sigma_X^2 - 2(\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho_{X,Y})(\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y) + \sigma_Y^2 \\
&= \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}\rho_{X,Y}^2\sigma_X^2 - 2\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho_{X,Y}\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y + \sigma_Y^2 \\
&= \sigma_Y^2\rho_{X,Y}^2 - 2\sigma_Y^2\rho_{X,Y}^2 + \sigma_Y^2 \\
&= \sigma_Y^2 - \sigma_Y^2\rho_{X,Y}^2 \\
&= (1-\rho_{X,Y}^2)\sigma_Y^2 \\
&= (1-\rho_{X,Y}^2 = 1)\sigma_Y^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olur ve varyansın sıfır olması $Y - aX$ 'nın bir sabit olduğunu ve böylece bir b sabiti için $Y = aX + b$ olmasını gerektirir.

Diğer taraftan $Y = aX + b$ olsun. Buradan,

$$
\begin{aligned}
Var(Y) &= Var(aX+b) \\
&= Var(aX) \\
&= a^2\sigma_X^2 \\
&= \sigma_Y^2
\end{aligned}
$$

dır. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
&= E(X(aX+b)) - E(X)E(aX+b) \\
&= aE(X^2) + bE(X) - E(X)(aE(X)+b) \\
&= a(E(X^2) - E(X)^2) + b(E(X) - E(X)) \\
&= aVar(X) \\
&= a\sigma_X^2
\end{aligned}
$$

olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
\rho_{X,Y}^2 &= \frac{Cov(X,Y)^2}{\sigma_X^2\sigma_Y^2} \\
&= \frac{(a\sigma_X^2)^2}{\sigma_X^2(a^2\sigma_X^2)} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

dır ve ispat tamamlanmış olur.

iii) Daha önce de gösterildiği gibi X ve Y rasgele değişkenleri bağımsız ise $Cov(X,Y)=0$ dır ancak $Cov(X,Y)=0$ ise X ve Y rasgele değişkenleri bağımsız olmayabilir. Buradan

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

olduğundan X ve Y rasgele değişkenleri bağımsız ise $\rho_{X,Y}=0$ dır ancak $\rho_{X,Y}=0$ ise X ve Y rasgele değişkenleri bağımsız olmayabilir.