

4. HAFTA

Sürekli Rasgele Vektörün Ortak Dağılım ve Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

X_1, X_2, \dots, X_p 'nin her biri sürekli rasgele değişkenler ise, $\underline{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_p)$ rasgele vektörü sürekli ortak dağılıma sahiptir.

Tanım: $\underline{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_p)$ bir rasgele vektör ve bu rasgele vektörün dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(\underline{x}) &= F_{X_1, X_2, \dots, X_p}(x_1, x_2, \dots, x_p) \\ &= F_{\underline{X}}(x_1, x_2, \dots, x_p) \\ &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_p \leq x_p) \end{aligned}$$

dır.

Tanım: $\underline{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_p)$ ortak dağılım fonksiyonu

$$F_{\underline{X}}(x_1, x_2, \dots, x_p) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_p \leq x_p)$$

olan bir rasgele vektör olsun. F sürekli ve $\frac{\partial^p F}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_p}$ kısmi türevi var ise $\underline{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_p)$

rasgele vektörü sürekli ortak dağılıma sahiptir.

Tanım: $\underline{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_p)$ sürekli ortak dağılıma sahip bir rasgele vektör olsun.

$\underline{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_p)$ rasgele vektörünün ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_{\underline{X}}(\underline{x}) &= f_{X_1, X_2, \dots, X_p}(x_1, x_2, \dots, x_p) \\ &= f_{\underline{X}}(x_1, x_2, \dots, x_p) \\ &= \frac{\partial^p F_{\underline{X}}(x_1, x_2, \dots, x_p)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_p} \end{aligned}$$

ile verilir.

Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu olasılıkları bulmada kullanılır. Tek değişkenli durumda

$A \subseteq \mathbb{R}$ için

$$P(X \in A) = \int_A f_X(x) dx$$

ve çok değişkenli durumda

$A \subseteq \mathbb{R}^p$ için

$$P(\underline{X} \in A) = \iint \dots \int_A f_{\underline{X}}(x_1, x_2, \dots, x_p) d_{x_p}, \dots, d_{x_2}, d_{x_1}$$

dir.

Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonunun Özellikleri

i) Bütün x_1, x_2, \dots, x_p 'ler için $\int_A f_{\underline{X}}(x_1, x_2, \dots, x_p) \geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{X}}(x_1, x_2, \dots, x_p) d_{x_p}, \dots, d_{x_2}, d_{x_1} = 1$

iii) $F_{\underline{X}}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_p} f_{\underline{X}}(y_1, y_2, \dots, y_p) d_{y_p}, \dots, d_{y_2}, d_{y_1}$

iv) $A \subseteq \mathbb{R}^p$ olan herhangi bir A bölgesi için

$$P(\underline{X} \in A) = \int_A f_{\underline{X}}(x_1, x_2, \dots, x_p) d_{x_p}, \dots, d_{x_2}, d_{x_1}$$

dir. i) inci ve ii) inci özellikler $f_{\underline{X}}(x_1, x_2, \dots, x_p)$ 'in ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu olması için gerekli şartlardır.

Örnek: $\underline{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \subseteq \mathbb{R}^2$ olmak üzere \underline{X} 'in ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & ; \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

biçiminde olsun.

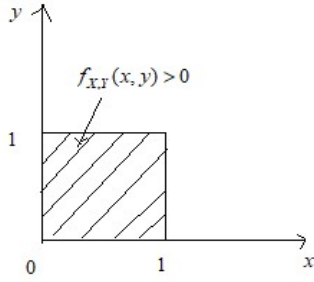
- $f_{X,Y}(x, y)$ ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğunu gösteriniz.
- $F_{X,Y}(x, y)$ ortak dağılım fonksiyonunu bulunuz.
- $P(X + Y \leq 1)$ olasılığının değerini bulunuz.

Çözüm:

a) i)'nin tanımından $\forall_{x,y}$ için $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$ dir.

ii)'den $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) d_y d_x \stackrel{?}{=} 1$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) d_y d_x &= \int_0^1 \int_0^1 1 d_y d_x \\
&= \int_0^1 ([y]_0^1) d_x \\
&= \int_0^1 1 d_x \\
&= ([x]_0^1) \\
&= 1
\end{aligned}$$



dir ve $f_{X,Y}(x,y)$ ortak olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

b)

$$\begin{aligned}
F_{X,Y}(x,y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u,v) d_v d_u \\
&= \int_0^x \int_0^y 1 d_v d_u \\
&= \int_0^x ([v]_0^y) d_u \\
&= \int_0^x y d_u \\
&= y \int_0^x 1 d_u \\
&= y([u]_0^x) \\
&= xy
\end{aligned}$$

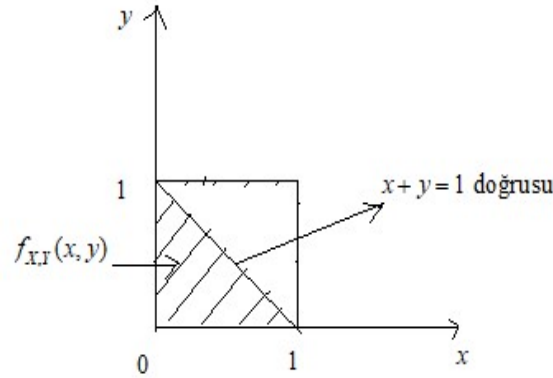
dir ve buradan

$$F_{X,Y}(x,y) = xy \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

olarak elde edilir.

- c) $P(X+Y \leq 1)$ olasılığını bulmak için doğru bölge üzerinde ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun çift katlı integraline ihtiyaç vardır. Bölge öyle belirlenecek ki hem $f_{X,Y}(x,y) > 0$ ve $x+y < 1$ olsun.

$$x+y=1 \Rightarrow y=1-x$$



$$\begin{aligned}
 P(X+Y \leq 1) &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} f_{X,Y}(x,y) d_y d_x \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 1 d_y d_x \\
 &= \int_0^1 ([y]_0^{1-x}) d_x \\
 &= \int_0^1 (1-x) d_x \\
 &= \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - 0 \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek : $\underline{X}' = (X, Y)$ rasgele vektörü

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y} & ; x, y \geq 0 \\ 0 & ; \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

ortak olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olsun.

- a) $F_{X,Y}(x, y)$ dağılım fonksiyonunu elde ediniz.
b) $P(X \leq Y)$ olasılığının değerini bulunuz.

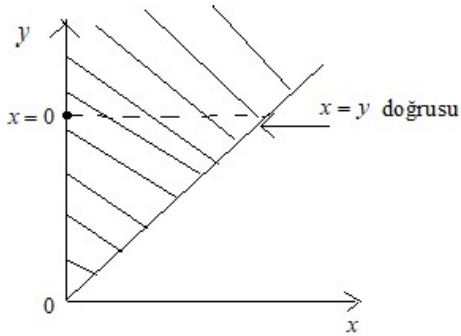
Çözüm:

a)

$$\begin{aligned}
F_{X,Y}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u, v) d_v d_u \\
&= \int_0^x \int_0^y e^{-u} e^{-v} d_v d_u \\
&= \int_0^x e^{-u} \left(\int_0^y e^{-v} d_v \right) d_u \\
&= \int_0^x (e^{-u} [-e^{-v}]_0^y) d_u \\
&= \int_0^x e^{-u} (-e^{-y} - e^0) d_u \\
&= \int_0^x e^{-u} (1 - e^{-y}) d_u \\
&= (1 - e^{-y}) \int_0^x e^{-u} d_u \\
&= (1 - e^{-y}) [-e^{-u}]_0^x \\
&= (1 - e^{-y})(1 - e^{-x}) ; x, y \geq 0
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

- b) $P(X \leq Y)$ olasılığı için $x = y$ sınır doğrusuna bakalım.



y ; $(0, \infty)$ aralığında ve sabit y için x ; $(0, y)$ aralığında değer alır.

$$\begin{aligned}
P(X \leq Y) &= \int_{y=0}^{\infty} \int_{x=0}^y f_{X,Y}(x,y) d_x d_y \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^y e^{-x-y} d_x d_y \\
&= \int_0^{\infty} e^{-y} \left(\int_0^y e^{-x} d_x \right) d_y \\
&= \int_0^{\infty} (e^{-y} [-e^{-x}]_{x=0}^y) d_y \\
&= \int_0^{\infty} e^{-y} (-e^{-y} - e^0) d_y \\
&= \int_0^{\infty} e^{-y} (1 - e^{-y}) d_y \\
&= \int_0^{\infty} (e^{-y} - e^{-2y}) d_y \\
&= \left[-e^{-y} + \frac{1}{2} e^{-2y} \right]_0^{\infty} = -(e^{-\infty} - e^0) + \frac{1}{2} (e^{-2\infty} - e^0) = e^0 - \frac{1}{2} e^{-2y} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

bulunur.

Sürekli Rasgele Değişkenlerin Marjinal ve Koşullu Yoğunluk Fonksiyonları

Kesikli rasgele değişkenler için verilen sonuçlar, sürekli rasgele değişkenler için de geçerlidir. Basitlik için $\underline{X}' = (X, Y)$ olan iki değişkenli sürekli bir rasgele vektör göz önüne alınsın.

Tanım: $\underline{X}' = (X, Y)$ ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{X,Y}(x, y)$ olan ortak dağılıma sahip sürekli bir rasgele vektör ise, X rasgele değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) d_y$$

ve benzer biçimde Y rasgele değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) d_x$$

dir.

Tanım: $\underline{X}' = (X, Y)$ ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{X,Y}(x, y)$ olan ortak dağılıma sahip sürekli bir rasgele vektör ise, Y rasgele değişkenin değeri verildiğinde X rasgele değişkeninin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, f_Y(y) > 0$$

olarak elde edilir.

Dağılım fonksiyonu ile çalışmak, yoğunluk fonksiyonu ile çalışmaktan daha kolaydır.

X rasgele değişkeninin $F_X(x)$ dağılım fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= P(X \leq x, -\infty < y < \infty) \\ &= F_{X,Y}(x, \infty) \\ &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, y) d_y d_u \\ &= \int_{-\infty}^x g(u) d_u \end{aligned}$$

dır. Böylece X rasgele değişkeni

$$\begin{aligned} f_X(x) &= F'_X(x) \\ &= g(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) d_y \end{aligned}$$

marjinal yoğunluk fonksiyonuna sahiptir. Benzer biçimde Y rasgele değişkeni

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F'_Y(y) \\ &= g(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) d_x \end{aligned}$$

marjinal yoğunluk fonksiyonuna sahiptir.

$f_{X/Y}(x/y)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunu tam olarak anlamını anlamak biraz zordur. Koşullu olasılıklar $P(Y = y) = 0$ olduğundan, $P(X \leq x / Y = y)$ 'den bulunamaz.

Yani $Y = y$ üzerine koşul konulamaz. Bunun yerine limit argümanlarına başvurulur.

Limit durumunda koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}
F_{X/Y}(x/y) &= \lim_{h \rightarrow 0} P(X \leq x / y-h \leq Y \leq y+h) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\int_{-\infty}^x \int_{y-h}^{y+h} f_{X,Y}(u,v) d_v d_u}{\int_{y-h}^{y+h} f_Y(v) d_v} \right\} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\int_{-\infty}^x 2hf_{X,Y}(u,y) d_u}{2hf_Y(y)} \right\}
\end{aligned}$$

dir. Burada $h \rightarrow 0$ için $\int_{y-h}^{y+h} f_{X,Y}(u,v) d_v \rightarrow 2hf_{X,Y}(u,y)$ ve $\int_{y-h}^{y+h} f_Y(v) d_v \rightarrow 2hf_Y(y)$ dir.

Böylece,

$$F_{X/Y}(x/y) = \frac{\int_{-\infty}^x f_{X,Y}(u,y) d_u}{f_Y(y)}$$

elde edilir. Bu fonksiyonun türevi alınarak, koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned}
f_{X/Y}(x/y) &= \frac{d}{dx} (F_{X/Y}(x/y)) \\
&= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, \quad f_Y(y) > 0
\end{aligned}$$

biçiminde bulunur.

Örnek : $\underline{X}' = (X, Y)$ rasgele vektörü ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

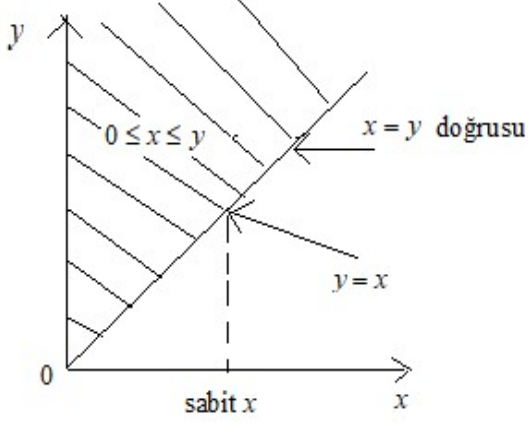
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y} & ; 0 \leq x \leq y \\ 0 & ; \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

biçiminde olsun.

- X rasgele değişkenin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_X(x)$ 'i bulunuz.
- Y rasgele değişkenin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_Y(y)$ 'i bulunuz.
- $f_{X/Y}(x/y)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$$\mathbf{a)} \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) d_y$$



x 'in sabit bir değeri için $x = y$ dir ve $x = 0$ için y sabit bir değer alır.

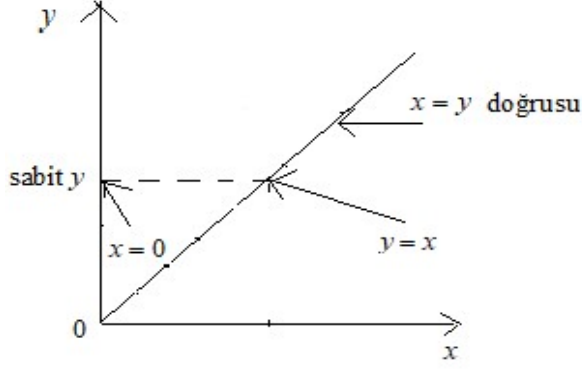
$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) d_y \\ &= \int_x^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda y} d_y \\ &= \left(-\frac{\lambda^2}{\lambda} e^{-\lambda y} \Big|_x^{\infty} \right) \\ &= \lambda e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

dır ve

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

Bu da λ parametrelili üsteldir ve $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ dağılır.

$$\mathbf{b)} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) d_x$$



$f_{X,Y}(x,y) = 0$, $x > y$ dir. Buradan

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \int_0^y f_{X,Y}(x,y) dx \\
 &= \int_0^y \lambda^2 e^{-\lambda y} dx \\
 &= \lambda^2 e^{-\lambda y} (x|_0^y) \\
 &= \lambda^2 y e^{-\lambda y}
 \end{aligned}$$

dır ve

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda^2 y e^{-\lambda y} & ; y \geq 0 \\ 0 & ; \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olmak üzere $Y \sim \text{Gamma}(\alpha = 2, \lambda)$ dağılır.

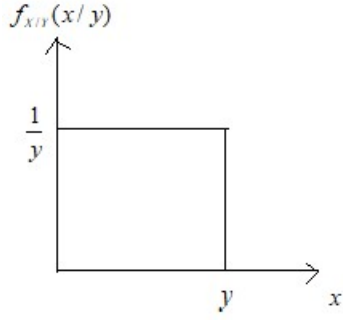
c)

$$\begin{aligned}
 f_{X/Y}(x/y) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \\
 &= \frac{\lambda^2 e^{-\lambda y}}{\lambda^2 y e^{-\lambda y}} \\
 &= \frac{1}{y}
 \end{aligned}$$

dır ve

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & ; 0 \leq x \leq y \\ 0 & ; \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olmak üzere $(X/Y) \sim U(0,Y)$ dağılır.



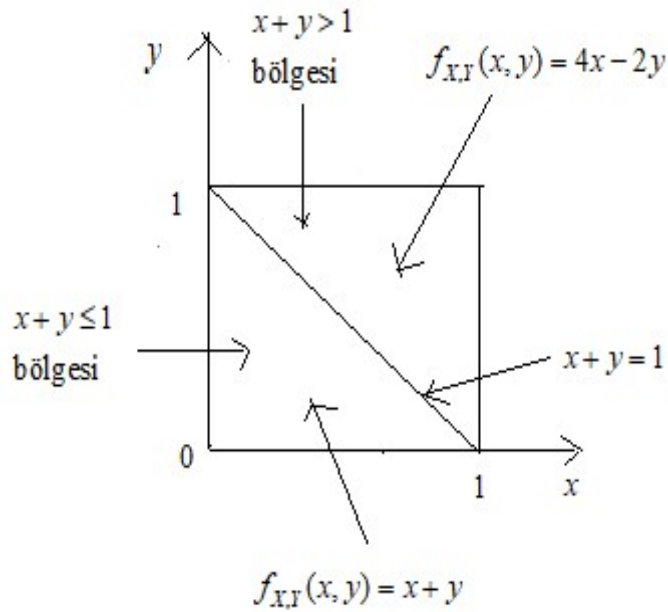
Örnek : $\underline{X}' = (X, Y)$ rasgele vektörü ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x+y & ; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x+y \leq 1 \\ 4x-2y & ; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x+y > 1 \\ 0 & ; \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

biçiminde olsun.

- X rasgele değişkenin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_X(x)$ 'i bulunuz.
- Y rasgele değişkenin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_Y(y)$ 'i bulunuz.
- $f_{X|Y}(x/y)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:



$$\mathbf{a)} \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) d_y$$

burada

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & ; y < 0 \\ 0 & ; y > 1 \\ x+y & ; 0 \leq y \leq 1-x \\ 4x-2y & ; 1-x \leq y \leq 1 \\ 0 & ; \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^{1-x} (x+y) d_y + \int_{1-x}^1 (4x+2y) d_y \\ &= \left(xy + \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} \right) + \left(4xy + y^2 \Big|_{1-x}^1 \right) \\ &= x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} + (4x-1) - (4x-x) - (1-x)^2 \\ &= \frac{9}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

dir ve

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olarak elde edilir.

b) Benzer şekilde Y rasgele değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+8y-9y^2) & ; 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & ; \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

dir.

c)

$$f_{X|Y}(x/y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad ; \quad x,y \in [0,1]$$
$$= \begin{cases} \frac{x+y}{\frac{1}{2}(1+8y-9y^2)} & ; \quad x+y \leq 1 \\ \frac{4x-2y}{\frac{1}{2}(1+8y-9y^2)} & ; \quad x+y > 1 \end{cases}$$

dir.

Sürekli Rasgele Değişkenlerin Bağımsızlığı

Tanım: $\underline{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_p)$ p -boyutlu bir rasgele vektör olsun. \underline{X} rasgele vektörünün elamanları olan X_1, X_2, \dots, X_p rasgele değişkenlerinin (stokastik) bağımsız olması için tüm x_1, x_2, \dots, x_p 'ler için gerek ve yeter şart;

$$\text{a) } F_{X_1, X_2, \dots, X_p}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \prod_{i=1}^p F_{X_i}(x_i)$$

veya

$$\text{b) } f_{X_1, X_2, \dots, X_p}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \prod_{i=1}^p f_{X_i}(x_i)$$

olmasıdır.

Özel olarak $\underline{X}' = (X, Y)$ ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{X,Y}(x,y)$ ve marjinal olasılık fonksiyonları $f_X(x)$ ve $f_Y(y)$ olan sürekli bir rasgele vektör olsun. X ve Y rasgele değişkenlerinin (istatistiksel) bağımsız olması için gerek ve yeter şart tüm x ve y 'ler için

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

olmasıdır.

Torem: X ve Y rasgele değişkenlerinin (istatistiksel) bağımsız olması için gerek ve yeter şart tüm x ve y 'ler için

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

olmalıdır.

İspat: İlk olarak

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial_x \partial_y} (F_{X,Y}(x,y)) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial_x \partial_y} (F_X(x)F_Y(y)) \\ &= \left(\frac{\partial F_X(x)}{\partial_x} \right) \left(\frac{\partial F_Y(y)}{\partial_y} \right) \\ &= f_X(x)f_Y(y) \end{aligned}$$

dir. Böylece, tanımdan X ve Y sürekli rasgele değişkenleri (istatistiksel) bağımsızdır.

Diğer taraftan, X ve Y rasgele değişkenleri (istatistiksel) bağımsız olsun. Buradan,

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x,y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u,v) d_u d_v \\ &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_X(u)f_Y(v) d_u d_v \\ &= \left[\int_{-\infty}^x f_X(u) d_u \right] \left[\int_{-\infty}^y f_Y(v) d_v \right] \\ &= F_X(x)F_Y(y) \end{aligned}$$

dir.

Ortak Sürekli Rasgele Değişkenlerin Beklenen Değeri

$\underline{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_p)$ ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{X_1, X_2, \dots, X_p}(x_1, x_2, \dots, x_p)$ olan sürekli

bir rasgele vektör ve $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye bir fonksiyon olsun. Buradan,

$$E(g(X_1, X_2, \dots, X_p)) = \int_{x_1=-\infty}^{\infty} \int_{x_2=-\infty}^{\infty} \dots \int_{x_p=-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2, \dots, x_p) f_{X_1, X_2, \dots, X_p}(x_1, x_2, \dots, x_p) d_{x_p} \dots d_{x_2} d_{x_1}$$

dir. Özel olarak $\underline{X}' = (X, Y)$ rasgele vektörü için

$$E(g(X, Y)) = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X, Y}(x, y) d_y d_x d_{x_1}$$

dir.

Sürekli Rasgele Değişkenler için Beklenen Değerin Özellikleri:

Sürekli rasgele değişkenler için var olması halinde beklenen değer özellikleri, kesikli rasgele değişkenler ile aynıdır. Bu nedenle aşağıdaki ifadelerin ispatları kesikli durum için yapılanlarla

aynıdır. Burada \sum_x yerine, $\int_{-\infty}^{\infty}$ integrali gelmektedir.

- i) $\underline{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_p)$ p -boyutlu sürekli bir rasgele vektör ve a, b sabitleri ve g, h fonksiyonları ($g: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, h: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$) için

$$E(a g(\underline{X}) + b h(\underline{X})) = aE(g(\underline{X})) + bE(h(\underline{X}))$$

dir.

- ii) X ve Y sürekli rasgele değişkenleri için

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

dir. Bu sonuçtan X_1, X_2, \dots, X_p sürekli rasgele değişkenleri için

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_p) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_p)$$

dir. Burada X_1, X_2, \dots, X_p 'lerin bağımsız olması gerekmez.

- iii) X ve Y bağımsız sürekli rasgele değişkenler ve g, h ($g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) fonksiyonlar ise

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

ve

$$E(g(X) h(Y)) = E(g(X)) E(h(Y))$$

dir.

Sürekli Rasgele Değişkenler için Kovaryans ve Korelasyon

X ve Y sürekli rasgele değişkenleri için

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= E(XY) - \mu_X \mu_Y \end{aligned}$$

dir. Burada,

$$E(XY) = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x, y) d_y d_x$$

dir ve

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}}$$

dir.

Koşullu Beklenen Değer

X ve Y sürekli rasgele değişkenleri için $Y = y$ verildiğinde, X rasgele değişkenin koşullu beklenen değeri

$$E(X / Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X/Y}(x / y) d_x$$

dir. Benzer biçimde

$$E(g(X) / Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X/Y}(x / y) d_x$$

dir.

$E(g(X) / Y = y)$, y 'nin bir fonksiyonu (y 'ye bağlı bir sayı) olmasına rağmen, $E(g(X) / Y)$ bir rasgele değişkendir ve rasgelelik Y 'den gelmektedir.

Teorem: Aşağıdaki beklenen değerler sonlu ise X ve Y sürekli rasgele değişkenleri için

- i) $E(X) = E_Y[E(X / Y)]$
- ii) g 'nin her fonksiyonu için

$$E(g(X)) = E_Y[E(g(X)/Y)]$$

$$\text{iii) } \text{Var}(X) = E_Y[\text{Var}(X/Y)] + \text{Var}_Y[E(X/Y)]$$

İspat: Kesikli rasgele değişkenler için verilen ispatla aynıdır. Bu nedenle ispatlar tekrar

verilmeyecek. Burada \sum_x yerine, $\int_{-\infty}^{\infty}$ integrali gelmektedir.