7. HAFTA

Rasgele Bir Vektörün Ortalama Vektörü, Varyans-Kovaryans ve Korelasyon Matrisleri

$\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_p)$ p-boyutlu sürekli bir rasgele vektör olmak üzere

$$E(\underline{X}_{px1}) = E\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \underline{\mu}_{px1}$$

vektörü, $\underline{X}$ rasgele vektörünün beklenen değer (ortalama) vektörüdür.

X_i ve X_k rasgele değişkenleri arasındaki kovaryans $Cov(X_i, X_k) = E[(X_i - \mu_i)(X_k - \mu_k)]$ olmak üzere, $\underline{X}$ rasgele vektörünün varyans-kovaryans matrisi

$$\begin{aligned}
Cov(\underline{X}_{px1}) &= E(\underline{X} - E(\underline{X}))(\underline{X} - E(\underline{X}))' \\
&= E(\underline{X} - \underline{\mu})(\underline{X} - \underline{\mu})' \\
&= E\begin{bmatrix} (X_1 - \mu_1) \\ (X_2 - \mu_2) \\ \vdots \\ (X_p - \mu_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (X_1 - \mu_1) & (X_2 - \mu_2) & \cdots & (X_p - \mu_p) \end{bmatrix} \\
&= E\begin{bmatrix} (X_1 - \mu_1)^2 & (X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2) & \cdots & (X_1 - \mu_1)(X_p - \mu_p) \\ (X_2 - \mu_2)(X_1 - \mu_1) & (X_2 - \mu_2)^2 & \cdots & (X_2 - \mu_2)(X_p - \mu_p) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (X_p - \mu_p)(X_1 - \mu_1) & (X_p - \mu_p)(X_2 - \mu_2) & \cdots & (X_p - \mu_p)^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} E(X_1 - \mu_1)^2 & E(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2) & \cdots & E(X_1 - \mu_1)(X_p - \mu_p) \\ E(X_2 - \mu_2)(X_1 - \mu_1) & E(X_2 - \mu_2)^2 & \cdots & E(X_2 - \mu_2)(X_p - \mu_p) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ E(X_p - \mu_p)(X_1 - \mu_1) & E(X_p - \mu_p)(X_2 - \mu_2) & \cdots & E(X_p - \mu_p)^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) & \cdots & Cov(X_1, X_p) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2) & \cdots & Cov(X_2, X_p) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Cov(X_p, X_1) & Cov(X_p, X_2) & \cdots & Var(X_p) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$$Var(X_i)=\sigma_i^2=\sigma_{ii}\ ,\ i=1,2,...,p$$

$$Cov(X_i,X_k)=Cov(X_k,X_i)=\sigma_{ik}\ ,\ i\neq k;\ i,k=1,2,...,p$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} Cov(\underline{X}_{px1}) &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{1p} & \sigma_{2p} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix} \\ &= \Sigma_{pxp} \end{aligned}$$

dir ve

$$\begin{aligned} Corr(X_i,X_k) &= \frac{Cov(X_i,X_k)}{\sqrt{Var(X_i)}\sqrt{Var(X_k)}} \\ &= \frac{\sigma_{ik}}{\sqrt{\sigma_{ii}}\sqrt{\sigma_{kk}}} \\ &= \rho_{ik}\ ,\ i\neq k;\ i,k=1,2,...,p \end{aligned}$$

olmak üzere $\underline{X}$ rasgele vektörünün korelasyon matrisi

$$Corr(\underline{X}_{px1}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\sigma_{11}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{11}}} & \dfrac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \dfrac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \dfrac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}} & \dfrac{\sigma_{22}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \dfrac{\sigma_{2p}}{\sqrt{\sigma_{21}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{pp}}} & \dfrac{\sigma_{2p}}{\sqrt{\sigma_{21}}\sqrt{\sigma_{pp}}} & \cdots & \dfrac{\sigma_{pp}}{\sqrt{\sigma_{pp}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1p} \\ \rho_{12} & 1 & \cdots & \rho_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho_{1p} & \rho_{2p} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{\rho}_{pxp}$$

dır.

Ayrıca *pxp* tipinde $V^{1/2}$ standart sapma matrisi olmak üzere

$$V^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\sigma_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\sigma_{pp}} \end{bmatrix}$$

biçiminde olsun. Buradan,

$$V^{1/2}\boldsymbol{\rho}V^{1/2} = \Sigma$$

ve

$$\boldsymbol{\rho} = (V^{1/2})^{-1}\Sigma(V^{1/2})^{-1}$$

dir.

Varyans-Kovaryans Matrisinin Parçalanması

$\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_p)$ rasgele vektörünün elemanları iki veya daha çok gruba ayrılabilir. Burada amaç aynı özelliğe sahip değişkenleri bir grupta toplamaktır. Örneğin,

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_q \\ \cdots \\ X_{q+1} \\ X_{q+2} \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{X}^{(1)}_{qx1} \\ \cdots \\ \underline{X}^{(2)}_{(p-q)x1} \end{bmatrix} \quad \text{yani} \quad \underline{X}^{(1)}_{qx1} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_q \end{bmatrix} \text{ ve } \underline{X}^{(2)}_{(p-q)x1} = \begin{bmatrix} X_{q+1} \\ X_{q+2} \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix}$$

biçiminde parçalandığında;

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_q \\ \cdots \\ \mu_{q+1} \\ \mu_{q+2} \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}^{(1)}_{qx1} \\ \cdots \\ \underline{\mu}^{(2)}_{(p-q)x1} \end{bmatrix}$$

ve

$$Cov(\underline{X}) = E(\underline{X}-\underline{\mu})(\underline{X}-\underline{\mu})'$$

$$= E\left(\left(\begin{bmatrix} \underline{X}^{(1)}_{qx1} \\ \cdots \\ \underline{X}^{(2)}_{(p-q)x1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{\mu}^{(1)}_{qx1} \\ \cdots \\ \underline{\mu}^{(2)}_{(p-q)x1} \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} \underline{X}^{(1)}_{qx1} \\ \cdots \\ \underline{X}^{(2)}_{(p-q)x1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{\mu}^{(1)}_{qx1} \\ \cdots \\ \underline{\mu}^{(2)}_{(p-q)x1} \end{bmatrix}\right)'\right)$$

$$= E\left(\left(\begin{bmatrix} (\underline{X}^{(1)}_{qx1} - \underline{\mu}^{(1)}_{qx1}) \\ \cdots \\ (\underline{X}^{(2)}_{(p-q)x1} - \underline{\mu}^{(2)}_{(p-q)x1}) \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} (\underline{X}^{(1)}_{qx1} - \underline{\mu}^{(1)}_{qx1})' & \vdots & (\underline{X}^{(2)}_{(p-q)x1} - \underline{\mu}^{(2)}_{(p-q)x1})' \end{bmatrix}\right)\right)$$

$$= \begin{bmatrix} E(\underline{X}^{(1)}_{qx1} - \underline{\mu}^{(1)}_{qx1})(\underline{X}^{(1)}_{qx1} - \underline{\mu}^{(1)}_{qx1})' & \vdots & E(\underline{X}^{(1)}_{qx1} - \underline{\mu}^{(1)}_{qx1})(\underline{X}^{(2)}_{(p-q)x1} - \underline{\mu}^{(2)}_{(p-q)x1})' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ E(\underline{X}^{(2)}_{(p-q)x1} - \underline{\mu}^{(2)}_{(p-q)x1})(\underline{X}^{(1)}_{qx1} - \underline{\mu}^{(1)}_{qx1})' & \vdots & E(\underline{X}^{(2)}_{(p-q)x1} - \underline{\mu}^{(2)}_{(p-q)x1})(\underline{X}^{(2)}_{(p-q)x1} - \underline{\mu}^{(2)}_{(p-q)x1})' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Cov(\underline{X}^{(1)}_{qx1}) & \vdots & Cov(\underline{X}^{(1)}_{qx1}, \underline{X}^{(2)}_{(p-q)x1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Cov(\underline{X}^{(2)}_{(p-q)x1}, \underline{X}^{(1)}_{qx1}) & \vdots & Cov(\underline{X}^{(2)}_{(p-q)x1}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \vdots & \Sigma_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma_{21} & \vdots & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1q} & \vdots & \sigma_{1\,q+1} & \sigma_{1\,q+2} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2q} & \vdots & \sigma_{2\,q+1} & \sigma_{2\,q+2} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1q} & \sigma_{2q} & \cdots & \sigma_{qq} & \vdots & \sigma_{q\,q+1} & \sigma_{q\,q+2} & \cdots & \sigma_{qp} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{q+1\,1} & \sigma_{q+1\,2} & \cdots & \sigma_{q+1\,q} & \vdots & \sigma_{q+1\,q+1} & \sigma_{q+1\,q+2} & \cdots & \sigma_{q+1\,p} \\ \sigma_{q+2\,1} & \sigma_{q+2\,2} & \cdots & \sigma_{q+2\,q} & \vdots & \sigma_{q+2\,q+1} & \sigma_{q+2\,q+2} & \cdots & \sigma_{q+2\,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pq} & \vdots & \sigma_{p\,q+1} & \sigma_{p\,q+1} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

$$= \Sigma$$

olur. Burada, $\Sigma_{12} = \Sigma'_{21}$ dir.

Örneklem Ortalama Vektörü, Örneklem Varyans-Kovaryans Matrisi ve Örneklem Korelasyon Matrisi

Bu bölümde çok değişkenli veriden, örneklem ortalama vektörü, örneklem varyans-kovaryans matrisi ve örneklem korelasyon matrisinin elde edilmesi verilecek.

Birimlerin farklı karakteristiklerini gösteren değişkenler üzerinden elde edilen ölçümler yani veriler; grafik, tablo gibi farklı biçimlerde ifade edilebilir. Araştırmacı araştırmak istediği konuya ilişkin tanımlanan değişken sayısı $p \geq 1$'yi belirler ve bu değişkenlerin değerleri x_{ij}'yi her birim, birey veya deneysel çalışma için elde eder. Burada x_{ij}, $(j = 1, 2, \cdots, n\ ;\ i = 1, 2, \cdots, p)$ j inci birimin, i inci değişkenine ait ölçüm değeridir. Böylece, p değişken üzerinde yapılan n tane ölçüm değerine ilişkin $\boldsymbol{X}$ veri matrisi

$$X_{pxn} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1} & x_{p2} & \cdots & x_{pj} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Burada sütunlar birimleri, satırlar değişkenleri göstermektedir.

Böyle bir veriyi daha kolay anlamak için, verinin tümü yerine bu veriyi özetleyen sayılara ihtiyaç vardır. Büyük bir veri seti yerine, bu veri setine ilişkin bir çok bilgiyi içeren özet sayılara tanımlayıcı (betimsel) istatistik denir. Örneğin aritmetik ortalama veya örneklem ortalaması bir tanımlayıcı istatistiktir ve sayıların konum ölçüsü veya merkez değeridir. Diğer bir ölçü, her bir sayının ortalamadan uzaklığının kare ortalamasıdır ve bu da sayıların değişim ölçüsüdür. Genelde tanımlayıcı istatistikler olarak konum, değişim ve lineer ilişki ölçüleri gözönüne alınır. Buradan i inci değişkene ilişkin örneklem ortalama değeri

$$\overline{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \quad , \ i = 1, 2, \cdots, p$$

olmak üzere örneklem ortalama vektörü

$$\underline{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \vdots \\ \overline{x}_p \end{bmatrix}_{px1}$$

biçiminde elde edilir. Aynı şekilde *i* inci değişkene ilişkin örneklem varyans değeri

$$s_i^2 = s_{ii} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x}_i)^2 \quad , \; i = 1, 2, \cdots, p$$

ve *i* inci değişken ile *k* ıncı değişken arasındaki örneklem kovaryas değeri

$$s_{ik} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x}_i)(x_{kj} - \overline{x}_k) \;\; , \; i, k = 1, 2, \cdots, p$$

olmak üzere, örneklem varyans-kovaryans matrisi

$$S_n = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1p} & s_{2p} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix}_{pxp}$$

olarak elde edilir. Burada $s_{ik} = s_{ki}$ olduğundan, S_n simetrik bir matrisdir. Burada varyanslar ve kovaryanslar *n*'ye bölünerek verilmiştir. İleride *n* yerine (*n*-1)' e bölüm şeklinde elde edilecektir. Bununla birlikte *i* inci değişken ile *k* ıncı değişken arasındaki lineer ilişkinin ölçüsü örneklem korelasyon katsayısı

$$r_{ik} = \frac{\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x}_i)(x_{kj} - \overline{x}_k)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x}_i)^2}\;\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_{kj} - \overline{x}_k)^2}}, \; i, k = 1, 2, \cdots, p$$

olarak hesaplanır ve buradan örneklem korelasyon matrisi

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{12} & 1 & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1p} & r_{2p} & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{pxp}$$

dir ve $-1 \leq r_{ik} \leq 1$ dir.

Örnek: $n = 4$ ve $p = 3$ için veri matrisi

$$X_{3x4} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 & 8 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \\ 8 & 10 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, örneklem ortalama vektörünü, örneklem varyans-kovaryans ve örneklem korelasyon matrisini elde ediniz.

Çözüm: Örneklem ortalama vektörü

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} x_{1j} = \frac{1}{4}(4+6+6+8) = \frac{24}{4} = 6$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} x_{2j} = \frac{1}{4}(10+12+14+16) = \frac{52}{4} = 13$$

$$\bar{x}_3 = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} x_{3j} = \frac{1}{4}(8+10+10+8) = \frac{36}{4} = 9$$

$$\underline{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 13 \\ 9 \end{bmatrix},$$

örneklem varyans-kovaryans matrisi için varyanslar

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} (x_{1j} - \bar{x}_1)^2 \\ &= \frac{1}{4}[(4-6)^2 + (6-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2] = \frac{1}{4}(4+0+0+4) = \frac{8}{4} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{22} &= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} (x_{2j} - \bar{x}_2)^2 \\ &= \frac{1}{4}[(10-13)^2 + (12-13)^2 + (14-13)^2 + (16-13)^2] = \frac{1}{4}(9+1+1+9) = \frac{20}{4} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{33} &= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} (x_{3j} - \bar{x}_3)^2 \\ &= \frac{1}{4}[(8-9)^2 + (10-9)^2 + (10-9)^2 + (8-9)^2] = \frac{1}{4}(1+1+1+1) = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

ve kovaryanslar

$$s_{12} = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}(x_{1j} - \bar{x}_1)(x_{2j} - \bar{x}_2)$$
$$= \frac{1}{4}[(4-6)(10-13) + (6-6)(12-13) + (6-6)(14-13) + (8-6)(16-13)]$$
$$= \frac{1}{4}((-2)(-3) + 0 + 0 + (2)(3) = \frac{12}{4} = 3$$

$$s_{13} = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}(x_{1j} - \bar{x}_1)(x_{3j} - \bar{x}_3)$$
$$= \frac{1}{4}[(4-6)(8-9) + (6-6)(10-9) + (6-6)(10-9) + (8-6)(8-9)]$$
$$= \frac{1}{4}((-2)(-1) + 0 + 0 + (2)(-1)) = 0$$

$$s_{23} = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}(x_{2j} - \bar{x}_1)(x_{3j2} - \bar{x}_3)$$
$$= \frac{1}{4}[(10-13)(8-9) + (12-13)(10-9) + (14-13)(10-9) + (16-13)(8-9)]$$
$$= \frac{1}{4}((-3)(-1) + (-1)(1) + (1)(1) + (3)(-1)$$
$$= \frac{1}{4}(3 - 1 + 1 - 3) = 0$$

olmak üzere örneklem varyans-kovaryans matrisi

$$S_n = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$r_{12} = \frac{s_{12}}{\sqrt{s_{11}}\sqrt{s_{22}}} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{3}{3.1625} = 0.9486$$

$$r_{13} = \frac{s_{13}}{\sqrt{s_{11}}\sqrt{s_{33}}} = \frac{0}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = 0$$

$$r_{23} = \frac{s_{23}}{\sqrt{s_{22}}\sqrt{s_{33}}} = \frac{0}{\sqrt{5}\sqrt{2}} = 0$$

olmak üzere örneklem korelasyon matrisi

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0.9486 & 0\\ 0.9486 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Korelasyon matrisi incelendiğinde, birinci ve ikinci değişken arasında pozitif yönde güçlü bir ilişkinin olduğu ancak birinci ve üçüncü değişken ile ikinci ve üçüncü değişken arasında ilişki olmadığı görülmektedir.

Örneklem varyans-kovaryans matrisinin parçalanması, kitle varyans-kovaryans matrisinin parçalanması ile aynı yolla yapılır. Burada bilinmeyen parametreler yerine örneklemden elde edilen tahminleri gelmektedir.

Örneklem Ortalama Vektörü, Örneklem Varyans-Kovaryans Matrisi ve Örneklem Korelasyon Matrisinin Matris İşlemleriyle Elde Edilmesi

Şu ana kadar $\underline{\mathrm{x}}$ ve S gibi betimsel istatistikler, X veri matrisinden elde edildi. Buna ek olarak $\underline{\mathrm{x}}$ ve S, X veri matrisinden matris işlemleriyle direkt olarak elde edilebilir.

i inci özelliğe ilişkin örneklem ortalaması

$$\bar{x}_i=\frac{(x_{i1}.1+x_{i2}.1+\cdots+x_{in}.1)}{n}$$
$$=\frac{\underline{y}_i'\underline{1}}{n}$$

olarak verilsin. Burada $\underline{y}_i'=\begin{pmatrix}x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{in}\end{pmatrix}$ ve $\underline{1}'=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ dir. Böylece

$$\underline{\mathrm{x}}=\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \vdots\\ \bar{x}_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\underline{y}_1'\underline{1}}{n}\\ \dfrac{\underline{y}_2'\underline{1}}{n}\\ \vdots\\ \dfrac{\underline{y}_p'\underline{1}}{n}\end{bmatrix}_i=\frac{1}{n}\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n}\\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{p1} & x_{p1} & \cdots & x_{pn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}$$

veya

$$\underline{\mathrm{x}}=\frac{1}{n}X\underline{1}$$

biçiminde elde edilir. Benzer biçimde örneklem varyans-kovaryans matrisini matris işlemleriyle elde etmek için en son elde edilen ifade sağdan $\underline{1}'$ vektörü ile çarpıldığında *pxn* tipindeki ortalamalar matrisi

$$\underline{\mathrm{x}}\underline{1}' = \frac{1}{n} X \underline{1}\,\underline{1}' = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_1 & \cdots & \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{x}_p & \bar{x}_p & \cdots & \bar{x}_p \end{bmatrix}_{pxn}$$

elde edilir. *X* veri matrisinden, ortalamalar matrisi çıkarılır ise *pxn* tipindeki sapmalar(artıklar) matrisi

$$X - \frac{1}{n} X \underline{1}\,\underline{1}' = \begin{bmatrix} x_{11} - \bar{x}_1 & x_{12} - \bar{x}_1 & \cdots & x_{1n} - \bar{x}_1 \\ x_{21} - \bar{x}_2 & x_{22} - \bar{x}_2 & \cdots & x_{2n} - \bar{x}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1} - \bar{x}_p & x_{p2} - \bar{x}_p & \cdots & x_{pn} - \bar{x}_p \end{bmatrix}_{pxn}$$

elde edilir. Bu sapmalar matrisi transpozu ile çarpılarak, kareler ve çapraz çarpımlar toplamı olan $(n-1)S$ matrisi

$$\begin{aligned} (n-1)S &= \begin{bmatrix} x_{11} - \bar{x}_1 & x_{12} - \bar{x}_1 & \cdots & x_{1n} - \bar{x}_1 \\ x_{21} - \bar{x}_2 & x_{22} - \bar{x}_2 & \cdots & x_{2n} - \bar{x}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1} - \bar{x}_p & x_{p2} - \bar{x}_p & \cdots & x_{pn} - \bar{x}_p \end{bmatrix}_{pxn} \begin{bmatrix} x_{11} - \bar{x}_1 & x_{21} - \bar{x}_2 & \cdots & x_{p1} - \bar{x}_p \\ x_{12} - \bar{x}_1 & x_{22} - \bar{x}_2 & \cdots & x_{p2} - \bar{x}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} - \bar{x}_1 & x_{2n} - \bar{x}_2 & \cdots & x_{pn} - \bar{x}_p \end{bmatrix}_{nxp} \\ &= (X - \frac{1}{n} X \underline{1}\,\underline{1}')(X - \frac{1}{n} X \underline{1}\,\underline{1}')' \\ &= X(I - \frac{1}{n} \underline{1}\,\underline{1}')X' \end{aligned}$$

olmak üzere

$$S = \frac{1}{n-1} X(I - \frac{1}{n} \underline{1}\,\underline{1}')X'$$

biçiminde bulunur.

S'den örneklem korelasyon matrisi *R* elde edilebilir. *pxp* tipindeki örneklem standart sapma matrisi $D^{1/2}$ ile tanımlansın ve $(D^{1/2})^{-1} = D^{-1/2}$ olsun. Yani

$$D^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{s_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{s_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{s_{pp}} \end{bmatrix}_{pxp}$$

ve

$$D^{-1/2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{s_{11}}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{s_{22}}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{s_{pp}}} \end{bmatrix}_{pxp}$$

dir. Buradan örneklem korelasyon matrisi

$$R = D^{-1/2} S \ D^{-1/2}$$

biçiminde elde edilir. Ayrıca

$$S = D^{1/2} R \ D^{1/2}$$

dır.

Rasgele Değişkenlerin Lineer Bileşimlerinin Ortalama Vektörü ve Varyans-Kovaryans Matrisi

X_1, X_2; ortalamaları $E(X_1) = \mu_1$, $E(X_2) = \mu_2$, varyansları $Var(X_1) = \sigma_{11}$, $Var(X_2) = \sigma_{22}$ ve aralarındaki kovaryans $Cov(X_1, X_2) = \sigma_{12}$ olan rasgele değişkenler ve *a*, *b* sabitler olsun.

aX_1 ve bX_2 rasgele değişkenleri için

$E(aX_1) = a\mu_1$, $E(bX_2) = b\mu_2$, $Var(aX_1) = a^2\sigma_{11}$, $Var(bX_2) = b^2\sigma_{22}$, $Var(bX_2) = b^2\sigma_{22}$

dir.

Ayrıca

$$E(aX_1 + bX_2) = a\mu_1 + b\mu_2$$

$$Var(aX_1 \pm bX_2) = a^2\sigma_{11} + b^2\sigma_{22} \pm 2ab\sigma_{12}$$

$$
\begin{aligned}
Cov(aX_1, bX_2) &= E\left[(aX_1 - a\mu_1)(bX_2 - b\mu_2)\right] \\
&= E\left[a(X_1 - \mu_1)\ b(X_2 - \mu_2)\right] \\
&= abE\left[(X_1 - \mu_1)\ (X_2 - \mu_2)\right] \\
&= abCov(X_1, X_2) \\
&= ab\sigma_{12}
\end{aligned}
$$

dır.

$\underline{X}' = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}$ ve $\underline{c}' = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ olmak üzere $\underline{c}'\underline{X}$ lineere bileşimi

$$
\begin{aligned}
\underline{c}'\underline{X} &= \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \\
&= aX_1 + bX_2
\end{aligned}
$$

biçimindedir. Buradan

$$
\begin{aligned}
E(\underline{c}'\underline{X}) &= \underline{c}'E(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}) \\
&= \underline{c}' \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \end{bmatrix} \\
&= \underline{c}' \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \\
&= \underline{c}'\underline{\mu}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\underline{c}'\underline{\mu} &= \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \\
&= a\mu_1 + b\mu_2
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
Var(\underline{c}'\underline{X}) &= E\left[(\underline{c}'\underline{X} - \underline{c}'\underline{\mu})^2\right] \\
&= E\left[(\underline{c}'\underline{X} - \underline{c}'\underline{\mu})(\underline{c}'\underline{X} - \underline{c}'\underline{\mu})\right] \\
&= E\left[\underline{c}'(\underline{X} - \underline{\mu})(\underline{c}'(\underline{X} - \underline{\mu}))\right] \\
&= E\left[\underline{c}'(\underline{X} - \underline{\mu})(\underline{X} - \underline{\mu})'\underline{c}\right] \\
&= \underline{c}'E\left[(\underline{X} - \underline{\mu})(\underline{X} - \underline{\mu})'\right]\underline{c} \\
&= \underline{c}'Cov(\underline{X})\underline{c} \\
&= \underline{c}'\Sigma\underline{c}
\end{aligned}
$$

ve

$$\underline{c}'\Sigma\underline{c} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$
$$= a^2\sigma_{11} + b^2\sigma_{22} + 2ab\sigma_{12}$$

olur. Elde edilen bu sonuçlar p tane rasgele değişkenin lineer bileşimi için de geçerlidir.

$X_1, X_2, \cdots, X_p$, p tane rasgele değişkenin q tane lineer bileşimi için genel yapı

$$\begin{aligned} Z_1 &= c_{11}X_1 + c_{12}X_2 + \cdots + c_{1p}X_p \\ Z_2 &= c_{21}X_1 + c_{22}X_2 + \cdots + c_{2p}X_p \\ &\vdots \\ Z_q &= c_{q1}X_1 + c_{q2}X_2 + \cdots + c_{qp}X_p \end{aligned}$$

veya

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_q \end{bmatrix}_{qx1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{11q} & c_{q2} & \cdots & c_{qp} \end{bmatrix}_{qxp} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix}_{px1}$$
$$= C\underline{X}$$

biçimindedir. Buradan

$$\begin{aligned} E(C\underline{X}) &= CE(\underline{X}) \\ &= C\underline{\mu} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} Cov(C\underline{X}) &= E\left[(C\underline{X} - C\underline{\mu})(C\underline{X} - C\underline{\mu})'\right] \\ &= E\left[C(\underline{X} - \underline{\mu})(C(\underline{X} - \underline{\mu}))'\right] \\ &= E\left[C(\underline{X} - \underline{\mu})(\underline{X} - \underline{\mu})'C'\right] \\ &= CE\left[(\underline{X} - \underline{\mu})(\underline{X} - \underline{\mu})'\right]C' \\ &= C\ Cov(\underline{X})\ C' \\ &= C\ \Sigma\ C' \end{aligned}$$

dir.

Örnek : $\underline{X}' = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}$, ortalama vektörü $\underline{\mu}' = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix}$ ve varyans-kovaryans matrisi $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$ olan bir rasgele vektör ve $\underline{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 - X_2 \\ X_1 + X_2 \end{bmatrix}$ olsun. $\underline{Z}$ rasgele vektörünün ortalama vektörünü ve varyans-kovaryans matrisini elde ediniz.

Çözüm :

$$
\begin{aligned}
E(\underline{Z}) &= E(C\underline{X}) \\
&= C\underline{\mu} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_1 + \mu_2 \end{bmatrix} \\
&= \underline{\mu}_Z
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
Cov(\underline{Z}) &= Cov(C\underline{X}) \\
&= C\ \Sigma\ C' \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_{11} - 2\sigma_{12} + \sigma_{22} & \sigma_{11} - \sigma_{22} \\ \sigma_{11} - \sigma_{22} & \sigma_{11} + 2\sigma_{12} + \sigma_{22} \end{bmatrix} \\
&= \Sigma_Z
\end{aligned}
$$

elde edilir. Eğer X_1, X_2 rasgele değişkenlerinin varyansları eşit ise yani $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ ise Σ_Z matrisinin diagonal olmayan elemanları sıfır olur. Buradan varyansları eşit olan iki rasgele değişkenin toplamları ve farkları ilişkisizdir.