9. HAFTA

ÇOK DEĞİŞKENLİ NORMAL DAĞILIM

Çok değişkenli analizlerde, çok boyutlu normal dağılım önemli rol oynar. Bir çok çok değişkenli istatistiğin örneklem dağılımı merkezi limit teoreminden yaklaşık normaldir.

Çok değişkenli normal yoğunluk fonksiyonu, $p \geq 2$ için tek değişkenli normal yoğunluk fonksiyonunun genelleştirilmiş halidir. Ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan tek değişkenli normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

biçimindedir. Olasılık yoğunluk fonksiyonundaki $\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$ ifadesi

$$\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = (x-\mu)(\sigma^2)^{-1}(x-\mu)$$

biçiminde yazılabilir. Bu yaklaşım $px1$ boyutlu $\underline{\mathrm{x}}$ gözlem vektörü için genelleştirilir ise

$$(\underline{\mathrm{x}}-\underline{\mu})' \, \Sigma^{-1}(\underline{\mathrm{x}}-\underline{\mu})$$

elde edilir. Burada,

$E(\underline{X}) = \underline{\mu}_{px1}$; $\underline{X}$ rasgele vektörünün beklenen değeri

$Cov(\underline{X}) = \Sigma_{pxp}$; $\underline{X}$ rasgele vektörünün varyans-kovaryans matrisi

$\underline{\mathrm{x}}_{px1}$; $\underline{X}$ rasgele vektörünün gözlem vektörü

dir.

Çok değişkenli normal yoğunluk fonksiyonu elde edilirken, tek değişkenli yoğunluk fonksiyonundaki uzaklık ile çok değişkenli yoğunluk fonksiyonundaki uzaklık yer değiştirir. Ancak bu değişiklik yapılırken, tek değişkenli yoğunluk fonksiyonundaki sabit çarpan, her p için çok değişkenli yoğunluk fonksiyonunun yüzeyi altındaki hacim “1” olacak biçimde daha genel bir sabit ile değiştirilir.

Çok değişkenli durumda olasılıklar, x_i , $i=1,2,...,p$ değerlerinin aralıkları ile tanımlanan bölgeler üzerindeki yüzeyin altındaki hacimler ile verildiğinden, bu değişiklik geçerlidir. Çok değişkenli yoğunluk fonksiyonu için sabit değer $(2\pi)^{-p/2}|\Sigma|^{-1/2}$ dir ve $\underline{X}'=(X_1,X_2,...,X_p)$ rasgele vektörü için p-boyutlu normal yoğunluk fonksiyonu

$$f(\underline{x})=\frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu})'\Sigma^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu})} \quad , \ -\infty<x_i<\infty,\ i=1,2,...,p$$

biçimindedir ve $\underline{X}\sim N_p(\underline{\mu},\Sigma)$ ile gösterilir.

Örnek: $\underline{X}\sim N_2(\underline{\mu},\Sigma)$ ve $\underline{\mu}=\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{bmatrix}$, $\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22}\end{bmatrix}$ olan iki değişkenli normal yoğunluk fonksiyonunun açık halini elde ediniz.

Çözüm: p boyutlu normal dağılım için olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(\underline{x})=\frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu})'\Sigma^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu})} \quad , \ -\infty<x_i<\infty,\ i=1,2,...,p$$

biçiminde olmak üzere $p=2$ için fonksiyonu açık olarak elde etmeye çalışalım.

$$\Sigma^{-1}=\frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22}-\sigma_{12}^2}\begin{bmatrix}\sigma_{22} & -\sigma_{12}\\ -\sigma_{12} & \sigma_{11}\end{bmatrix},$$

$$\rho_{12}=\frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\ \sigma_{22}}}=Corr(X_1,X_2) \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{12}=\rho_{12}\sqrt{\sigma_{11}\ \sigma_{22}}$$

$$\begin{aligned}|\Sigma|&=\sigma_{11}\sigma_{22}-\sigma_{12}^2\\ &=\sigma_{11}\sigma_{22}-(\rho_{12}\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}})^2\\ &=\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho_{12}^2)\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}\sigma_{11}\sigma_{22}-\sigma_{12}^2&=\sigma_{11}\sigma_{22}-(\rho_{12}\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}})^2\\ &=\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho_{12}^2)\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Elde edilen bu değerler üstel fonksiyonda yerine yazıldığında fonksiyon

$$(\underline{\mathrm{x}}-\underline{\mu})'\,\Sigma^{-1}(\underline{\mathrm{x}}-\underline{\mu}) = [x_1-\mu_1, x_2-\mu_2]\frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho_{12}^2)}\begin{bmatrix} \sigma_{22} & -\rho_{12}\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}} \\ -\rho_{12}\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}} & \sigma_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sigma_{22}(x_1-\mu_1)^2+\sigma_{11}(x_2-\mu_2)^2-2\rho_{12}\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho_{12}^2)}$$

$$= \frac{1}{1-\rho_{12}^2}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)^2+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right)^2-2\rho_{12}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right)\right]$$

ifadesi elde edilir. Böylece iki değişkenlik normal yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{(2\pi)\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho_{12}^2)}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)^2+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right)^2-2\rho_{12}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right)\right]\right\}$$

biçiminde elde edilir.

X_1, X_2 ilişkisiz rasgele değişkenler yani $\rho_{12}=0$ ise ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{(2\pi)\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)^2+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right)^2\right]\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{11}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)^2\right]\right\}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{22}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right)^2\right]\right\}\right)$$

$$= f_{X_1}(x_1)\; f_{X_2}(x_2)$$

marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarının çarpına eşit olur. Bu sonuçtan normallik varsayımı altında, iki rasgele değişken ilişkisiz ise bu rasgele değişkenler aynı zamanda bağımsızdır sonucu çıkar.

p-boyutlu normal rasgele vektör için, p-boyutlu normal yoğunluk fonksiyonundan yoğunluk için sabit yüksekliklerle elde edilen $\underline{\mathrm{x}}$ değerlerinin çizimleri elipslerdir. Yani çok değişkenli normal yoğunluk yüzeyleri üzerinde sabittir. Burada $(\underline{\mathrm{x}}\text{-}\underline{\mu})'\,\Sigma^{-1}(\underline{\mathrm{x}}\text{-}\underline{\mu})$ kare uzaklığı sabittir ve $\underline{\mathrm{x}}$ vektörünün çizimlerine kontur denir.

Sabit yoğunluk elipsoidinin eksenleri, Σ^{-1}'in özvektörlerinin yönünde ve uzunlukları Σ^{-1}'in özdeğerlerinin kare köklerine karşılıklı orantılıdır.

Sonuç: Σ pozitif tanımlı ise yani Σ^{-1} mevcut ise

$$\Sigma \underline{e} = \lambda \underline{e} \Rightarrow \Sigma^{-1} \underline{e} = \frac{1}{\lambda} \underline{e}$$

dir. Burada $(\lambda, \underline{e})$ çifti, Σ'nın özdeğerleri ve ilişkili birim özvektörleri, $(\frac{1}{\lambda}, \underline{e})$ çifti, Σ^{-1}'in özdeğerleri ve ilişkili birim özvektörleridir.

Özet olarak, p-boyutlu normal dağılım için sabit yoğunluğun konturları $\underline{\mathrm{x}}$ ile tanımlanan elipsoidlerdir. Yani

$$(\underline{\mathrm{x}}\text{-}\underline{\mu})'\, \Sigma^{-1} (\underline{\mathrm{x}}\text{-}\underline{\mu}) = c^2$$

dir. Bu elpsoidlerin merkezi $\underline{\mu}$' dür ve eksenleri $(\pm c\sqrt{\lambda_i}\underline{e}_i)$ dir. Burada $\Sigma \underline{e}_i = \lambda_i \underline{e}_i$, $i = 1, 2, ..., p$ dir.

Örnek: $\underline{X} \sim N_2(\underline{\mu}, \Sigma)$ ve $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$ olan iki değişkenli normal dağılımda $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ olduğunda sabit yoğunluk konturlarının eksenlerini elde ediniz.

Çözüm: $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ olduğunda iki değişkenli normal dağılım için sabit olasılık yoğunluk konturlarının eksenleri elde edilecek. Eksenler, Σ'nın özdeğerleri ve ilişkili birim özvektörlerine göre belirlenmektedir.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{11} \end{bmatrix} \text{ olduğunda}$$

$$|\Sigma - \lambda I| = 0 \text{ eşitliğinden}$$

$$0 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{11} - \lambda \end{bmatrix} = (\sigma_{11} - \lambda)^2 - \sigma_{12}^2$$
$$= (\lambda - \sigma_{11} - \sigma_{12})(\lambda - \sigma_{11} + \sigma_{12})$$

dir. Buradan özdeğerler $\lambda_1 = \sigma_{11} + \sigma_{12}$ ve $\lambda_2 = \sigma_{11} - \sigma_{12}$ olarak elde edilir. λ_1 özdeğerine ilişkin $\underline{e}_1$ birim özvektörü

$$\Sigma \underline{e}_1 = \lambda_1 \underline{e}_1$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{bmatrix} = (\sigma_{11} + \sigma_{12}) \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{11} e_{11} + \sigma_{12} e_{21} = (\sigma_{11} + \sigma_{12}) e_{11}$$
$$\sigma_{12} e_{11} + \sigma_{11} e_{21} = (\sigma_{11} + \sigma_{12}) e_{21}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizliklerden $e_{11} = e_{21}$ elde edilir ve $\lambda_1 = \sigma_{11} + \sigma_{12}$ için

birimleştirilmiş özvektör

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Benzer biçimde $\lambda_2 = \sigma_{11} - \sigma_{12}$ için

$$\Sigma \underline{e}_2 = \lambda_2 \underline{e}_2$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{bmatrix} = (\sigma_{11} - \sigma_{12}) \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{11} e_{12} + \sigma_{12} e_{22} = (\sigma_{11} - \sigma_{12}) e_{12}$$
$$\sigma_{12} e_{12} + \sigma_{11} e_{22} = (\sigma_{11} - \sigma_{12}) e_{22}$$

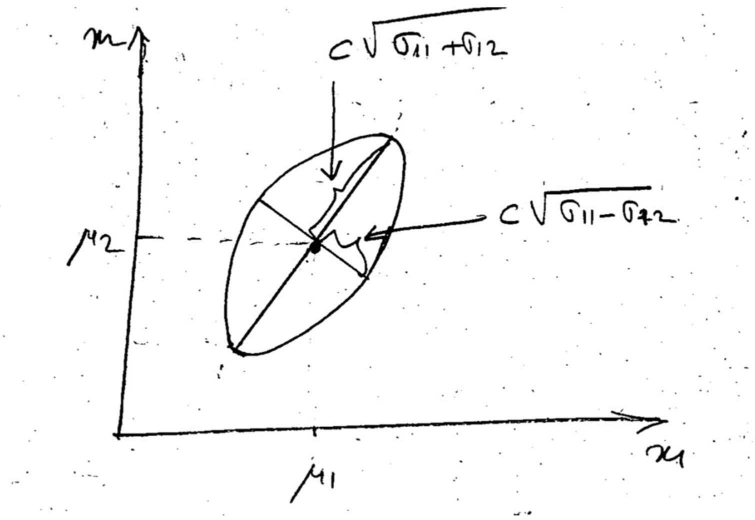
eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizliklerden $e_{12} = -e_{22}$ elde edilir ve $\lambda_2 = \sigma_{11} - \sigma_{12}$ için

$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

σ_{12} kovaryansi (veya ρ_{12} korelasyonu) pozitif olduğunda $\lambda_1 = \sigma_{11} + \sigma_{12}$ büyük olan özdeğerdir ve ilişkili $\underline{e}_1' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ özvektörü, $\underline{\mu}' = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix}$ noktasından geçen 45^0'lik doğru boyunca uzanır. Özvektörün değerleri eşit olduğundan, bu durun pozitif değerli her kovaryans(korelasyon) için doğrudur. Sabit yoğunluk eksenleri $\pm c\sqrt{\lambda_1}\underline{e}_1$ ve $\pm c\sqrt{\lambda_2}\underline{e}_2$ ile verildiğinden ve özvektörlerin uzunlukları 1'e eşit olduğundan büyük eksen, büyük özdeğerle ilişkili olacaktır. Buradan pozitif ilişkili normal rasgele değişkenler için sabit yoğunluk elipslerinin büyük ekseni $\underline{\mu}' = [\mu_1 \quad \mu_2]$ noktasından 45^0 ile geçen bir doğru olacaktır. Kovaryans(korelasyon) negatif olduğunda $\lambda_2 = \sigma_{11} - \sigma_{12}$ büyük özdeğer olacaktır ve sabit yoğunluk elipslerinin büyük ekseni $\underline{\mu}' = [\mu_1 \quad \mu_2]$ noktasından geçen 45^0 ' lik doğruya sağ açılı doğrular boyunca uzanırlar. Bu sonuçlar sadece $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ olduğunda doğrudur.

$\sigma_{11} = \sigma_{22}$ olan iki değişkenli normal dağılım için sabit yoğunluk elipsleri $\sigma_{12} > 0 (\rho_{12} > 0)$ olduğunda

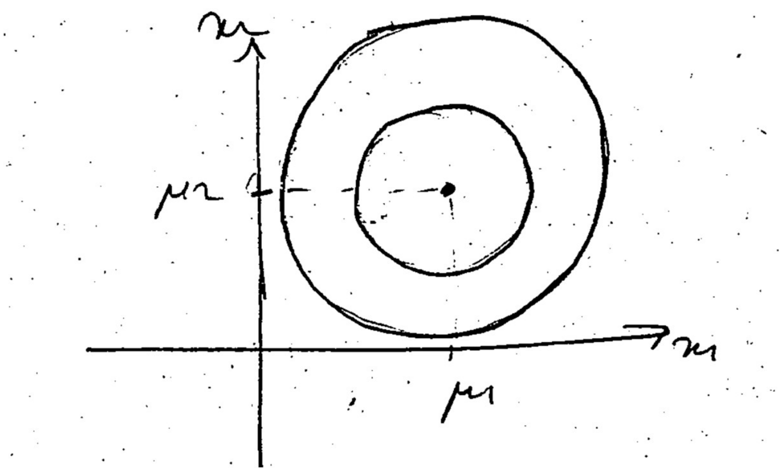


biçimindedir.

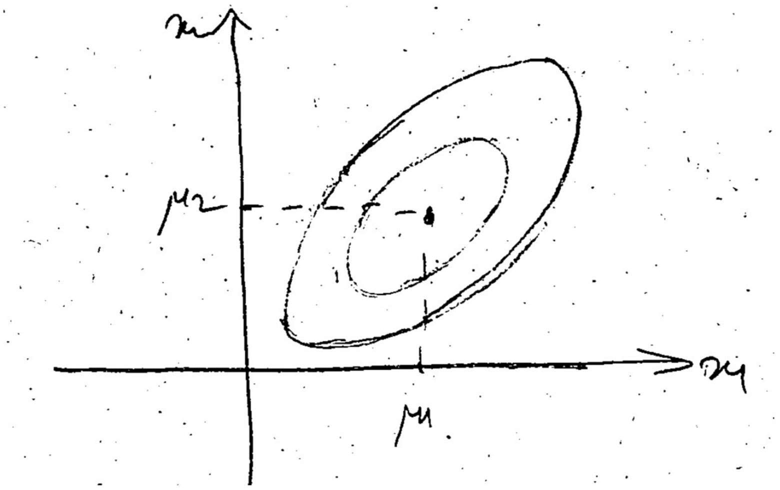
Karesel form

$(\underline{x}-\underline{\mu})' \, \Sigma^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu}) = c^2 = \chi_p^2(\alpha)$ dir, burada $\chi_p^2(\alpha)$, p serbestlik dereceli ve α yanılma olasılığında Ki-kare dağılımının değeridir. p boyutlu normal dağılım için, $\underline{x}$ değerlerinin güven elipsoidi $(1\text{-}\alpha)$ olasılığı ile $(\underline{x}-\underline{\mu})' \, \Sigma^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu}) \leq \chi_p^2(\alpha)$ eşitliğini sağlar.

$\sigma_{11} = \sigma_{22}$ ve $\rho_{12} = 0$ olan iki değişkenli normal dağılım için %50'lik sabit yoğunluk konturları



ve $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ ve $\rho_{12} = 0.75$ olan iki değişkenli normal dağılım için %90'lık sabit yoğunluk konturları



biçimindedir.

$(\underline{x}-\underline{\mu})' \, \Sigma^{-1} (\underline{x}-\underline{\mu})$ kare uzaklığı "0" olduğunda, yani $(\underline{x}=\underline{\mu})$ olduğunda, p değişkenli $f(\underline{x})$ normal yoğunluk maksimum değere ulaşır.

Çok Değişkenli Normal Dağılımın Diğer Bazı Özellikleri

Çok Değişkenli Normal Dağılıma sahip $\underline{X}$ rasgele vektörü için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

1. $\underline{X}$ rasgele vektörünün elemanlarının lineer birleşimlerinin dağılımı normaldir.
2. $\underline{X}$ rasgele vektörünün elemanlarının bütün alt kümelerinin dağılım (çok değişkenli) normaldir.
3. Kovaryanslar sıfır ise, ilişkili değişkenler bağımsız dağılır.

4. $\underline{X}$ rasgele vektörünün elemanlarının koşullu dağılım (çok değişkenli) normaldir.

Sonuç: $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ ise $\underline{a}'\underline{X} = a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_pX_p$ lineer birleşimi $N(\underline{a}'\underline{\mu}, \underline{a}'\Sigma\underline{a})$ dağılır. Ayrıca her $\underline{a}$ için $\underline{a}'\underline{X} \sim N(\underline{a}'\underline{\mu}, \underline{a}'\Sigma\underline{a})$ ise, $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ dir.

Örnek: $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ olsun. Burada $E(\underline{X}) = \underline{\mu}$ ve $Cov(\underline{X}) = \Sigma$ dır. $\underline{a}' = (1 \quad 0 \quad ... \quad 0)$ sabitlerden oluşan *p* boyutlu bir vektör olmak üzere $\underline{a}'\underline{X}$ lineer birleşimin dağılımını bulunuz.

Çözüm: $\underline{a}'\underline{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} = X_1$

olmak üzere

$$E(\underline{a}'\underline{X}) = \underline{a}'\underline{\mu}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \mu_1$$

ve

$$Cov(\underline{a}'\underline{X}) = \underline{a}'\Sigma\underline{a}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & ... & \sigma_{1p} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & ... & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1p} & \sigma_{2p} & ... & \sigma_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \sigma_{11}$$

olduğundan, $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_{11})$ dir. Daha genel olarak $\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_p)$ rasgele vektörünün her hangi bir X_i bileşeninin marjinal dağılımı $N(\mu_i, \sigma_{ii})$ dir.

Sonuç: $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ ve

$$A_{qxp}\underline{X}_{px1} = \begin{bmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1p}X_p \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2p}X_p \\ \vdots \\ a_{q1}X_1 + a_{q2}X_2 + ... + a_{qp}X_p \end{bmatrix}$$

q tane lineer bileşimin ortak dağılımı $N_q(A\underline{\mu}, A\Sigma A')$ dır. Ayrıca elemanları sabitler olan $\underline{d}_{px1}$ vektörü için $(\underline{X} + \underline{d}) \sim N_p(\underline{\mu} + \underline{d}, \Sigma)$ dır.

Örnek: $\underline{X}_{3x1} \sim N_3(\underline{\mu}, \Sigma)$ için $\begin{bmatrix} X_1 - X_2 \\ X_2 - X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = A_{2x3}\underline{X}_{3x1}$ ifadesinin dağılımını bulunuz.

Çözüm: $A_{2x3}\underline{X}_{3x1} \sim N_2(A\underline{\mu}, A\Sigma A')$ dır. Burada

$$\begin{aligned} E(A\underline{X}) &= A\underline{\mu} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_2 - \mu_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} Cov(A\underline{X}) &= A\Sigma A' \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} - 2\sigma_{12} + \sigma_{22} & \sigma_{12} + \sigma_{23} - \sigma_{22} - \sigma_{13} \\ \sigma_{12} + \sigma_{23} - \sigma_{22} - \sigma_{13} & \sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dır.

Sonuç: $\underline{X}_{px1}$ rasgele vektörünün her altkümesinin dağılımı yine normaldir.

$\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ olmak üzere

$$\underline{X}_{px1} = \begin{bmatrix} \underline{X}^{(1)}_{qx1} \\ ---- \\ \underline{X}^{(2)}_{(p-q)x1} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \underline{\mu}_{px1} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}^{(1)}_{qx1} \\ ---- \\ \underline{\mu}^{(2)}_{(p-q)x1} \end{bmatrix}$$

ve

$$\Sigma_{pxp} = \begin{bmatrix} \Sigma^{(11)}_{qxq} & \vdots & \Sigma^{(12)}_{qx(p-q)} \\ --- & --- & --- \\ \Sigma^{(21)}_{(p-q)xq} & \vdots & \Sigma^{(22)}_{(p-q)x(p-q)} \end{bmatrix}$$

biçiminde parçalara ayrılır ise $\underline{X}^{(1)} \sim N_q(\underline{\mu}^{(1)}, \Sigma^{(11)})$ dir.

Örnek: $\underline{X}_{5x1} \sim N_5(\underline{\mu}, \Sigma)$ olmak üzere (X_2, X_4) rasgele değişkenlerinin ortak dağılımını bulunuz.

Çözüm: $\underline{X}_{5x1} = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_4 \\ --- \\ X_1 \\ X_3 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{X}^{(1)}_{2x1} \\ ---- \\ \underline{X}^{(2)}_{3x1} \end{bmatrix}$ biçiminde parçalandığında,

$$E(\underline{X}_{5x1}) = \begin{bmatrix} \mu_2 \\ \mu_4 \\ --- \\ \mu_1 \\ \mu_3 \\ \mu_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}^{(1)}_{2x1} \\ ---- \\ \underline{\mu}^{(2)}_{3x1} \end{bmatrix}$$

ve

$$Cov(\underline{X}) = \Sigma$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{24} & \vdots & \sigma_{12} & \sigma_{23} & \sigma_{25} \\ \sigma_{24} & \sigma_{44} & \vdots & \sigma_{14} & \sigma_{34} & \sigma_{45} \\ --- & -- & \vdots & --- & --- & --- \\ \sigma_{12} & \sigma_{14} & \vdots & \sigma_{11} & \sigma_{13} & \sigma_{15} \\ \sigma_{23} & \sigma_{34} & \vdots & \sigma_{13} & \sigma_{33} & \sigma_{35} \\ \sigma_{25} & \sigma_{45} & \vdots & \sigma_{15} & \sigma_{35} & \sigma_{55} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Sigma^{(11)}_{2x2} & \vdots & \Sigma^{(12)}_{2x3} \\ --- & \vdots & --- \\ \Sigma^{(21)}_{3x2} & \vdots & \Sigma^{(22)}_{3x3} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Buradan,

$$\underline{X}^{(1)} \sim N_2(\ \underline{\mu}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mu_2 \\ \mu_4 \end{bmatrix},\ \Sigma^{(11)} = \begin{bmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{24} \\ \sigma_{24} & \sigma_{44} \end{bmatrix})$$

dir.

Sonuç:

a. $\underline{X}^{(1)}_{q_1x1}$ ve $\underline{X}^{(2)}_{q_2x1}$ rasgele vektörleri bağımsız ise her zaman $Cov(\underline{X}^{(1)}, \underline{X}^{(2)}) = 0_{q_1xq_2}$ dır.

b. $\begin{bmatrix} \underline{X}^{(1)} \\ --- \\ \underline{X}^{(2)} \end{bmatrix} \sim N_{q_1+q_2}(\begin{bmatrix} \underline{\mu}^{(1)}_{q_1x1} \\ --- \\ \underline{\mu}^{(2)}_{q_2x1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma^{(11)}_{q_1xq_1} & \vdots & \Sigma^{(12)}_{q_1xq_2} \\ --- & \vdots & --- \\ \Sigma^{(21)}_{q_2xq_1} & \vdots & \Sigma^{(22)}_{q_2xq_2} \end{bmatrix})$ ise $\underline{X}^{(1)}$ ve $\underline{X}^{(2)}$ nin bağımsız olması için gerek ve yeter şart $\Sigma^{(12)} = 0$ olmasıdır.

c. $\underline{X}^{(1)}$ ve $\underline{X}^{(2)}$ nin bağımsız ve dağılımları sırasıyla $\underline{X}^{(1)} \sim N_{q_1}(\ \underline{\mu}^{(1)}\ ,\ \Sigma^{(11)})$ ve $\underline{X}^{(2)} \sim N_{q_2}(\ \underline{\mu}^{(2)}\ ,\ \Sigma^{(22)})$ ise

$$\begin{bmatrix} \underline{X}^{(1)} \\ --- \\ \underline{X}^{(2)} \end{bmatrix} \sim N_{q_1+q_2}(\begin{bmatrix} \underline{\mu}^{(1)} \\ --- \\ \underline{\mu}^{(2)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma^{(11)} & \vdots & 0 \\ --- & \vdots & --- \\ 0 & \vdots & \Sigma^{(22)} \end{bmatrix})$$ dır.

Örnek: $\underline{X}_{3x1}=\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}\sim N_3(\underline{\mu}=\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\mu_3\end{bmatrix},\Sigma=\begin{bmatrix}4&1&0\\1&3&0\\0&0&2\end{bmatrix})$ olsun. Buradan,

a. X_1 ve X_2 rasgele değişkenleri bağımsız mıdır?

b. (X_1,X_2) ile X_3 için ne diyebilirsiniz?

Çözüm:

a. $Cov(X_1,X_2)=\sigma_{12}=1$ olduğundan X_1 ve X_2 rasgele değişkenleri bağımsız değildir.

b. $\underline{X}=\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\---\\X_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underline{X}^{(1)}\\---\\\underline{X}^{(2)}\end{bmatrix},\ \Sigma=\begin{bmatrix}4&1&\vdots&0\\1&3&\vdots&0\\---&---&\vdots&---\\0&0&\vdots&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Sigma^{(11)}_{2x2}&\vdots&\Sigma^{(12)}_{2x1}\\---&\vdots&---\\\Sigma^{(21)}_{1x2}&\vdots&\Sigma^{(22)}_{1x}\end{bmatrix}$ dir. Buradan,

$Cov(\underline{X}^{(1)}=\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix},\underline{X}^{(2)}=X_3)=\Sigma^{(12)}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ olduğundan, $\underline{X}^{(1)}=\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}$ ve $\underline{X}^{(2)}=X_3$

bağımsızdır. Burada X_3 hem X_1 hem de X_2 ile bağımsızdır.

Sonuç:

$$\underline{X}_{px1}=\begin{bmatrix}\underline{X}^{(1)}_{qx1}\\---\\\underline{X}^{(2)}_{(p-q)x1}=\underline{\text{x}}^{(2)}\end{bmatrix}\sim N_p(\begin{bmatrix}\underline{\mu}^{(1)}_{qx1}\\---\\\mu^{(2)}_{(p-q)x1}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\Sigma^{(11)}_{qxq}&\vdots&\Sigma^{(12)}_{qx(p-q)}\\---&\vdots&---\\\Sigma^{(21)}_{(p-q)xq}&\vdots&\Sigma^{(22)}_{(p-q)x(p-q)}\end{bmatrix})\text{ ve}\qquad \left|\Sigma^{(22)}\right|>0$$

olsun.

$\underline{X}^{(2)}_{(p-q)x1}=\underline{\text{x}}^{(2)}$ verildiğinde $\underline{X}^{(1)}_{qx1}$ 'in koşullu dağılımı

$(\underline{X}^{(1)}\left|\underline{X}^{(2)}=\underline{\text{x}}^{(2)}\right.)\sim N_q(\underline{\mu}^{(1)}+\Sigma^{(12)}\Sigma^{(22)^{-1}}(\underline{\text{x}}^{(2)}-\mu^{(2)}),\Sigma^{(11)}-\Sigma^{(12)}\Sigma^{(22)^{-1}}\Sigma^{(21)})$ dir.

İspat:

$A_{pxp}=\begin{bmatrix}I_{qxq}&\vdots&-\Sigma^{(12)}\Sigma^{(22)^{-1}}_{qx(p-q)}\\---&\vdots&---\\0_{(p-q)xq}&\vdots&I_{(p-q)x(p-q)}\end{bmatrix}$ alınsın. Buradan

$$A(\underline{X}-\underline{\mu}) = A\begin{bmatrix} \underline{X}^{(1)}-\underline{\mu}^{(1)} \\ --- \\ \underline{X}^{(2)}-\underline{\mu}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{X}^{(1)}-\underline{\mu}^{(1)}-\Sigma^{(12)}\Sigma^{(22)^{-1}}(\underline{X}^{(2)}-\underline{\mu}^{(2)}) \\ ------------------------ \\ \underline{X}^{(2)}-\underline{\mu}^{(2)} \end{bmatrix}$$

rasgele vektörü varyans-kovaryans matrisi

$$A\Sigma A' = \begin{bmatrix} I & \vdots & -\Sigma^{(12)}\Sigma^{(22)^{-1}} \\ --- & \vdots & --- \\ 0 & \vdots & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma^{(11)} & \vdots & \Sigma^{(12)} \\ --- & \vdots & --- \\ \Sigma^{(21)} & \vdots & \Sigma^{(22)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \vdots & 0' \\ --- & \vdots & --- \\ (-\Sigma^{(12)}\Sigma^{(22)^{-1}})' & \vdots & I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Sigma^{(11)}-\Sigma^{(12)}\Sigma^{(22)^{-1}}\Sigma^{(21)} & \vdots & 0' \\ --- & \vdots & --- \\ 0 & \vdots & \Sigma^{(22)} \end{bmatrix}$$

olan p boyutlu normal dağılır.

$\underline{X}^{(1)}-\underline{\mu}^{(1)}-\Sigma^{(12)}\Sigma^{(22)^{-1}}(\underline{X}^{(2)}-\underline{\mu}^{(2)})$ ve $\underline{X}^{(2)}-\underline{\mu}^{(2)}$ rasgele vektörlerinin kovaryansı sıfır olduğundan bağımsızlardır. Bununla birlikte,

$$\underline{X}^{(1)}-\underline{\mu}^{(1)}-\Sigma^{(12)}\Sigma^{(22)^{-1}}(\underline{X}^{(2)}-\underline{\mu}^{(2)}) \sim N_q(0\ ,\ \Sigma^{(11)}-\Sigma^{(12)}\Sigma^{(22)^{-1}}\Sigma^{(21)})$$

dir.

$\underline{X}^{(2)}_{(p-q)x1}=\underline{\mathrm{x}}^{(2)}$ verildiğinde $\underline{\mu}^{(1)}+\Sigma^{(12)}\Sigma^{(22)^{-1}}(\underline{\mathrm{x}}^{(2)}-\underline{\mu}^{(2)})$ elemanları sabitler olan bir vektördür.

$\underline{X}^{(1)}-\underline{\mu}^{(1)}-\Sigma^{(12)}\Sigma^{(22)^{-1}}(\underline{X}^{(2)}-\underline{\mu}^{(2)})$ ve $\underline{X}^{(2)}-\underline{\mu}^{(2)}$ rasgele vektörleri bağımsız olduğundan,

$\underline{X}^{(1)}-\underline{\mu}^{(1)}+\Sigma^{(12)}\Sigma^{(22)^{-1}}(\underline{\mathrm{x}}^{(2)}-\underline{\mu}^{(2)})$ 'nin koşullu dağılımı $\underline{X}^{(1)}-\underline{\mu}^{(1)}-\Sigma^{(12)}\Sigma^{(22)^{-1}}(\underline{X}^{(2)}-\underline{\mu}^{(2)})$ 'nin koşulsuz dağılımı ile aynıdır.

$\underline{X}^{(1)}-\underline{\mu}^{(1)}-\Sigma^{(12)}\Sigma^{(22)^{-1}}(\underline{X}^{(2)}-\underline{\mu}^{(2)}) \sim N_q(0\ ,\ \Sigma^{(11)}-\Sigma^{(12)}\Sigma^{(22)^{-1}}\Sigma^{(21)})$ olduğundan,

$\underline{X}^{(1)}-\underline{\mu}^{(1)}+\Sigma^{(12)}\Sigma^{(22)^{-1}}(\underline{\mathrm{x}}^{(2)}-\underline{\mu}^{(2)})$ rasgele vektörü $\underline{X}^{(2)}=\underline{\mathrm{x}}^{(2)}$ verildiğinde

$\underline{X}^{(1)}-\underline{\mu}^{(1)}+\Sigma^{(12)}\Sigma^{(22)^{-1}}(\underline{\mathrm{x}}^{(2)}-\underline{\mu}^{(2)})$ rasgele vektörüne dönüşür. Böylece

$$(\underline{X}^{(1)} \mid \underline{X}^{(2)}=\underline{\mathrm{x}}^{(2)}) \sim N_q(\underline{\mu}^{(1)}+\Sigma^{(12)}\Sigma^{(22)^{-1}}(\underline{\mathrm{x}}^{(2)}-\mu^{(2)})\ ,\ \Sigma^{(11)}-\Sigma^{(12)}\Sigma^{(22)^{-1}}\Sigma^{(21)})$$

dir.

Örnek: $\underline{X}' = (X_1, X_2)$ rasgele vektörünün dağılımı $\underline{X}_{2x1} \sim N_2(\underline{\mu}, \Sigma)$ olmak üzere, $X_2 = x_2$ verildiğinde X_1 rasgele değişkeninin koşullu dağılımının

$$(X_1 \mid X_2 = x_2) \sim N(\mu_1 + \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{22}}(x_2 - \mu_2)\ ,\ \sigma_{11} - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{22}})$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\underline{X}' = (X_1, X_2)$ rasgele vektörü için, $X_2 = x_2$ verildiğinde X_1 rasgele değişkeninin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x_1 \mid x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_2)}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $f(x_1, x_2)$, (X_1, X_2) rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $f(x_2)$, X_2 rasgele değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Bununla birlikte

$$E(\underline{X}) = \underline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}\ ,\ Cov(\underline{X}) = \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \text{ ve } Corr(X_1, X_2) = \rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}} \text{ dır.}$$

Ayrıca

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}}$$

$$\rho_{12}^2 = \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{11}\sigma_{22}}$$

$$\sigma_{11}\rho_{12}^2 = \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{22}}$$

ve $\sigma_{11} - \dfrac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{22}} = \sigma_{11}(1 - \rho_{12}^2)$ dir.

İki değişkenli normal olasılık yoğunluk fonksiyonu daha önce

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho_{12}^2)}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)} \left[\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \right)^2 + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \right)^2 - 2\rho_{12} \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \right) \right] \right\}$$

olarak elde edilmişti. Bu fonksiyonunun üstel ifadesinde $(x_1-\mu_1)$ 'i içeren iki terim $-\dfrac{1}{2(1-\rho_{12}^2)}$ sabit terim ile çarpım biçiminde ifade edilebilir ve

$$\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_{11}}-2\rho_{12}\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}}=\frac{1}{\sigma_{11}}\left[x_1-\mu_1-\rho_{12}\frac{\sqrt{\sigma_{11}}}{\sqrt{\sigma_{22}}}(x_2-\mu_2)\right]^2-\frac{\rho_{12}^2}{\sigma_{22}}(x_2-\mu_2)^2$$

biçiminde yazılabilir.

$\rho_{12}=\dfrac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}}$ veya $\rho_{12}\dfrac{\sqrt{\sigma_{11}}}{\sqrt{\sigma_{22}}}=\dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}$ olduğundan, üstel ifadenin tamamı;

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_{11}}-2\rho_{12}\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_{22}}\right]\\
&\qquad=-\frac{1}{2\sigma_{11}(1-\rho_{12}^2)}\left[x_1-\mu_1-\rho_{12}\frac{\sqrt{\sigma_{11}}}{\sqrt{\sigma_{22}}}(x_2-\mu_2)\right]^2-\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)}\left(\frac{1}{\sigma_{22}}-\frac{\rho_{12}^2}{\sigma_{22}}\right)(x_2-\mu_2)^2\\
&\qquad=-\frac{1}{2\sigma_{11}(1-\rho_{12}^2)}\left[x_1-\mu_1-\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}(x_2-\mu_2)\right]^2-\frac{1}{2}\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_{22}}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Ayrıca $2\pi\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho_{12}^2)}$ sabiti $(\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{22}})\,(\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{11}(1-\rho_{12}^2)})$ biçiminde yazılabilir. Buradan X_1 ve X_2 'nin ortak yoğunluk fonksiyonu X_2 'nin marjinal yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X_2}(x_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{22}}}e^{(x_2-\mu_2)^2/2\sigma_{22}}$$

bölündüğünde, $X_2=x_2$ verildiğinde X_1 rasgele değişkeninin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x_1 | x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_2)}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{(\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{11}(1-\rho_{12}^2)}\ )\ (\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{22}}\ )} e^{-\frac{1}{2\sigma_{11}(1-\rho_{12}^2)}\left[x_1-\mu_1-\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}(x_2-\mu_2)\right]^2 - \frac{1}{2}\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_{22}}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{22}}} e^{(x_2-\mu_2)^2/2\sigma_{22}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{11}(1-\rho_{12}^2)}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{11}(1-\rho_{12}^2)}\left[x_1-\mu_1-\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}(x_2-\mu_2)\right]^2} \quad , \quad -\infty < x_1 < \infty$$

elde edilir. Böylece $X_2 = x_2$ verildiğinde X_1 rasgele değişkeninin koşullu dağılımı

$$(X_1 | X_2 = x_2) \sim N(\mu_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}(x_2 - \mu_2)\ ,\ \sigma_{11}(1-\rho_{12}^2))$$

elde edilmiş olur.

Sonuç: $\underline{X}_{px1}$ rasgele vektörünün dağılımı $\underline{X} \sim N_p(\ \underline{\mu}\ ,\ \Sigma)$ ve $|\Sigma| > 0$ olsun. Burdan $\underline{X}_{px1}$ rasgele vektörünün Moment Çıkaran Fonksiyonu

$$M_{\underline{X}}(\underline{t}) = e^{\underline{t}'\underline{\mu} + \frac{1}{2}\underline{t}'\,\Sigma\,\underline{t}}$$

dir.

Sonuç: $\underline{X}_{px1}$ rasgele vektörünün dağılımı $\underline{X} \sim N_p(\ \underline{\mu}\ ,\ \Sigma)$ ve $|\Sigma| > 0$ olsun.

a) $(\underline{X} - \underline{\mu})'\ \Sigma^{-1}(\underline{X} - \underline{\mu}) \sim \chi_p^2$

b) $N_p(\ \underline{\mu}\ ,\ \Sigma)$ dağılımı $(1-\alpha)$ olasılıklı $\left\{\underline{x}{:}(\underline{x} - \underline{\mu})'\ \Sigma^{-1}(\underline{x} - \underline{\mu}) \le \chi_p^2(\alpha)\right\}$ güven elipsodini verir. Burada $\chi_p^2(\alpha)$, χ_p^2 dağılımının α ıncı üst sınırını göstermektedir.

İspat: a) χ_p^2, $N(0,1)$ dağılımına sahip $Z_1, Z_2, ..., Z_p$ bağımsız rasgele değişkenlerinin karelerinin toplamı biçiminde tanımlanır. Yani $(Z_1^2 + Z_2^2 + ... + Z_p^2) \sim \chi_p^2$ dır.

$(\lambda_i, \underline{e}_i)$, $i = 1, 2, ..., p$ Σ 'nın özdeğer ve ilişkili birim özvektörleri olmak üzere Spektral ayrışımdan

$$\Sigma^{-1} = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i} \underline{e}_i \underline{e}_i'$$

dir, burada $\Sigma \underline{e}_i = \lambda_i e_i \Rightarrow \Sigma^{-1} \underline{e}_i = \frac{1}{\lambda_i} e_i$ dir. Sonuçta

$$\begin{aligned}
(\underline{X} - \underline{\mu})' \Sigma^{-1} (\underline{X} - \underline{\mu}) &= \sum_{i=1}^{p} (\frac{1}{\lambda_i})(\underline{X} - \underline{\mu})' \underline{e}_i \underline{e}_i' (\underline{X} - \underline{\mu}) \\
&= \sum_{i=1}^{p} (\frac{1}{\lambda_i})(\underline{e}_i'(\underline{X} - \underline{\mu}))^2 \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left[(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}})(\underline{e}_i'(\underline{X} - \underline{\mu})) \right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{p} Z_i^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
E((\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}})(\underline{e}_i'(\underline{X} - \underline{\mu})) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \underline{e}_i' E(\underline{X} - \underline{\mu}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \underline{e}_i' (E(\underline{X}) - \underline{\mu}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \underline{e}_i' (\underline{\mu} - \underline{\mu}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
Var((\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}})(\underline{e}_i'(\underline{X}-\underline{\mu})) &= \frac{1}{\lambda_i} Var(\underline{e}_i'(\underline{X}-\underline{\mu}) \\
&= \frac{1}{\lambda_i} Var(\underline{e}_i'\underline{X}) \\
&= \frac{1}{\lambda_i} \underline{e}_i'\Sigma\underline{e}_i \\
&= \frac{1}{\lambda_i} \underline{e}_i'(\lambda_i\underline{e}_i) \\
&= \underline{e}_i'\underline{e}_i \\
&= 1
\end{aligned}$$

olduğundan, $(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}})(\underline{e}_i'(\underline{X}-\underline{\mu}) \sim N(0,1)$ dağılır.

$\underline{Z} = A(\underline{X}-\underline{\mu})$ olsun, burada

$$\underline{Z}_{px1} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_p \end{bmatrix} \quad , \quad A_{pxp} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\underline{e}_1' \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\underline{e}_2' \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}}\underline{e}_\mathrm{p}' \end{bmatrix} \text{dır.}$$

Ayrıca $(\underline{X}-\underline{\mu}) \sim N_p(\ \underline{0}\ ,\ \Sigma)$ dağıldığında, $\underline{Z} = A(\underline{X}-\underline{\mu}) \sim N_p(\ \underline{0}\ ,\ \mathrm{A}\Sigma A')$ dağılır. Burada

$$A_{pxp}\Sigma_{pxp}A'_{pxp} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\underline{e}'_1 \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\underline{e}'_2 \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}}\underline{e}'_p \end{bmatrix} \left[\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\underline{e}_i\underline{e}'_i\right] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\underline{e}_1 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\underline{e}_2 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}}\underline{e}_p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\underline{e}'_1 \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\underline{e}'_2 \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}}\underline{e}'_p \end{bmatrix} \left[\lambda_1\underline{e}_1\underline{e}'_1 + \lambda_2\underline{e}_2\underline{e}'_2 + \cdots + \lambda_p\underline{e}_p\underline{e}'_p\right] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\underline{e}_1 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\underline{e}_2 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}}\underline{e}_p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1}\underline{e}'_1 \\ \sqrt{\lambda_2}\underline{e}'_2 \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_p}\underline{e}'_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\underline{e}_1 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\underline{e}_2 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}}\underline{e}_p \end{bmatrix}$$

$$= I_{pxp}$$

dır. Sonuçda $\underline{Z} \sim N_p(\underline{0}, I)$ dağılır. Böylece kovaryanslar $Cov(Z_i, Z_k) = 0$, $i, k = 1, 2, ..., p$ olduğundan, $Z_1, Z_2, ..., Z_p$ 'ler ilişkisiz ve normallik varsayımı olduğundan aynı zamanda bağımsız standart normal rasgele değişkenlerdir ve $(\underline{X} - \underline{\mu})' \, \Sigma^{-1}(\underline{X} - \underline{\mu}) \sim \chi_p^2$ dağılır.

b) $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ dağıldığında, $(\underline{X} - \underline{\mu})'\Sigma^{-1}(\underline{X} - \underline{\mu}) \le c^2$ elipsodini veren olasılıklardır. **a** şıkkından $P((\underline{X} - \underline{\mu})' \, \Sigma^{-1}(\underline{X} - \underline{\mu}) \le \chi_p^2(\alpha)) = 1 - \alpha$ olduğundan, **b** şıkkı da geçerlidir.