Ankara Üniversitesi

Mühendislik Fakültesi

Jeoloji Mühendisliği Bölümü

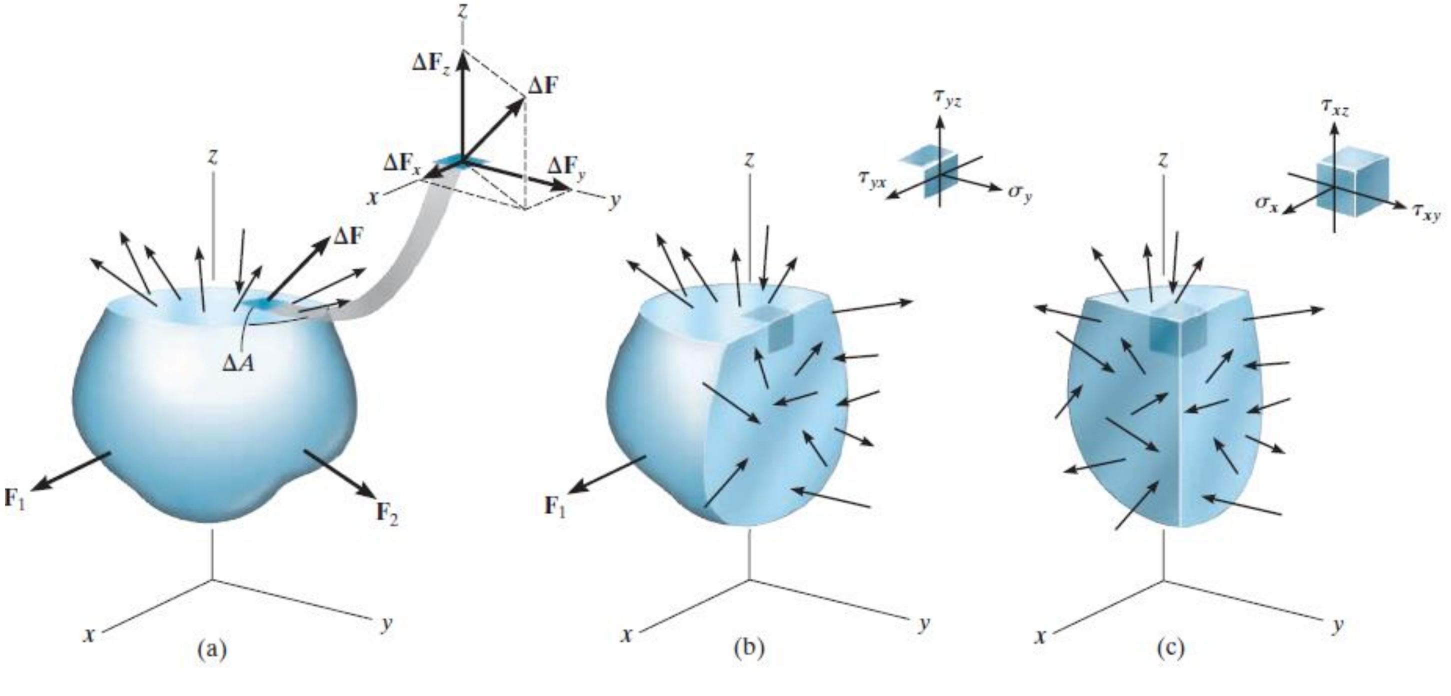
JEM234 MUKAVEMET

Ders Notları

Doç. Dr. Koray ULAMIŞ

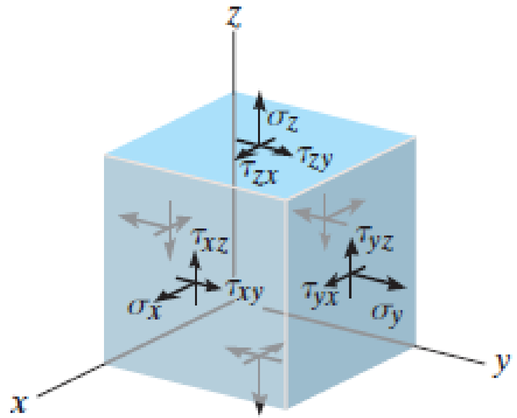
2. GERİLME KAVRAMI

Cisme etkiyen kuvvetlerin etkisini belirlemek için alınan kesit alanının daha küçük alanlara bölündüğünü “a” varsayalım (ΔA). Bu alanı da daha küçük alt alanlara ayırırsak temel iki kbaulde bulunmak gereklidir. İlki malzemenin (cismin) devamlı olduğu ki bu da hiç boşluk içermeyen ve devamlı (continuum) bir uniform parçacık dağılımı anlamına gelmektedir. İkinicis ise malzemenin “kohezyonlu” olmasıdır ki, bu da parçacıkların birarada bulunabilmesi ve herhangi bir kırık/çatlak içermemesi anlamına gelir. ΔA alanına etkiyen sonlu ΔF kuvveti (a) belirli bir yönelime sahip olmalıdır. Bu kuvvet, ΔF_x, ΔF_y ve ΔF_z bileşenlerinden oluşmakta olup, teğet/teğet ve normal olarak etki edecektir. ΔA sıfıra yaklaştıkça ΔF ve bileşenleri de sıfıra yaklaşacaktır, ancak kuvvet ve alan oranı sınırlı bir limite yaklaşır. Bu oran “Gerilme” olarak adlandırılır



Birim alana etkiyen gerilmeler (Hibbeler, 2010)

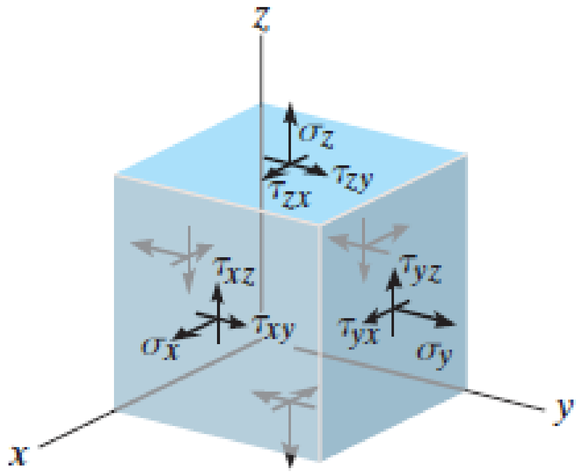
Cisimde farklı düzlemlerde kesitler alınırsa “gerilme durumu” her düzlemde üçer adet bileşen ile ifade edilir. “x-z düzlemi (b)” ve “y-z düzlemi (c)” ile kübik bir eleman oluşur.



2.1. Normal Gerilme

ΔA alanına dik etkiyen kuvvetin büyüklüğü olup, bu alanda "çekme" veya "sıkışma" etkisi gösterir. Oluşan gerilmeler de "Çekme- Tensile Stress" ve "Sıkışma - Compression" gerilmeleri adını alırlar.

$$\sigma_z = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A}$$

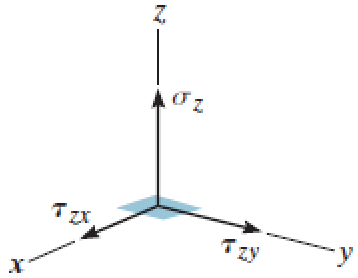


2.2. Makaslama Gerilmesi

ΔA alanına teğet etkiyen kuvvetin büyüklüğü olup, farklı düzlemlerde bileşenleri oluşur.

$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A}$$

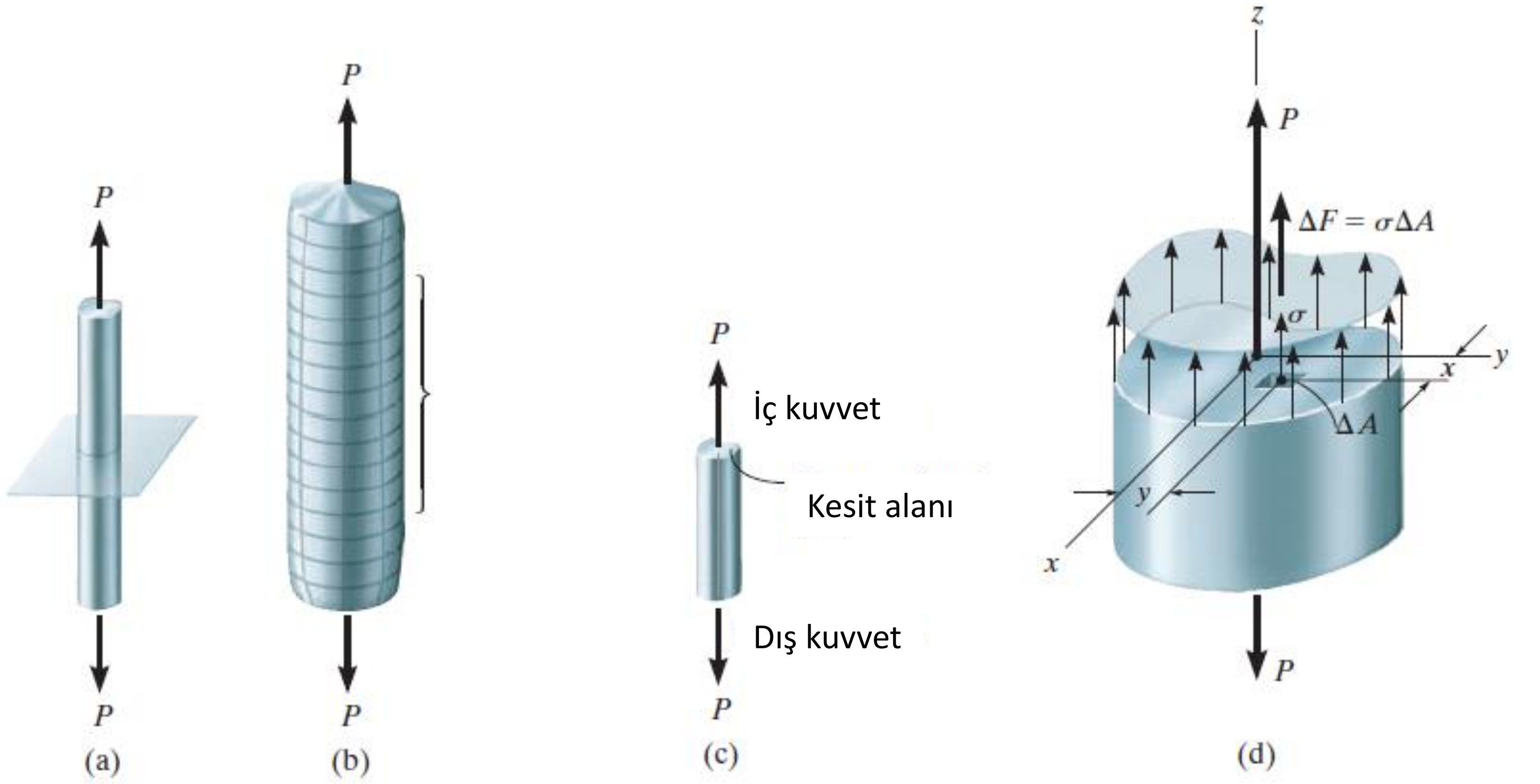
$$\tau_{zy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A}$$



Normal ve makaslama gerilmeleri (Hibbeler, 2010)

Eksenel Yüklemeye Bağlı Ortalama Gerilme Dağılımı

Prizmatik bir cisme "P" yükünün etkidiğini varsayalım (a). Cisim homojen ve izotrop ise uzunluğunun ortasından itibaren uniform olarak deforme olacaktır (b). Homojen malzeme hacminde aynı fizikomekanik özelliklere sahip, İzotrop malzeme ise tüm yönlerde aynı özelliklere sahiptir. Cisimden alınacak kesit ile oluşacak iki ayrı parçada dengenin sağlanması için kesitteki yükün"P" kadar olması gerekir (c). Cismin uniform olarak deforma olmasından yola çıkılarak, kesitin sabit normal gerilme dağılımına maruz klaması gerekir (d)



Eksenel yükleme koşulu (Beer, vd. 2011)

Cisimde kesit alanı boyunca yer alan her ΔA alanında etkiyen ΔF=σΔA olacaktır. Her alt birim alana etkiyen kyvvetlerin kesit alanındaki toplamı bileşke olarak "P" kuvvetini sağlayacaktır. ΔA nın dA ve ΔF in dF olması ile σ nın sabit olması durumunda;

$$+\uparrow F_{Rz} = \Sigma F_z; \qquad \int dF = \int_A \sigma\, dA$$

$$P = \sigma A$$

$$\boxed{\sigma = \frac{P}{A}}$$

σ: Kesitin herhangi bir noktasındaki ortalama normal gerilme

P: Dahili bileşke normal kuvvet (kesit alanının merkezinde)

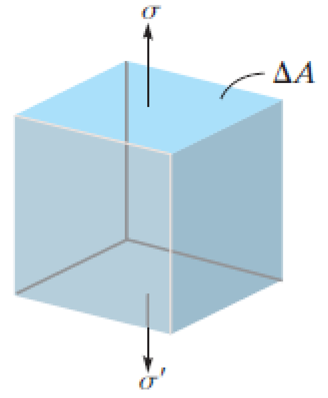
A: Kesit alanı

Dahili "P" kuvveti kesit alanının merkezinde etki eder ve bu noktada oluşan normal gerilme "x" ve "y" eksenleri etrafında sıfır moment oluşturur.

$$(M_R)_x = \Sigma M_x; \quad 0 = \int_A y\, dF = \int_A y\sigma\, dA = \sigma \int_A y\, dA$$

$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \quad 0 = -\int_A x\, dF = -\int_A x\sigma\, dA = -\sigma \int_A x\, dA$$

Eksenel yüklenen cisimde en küçük hacimde her noktada normal gerilme etki edecektir. Kübik elemanda düşey eksende denge koşulu;

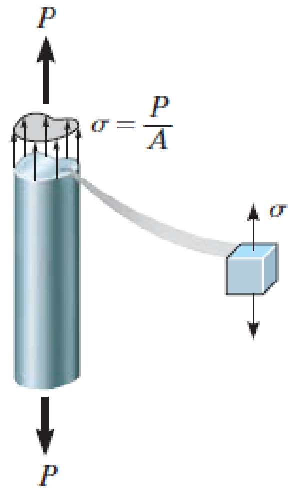


$$\Sigma F_z = 0; \qquad \sigma(\Delta A) - \sigma'(\Delta A) = 0$$

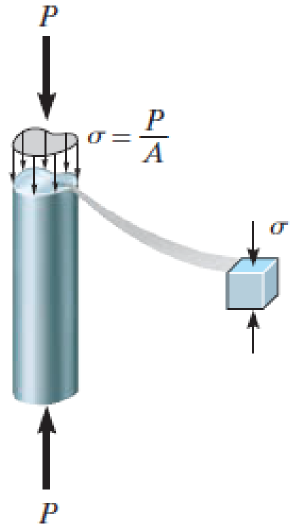
$$\sigma = \sigma'$$

Tek Eksenli Gerilme

Bileşenleri aynı büyüklükte ve zıt yönde gelişen gerilme türüdür. Yükleme koşuluna göre ”çekme” veya “sıkışma-basma” şeklinde gelişir.



Çekme



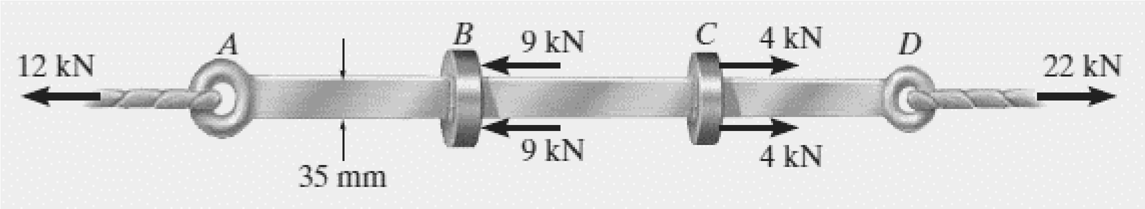
Sıkışma

Tek eksenli gerilme (Beer, vd. 2011)

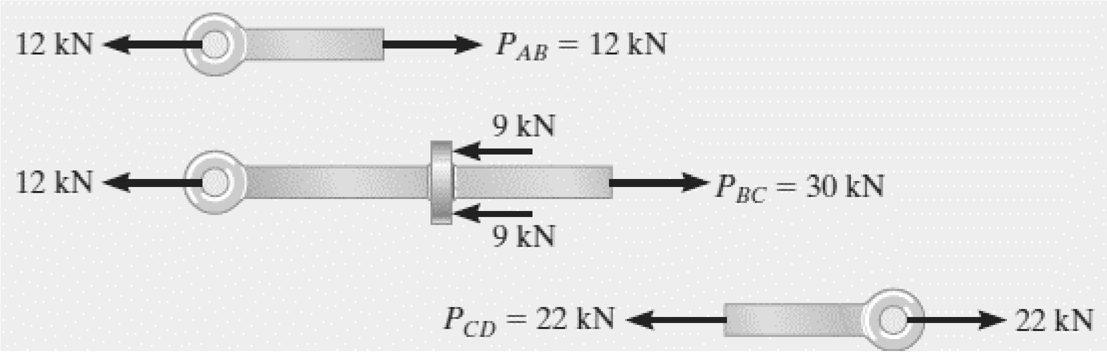
Maximum Ortalama Normal Gerilme

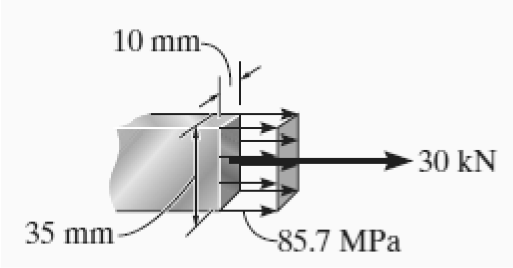
Cisme etkiyen ve sabit olan “P” kuvveti dışında harici yükleme koşulu olabilir veya kesit alanında değişiklik olabilir. Bu durumda *P/A* nın maximum olduğu lokasyon önem kazanır. Bu durumda farkli kesitlerdeki dahili P kuvvetinin belirlenmesi gerekir. Bu tür problemlerde cismin uzunluğu veya tercih edilen kesitler boyunca P nin değişiminin grafik olarak gösterilmesi uygun olacaktır.

Soru 1. Şekildeki çubuk 35 mm genişliğinde ve 10 mm kalınlığındadır. Yükleme koşuluna göre oluşacak ortalama normal gerilmeyi hesaplayınız.



Çözüm: *AB, BC ve CD arasında farklı büyüklükte sabit kuvvetler etkindir. Kuvvetlerin yönelimleri dikkate alındığında;*

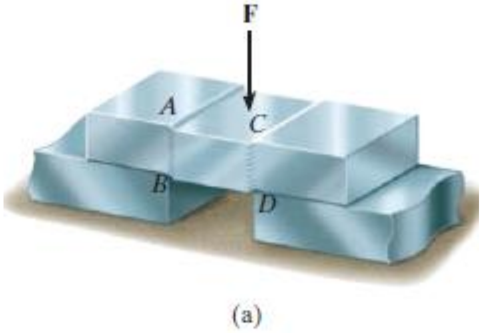


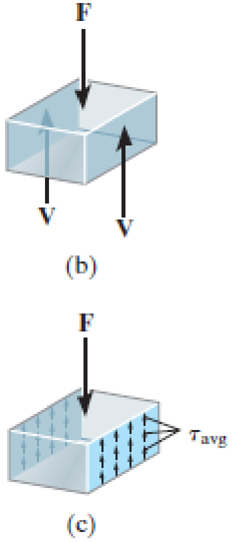


$$\sigma_{BC} = \frac{P_{BC}}{A} = \frac{30(10^3)\ \text{N}}{(0.035\ \text{m})(0.010\ \text{m})} = 85.7\ \text{MPa}$$

2.2. Makaslama Gerilmesi

Şekilde üst üste konulan çubuklara “F” kuvvetinin etkidiğini varsayalım (a). Malzemeler rijid ise AB ve CD düzlemleri boyunca ortadaki blok deforma olacak ve F büyüklüğüne göre yenilme gelişecektir. Denge sağlanması ve defrormasyon olmaması için her iki ara düzlemde makaslama kuvvetleri oluşmalıdır (b, c). İlgili alanlardaki makaslama gerilmesi;





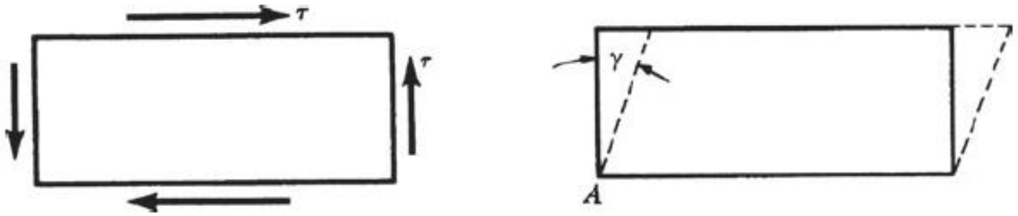
Makaslama gerilmesi (Beer, vd. 2011)

$$\boxed{\tau_{avg} = \frac{V}{A}}$$

τ_{avg}: Ara kesitteki ortalama makaslama gerilmesi

V: Denge denkleminden elde edilen içsel bileşke makaslama kuvveti

A: Kesit alanı



Şekil c’ye dikkat edilirse makaslama ile “V” aynı yönde etki eder. Tek yönde gelişen makaslamaya eşlik edecek ve bu kuvvete bağlı gelişecek kuvvet oluşmalıdır. Uygulanan “F” kuvveti etkisiyle “Basit” ve/veya direkt” makaslama gelişir. Normal yükleme koşulu bulunmayan (düzleme dik kuvvet yok) problemlerde makaslama çiftine maruz malzemede birim uzunluklarda değişim olmaz, ancak cismin ilk konumuna göre açısal değişim gerçekleşir. Bu değişim makaslama yamulması olup, açısı radian ile ifade edilir. Makaslama gerilmesinin makaslama yamulmasına oranı ise “Makaslama – Rijidlik Modülü” olarak ifade edilir.

$$G = \frac{\tau}{\gamma}$$

τ: Makaslama gerilmesi
G: Makaslama modülü
g: Makaslama yamulması

Makaslama Gerilmesi Denge Koşulu

Şekilde kesit yüzeyinde birim hacim elemanına τ_{zy} etki etsin (a). Kuvvet ve moment dengesine göre diğer düzlemlerde de makaslama gerilmesi gelişmelidir (b). “y” yönünde kuvvet dengesi için;

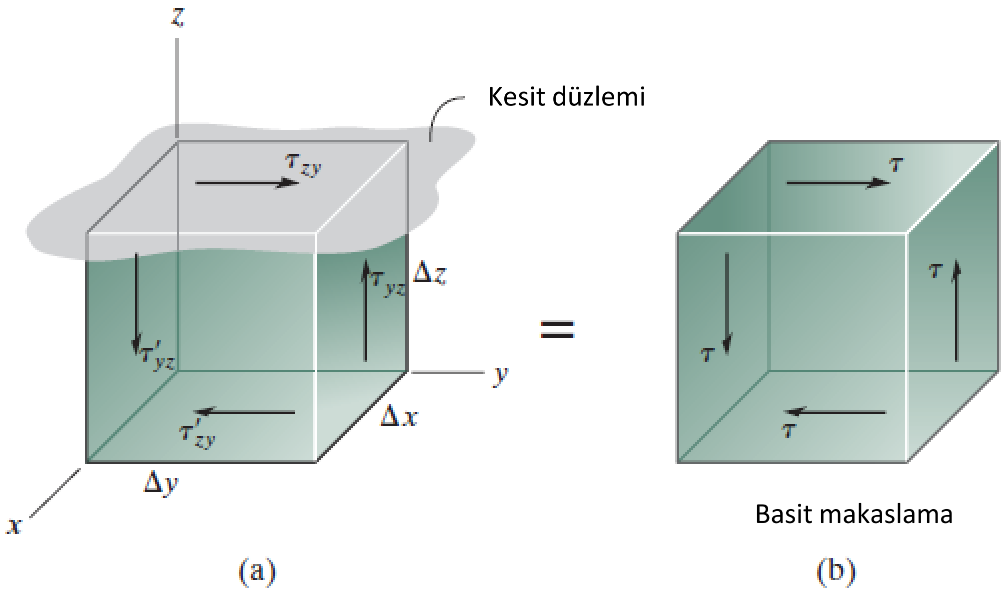
$$\Sigma F_y = 0; \qquad \overbrace{\overbrace{\tau_{zy}}^{\text{gerilme}}\overbrace{(\Delta x\,\Delta y)}^{\text{alan}}}^{\text{kuvvet}} - \tau'_{zy}\,\Delta x\,\Delta y = 0$$

$$\tau_{zy} = \tau'_{zy}$$

“z” yönündeki denge koşulu için $\tau_{yz}=\tau'_{yz}$ olmalıdır. “x” ekseni etrafındaki moment;

$$\Sigma M_x = 0; \qquad -\overbrace{\overbrace{\overbrace{\tau_{zy}}^{\text{gerilme}}\overbrace{(\Delta x\,\Delta y)}^{\text{alan}}}^{\text{kuvvet}}\;\overbrace{\Delta z}^{\text{kuvvet kolu}}}^{\text{moment}} + \tau_{yz}(\Delta x\,\Delta z)\,\Delta y = 0$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}$$



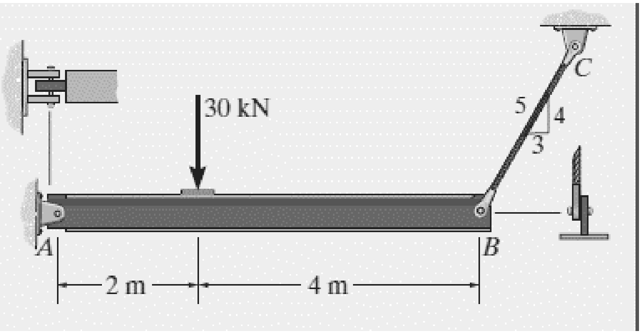
Makaslama gerilmesi (Beer, vd. 2011)

Bütünleyici (Tamamlayıcı) Makaslama

Cismin bir düzlemine makaslama kuvveti etki ederse birbirine karşılıklı ve zıt yönde eşit büyüklükte olacak şekilde makaslama bileşenleri olmalıdır.

$$\tau_{zy} = \tau'_{zy} = \tau_{yz} = \tau'_{yz} = \tau$$

Soru 2. A(20 mm çaplı) ve B (30 mm çaplı) noktalarındaki perçinlerde gelişen ortalama makaslama gerilmesini hesaplayınız.



Çözüm: A noktasına göre moment alırsak (CCW+);

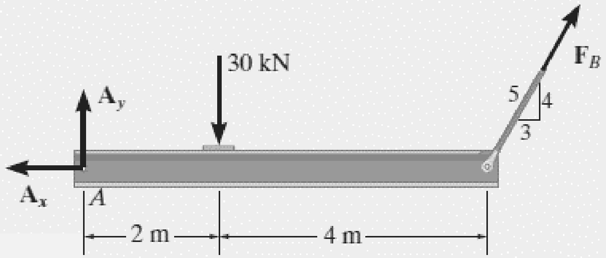
$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \quad F_B\left(\frac{4}{5}\right)(6\text{ m}) - 30\text{ kN}(2\text{ m}) = 0 \quad F_B = 12.5\text{ kN}$$

(a)

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad (12.5\text{ kN})\left(\frac{3}{5}\right) - A_x = 0 \quad A_x = 7.50\text{ kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y + (12.5\text{ kN})\left(\frac{4}{5}\right) - 30\text{ kN} = 0$$

$$A_y = 20\text{ kN}$$

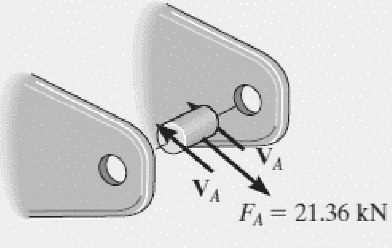


(b)

A noktasına etkiyen bileşke kuvvet;

$$F_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(7.50\text{ kN})^2 + (20\text{ kN})^2} = 21.36\text{ kN}$$

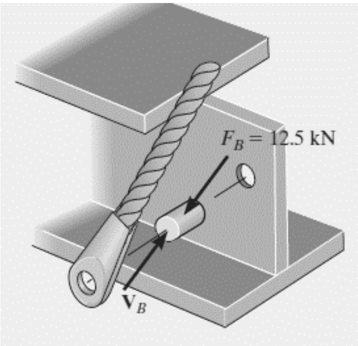
A noktasındaki perçin iki parça ile tutturulmuş olduğundan,
her iki segment ile kiriş arasında
çift makaslama gelişir.



(c)

$$V_A = \frac{F_A}{2} = \frac{21.36\text{ kN}}{2} = 10.68\text{ kN}$$

B noktasında perçin tek parça ile kirişe bağlıdır.



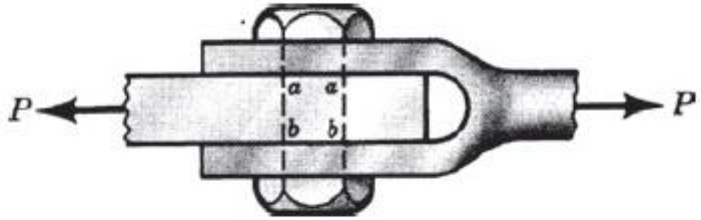
$$V_B = F_B = 12.5\text{ kN}$$

Ortalama makaslama

$$(\tau_A)_{avg} = \frac{V_A}{A_A} = \frac{10.68(10^3)\text{ N}}{\frac{\pi}{4}(0.02\text{ m})^2} = 34.0\text{ MPa}$$

$$(\tau_B)_{avg} = \frac{V_B}{A_B} = \frac{12.5(10^3)\text{ N}}{\frac{\pi}{4}(0.03\text{ m})^2} = 17.7\text{ MPa}$$

Soru 3. Şekildeki metal malzemeye 30 kN luk çekme uygulanmaktadır. A-a veya b-b kesitinde gelişecek ortalama makaslama gerilmesini hesaplayınız. Civatanın çapı 10 mm' dir.



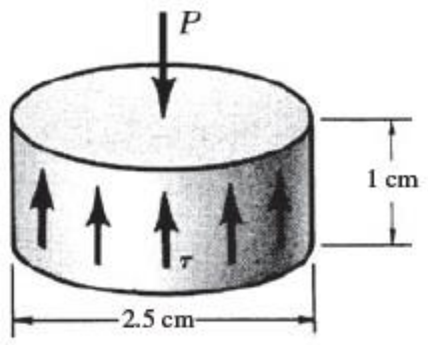
P kuvvetinin kesitlere eşit dağıldığını varsayarsak, her kesite 30/2=15 kN kuvvet uygulanır.
Kesit alanları eşit olup;

$A=(1/4\pi(10)^2) = 78.6\ mm^2$

Her düzleme etkiyen ortalama makaslama gerilmesi;
$\tau=(1/2)(P/A)=191$ MPa

Soru 4. Şekildeki yapısal malzemenin nihai makaslama dayanımı 300 MPa olup, şekilde verilen boyutlarda bir oluk açmak için gerekli P kuvvetini hesaplayınız. Makaslama modülü 82 Gpa ve makaslama gerilmesinin 143 Mpa olması durumunda oluğun kenarındaki makaslama yamulmasını hesaplayınız.

$$P = \tau A = 0.025\pi \times 0.01 \times 300 \times 10^6 = 236\,000 \text{ N}$$



$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{143 \times 10^6}{82 \times 109} = 0.00174 \text{ radians}$$

2.3. Güvenlik Sayısı / Emniyet Katsayısı

Yapısal veya mekanik elemanların dizaynında gerilmeyi belirli seviyelerde sınırlamak güvenlik anlamında gereklidir. Malzemenin maximum dayanımından daha düşük bir izin verilebilir gerilme seviyesi seçilmelidir. Malzeme, bekleneden farklı bir gerilmeye maruz kalırsa, titreşim, çarpma, vb. nedenlerle istenmeyen problemlerle karşılaşılabilmektedir. Özellikle anizotrop malzemelerde mekanik özelliklerin farklı yönlerde değişken olması dizaynda dikkatli olunmasını gerektirir. Güvenlik sayıss (GS, FS, FOS) yenilmeye neden olan yükün izin verilebilir yüke oranı olarak ifade edilir. Yükleme koşulu gerilme ile lineer ilişkili ise normal ve makaslama gerilmeleri cinsinden de aynı ifade kullanılabilmektedir.

$$FS = FOS = GS = EK = \frac{F_{yenilme}}{F_{izinverilebilir}} = \frac{\sigma_{yenilme}}{\sigma_{izinverilebilir}} = \frac{\tau_{yenilme}}{\tau_{izinverilebilir}}$$