



Ankara Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Jeoloji Mühendisliği Bölümü



JEM234 MUKAVEMET

Ders Notları

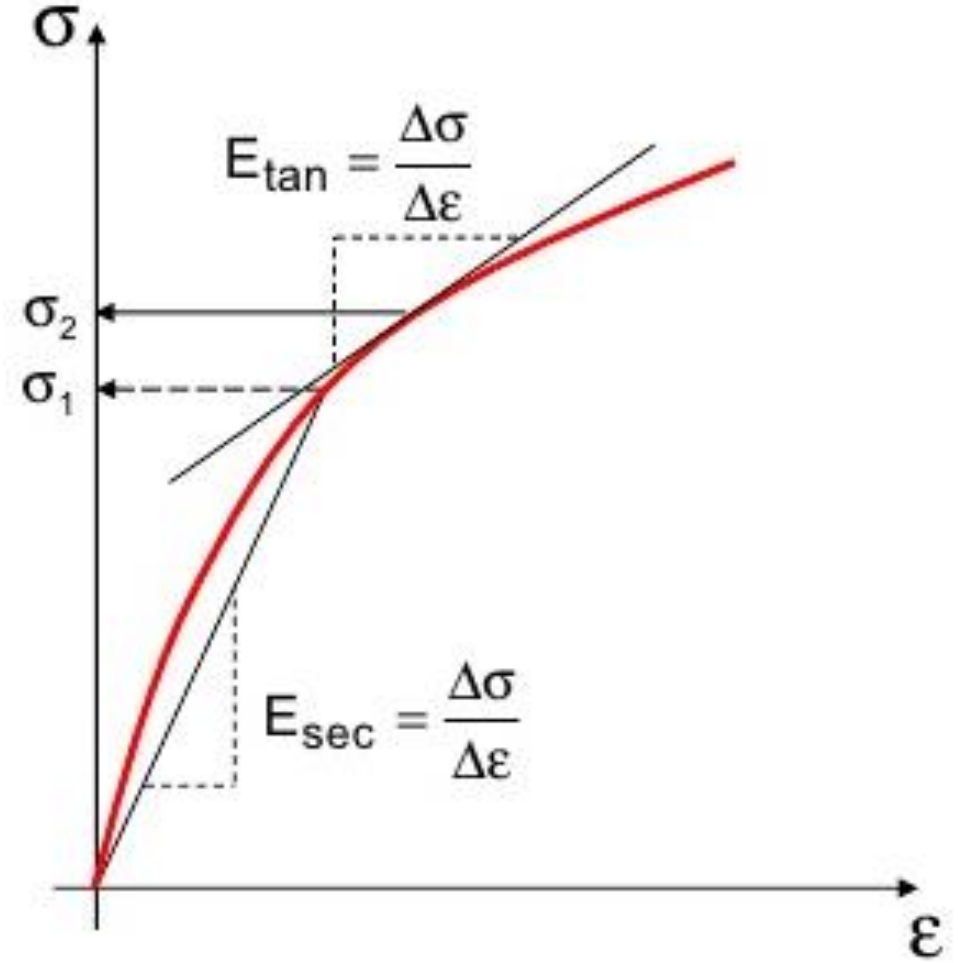
Doç. Dr. Koray ULAMIŞ

4.4. Elastisite (Young) Modülü

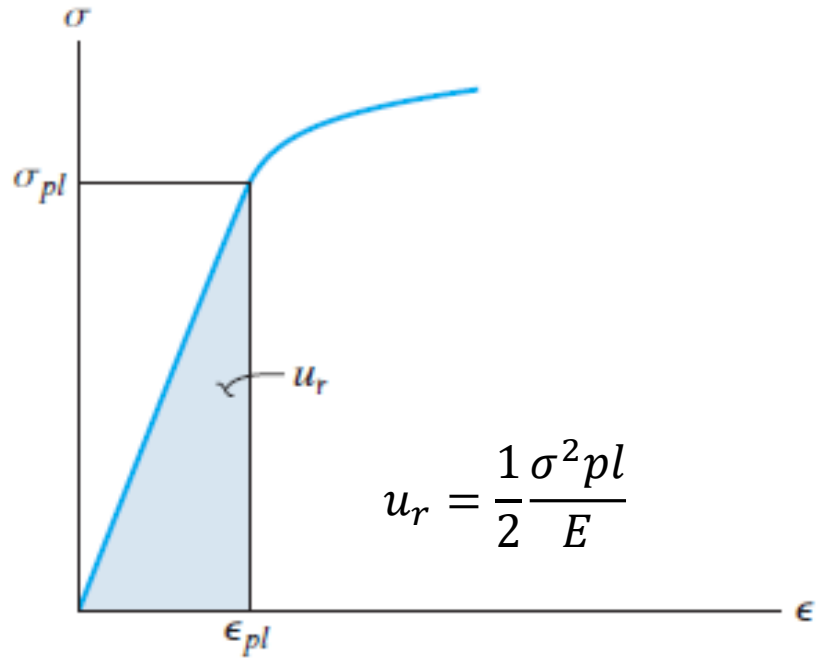
Gerilme-yamulma ilişkisinde eğrinin orantılılık sınırına kadar olan eğimi “Elastik Modül” dür. Bu aralıkta cisimde elastik deformasyon geçerlidir. Ancak bazı malzemelerde lineer elastik kesim bulunmamaktadır. Lineer olmayan (non-lineer) davranış için farklı modüller tanımlanmıştır.

Sekant Modülü (E_{sec}): Orijin ile eğri üzerindeki orantılılık sınırını geçen bir noktayı birleştiren doğrunun eğimi.

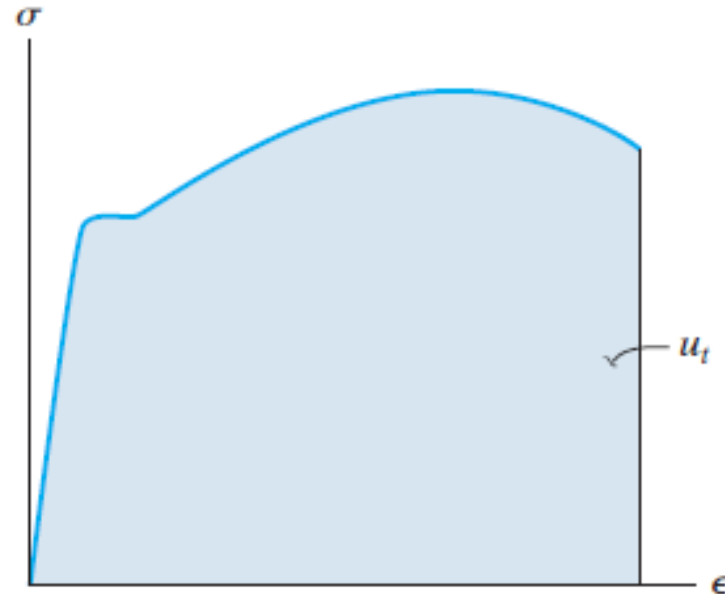
Tanjant Modülü (E_t): Eğrinin değişen eğimlere sahip olması durumunda eğriye çizilen teğetin eğimidir. Pratik uygulamalarda en büyük gerilmenin yarısına karşılık gelen nokaya çizilen teğetten elde edilir.



4.5. Esneklik Modülü (u_r): Yamulma enerjisi ve yamulma enerjisi yoğunluğunun ölçüsü olup, malzemenin elastik sınırı sonundaki orantılılık noktasına karşılık gelen modüldür. Lineer elastik bölgenin alanı olup, fiziksel olarak herhangi bir deformasyona uğramadan enerjiyi absorbe edebilme kabiliyetidir. Sıkça asphalt ve hafif kaldırım kaplamaları için kullanılır.



4.6. Sertlik Modülü (u_t): Gerilme-yamulma grafiği altındaki tüm alanı ifade eder. Dolayısıyla yenilme gerçekleşmeden önce yamulma enerjisinin de ölçüsüdür. amulma enerjisi ve yamulma enerjisi yoğunluğunun ölçüsü olup, malzemenin elastik sınırı sonundaki orantılılık noktasına karşılık gelen modüldür. Lineer elastik bölgenin alanı olup, fiziksel olarak herhangi bir deformasyona uğramadan enerjiyi absorbe edebilme kabiliyetidir. Sıkça asphalt ve hafif kaldırım kaplamaları için kullanılır.



4.7. Makaslama (Rijidlik) Modülü (G): Gerilme uygulanan düzlemde makaslama kuvvetinin mühendislik yamulmasına oranıdır. Makaslama modülü genel uygulamalar ve ikinci termodinamik kanununa göre tüm malzemeler için pozitiftir.

$$\gamma_{xy} = \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx} = 2\varepsilon_{xy} \quad G = \frac{\sigma_{xy}}{\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx}} = \frac{\sigma_{xy}}{2\varepsilon_{xy}} = \frac{\sigma_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

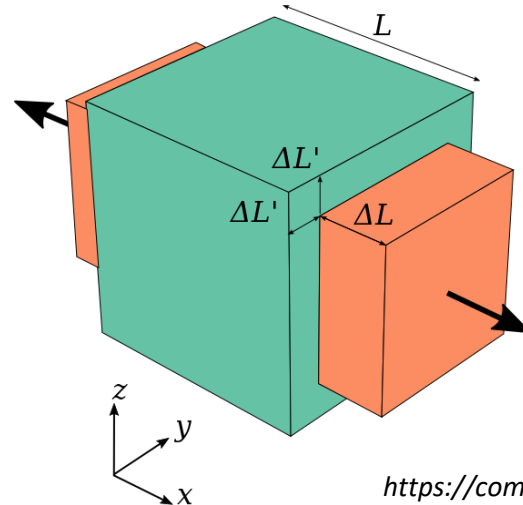
4.8. Bulk (Sıkışmazlık) Modülü (K): İzotrop malzeme hidrostatik yüklemeye maruz kalırsa makaslama gerilmesi sıfır olur ve normal gerilme uniform dağılır ($\sigma = \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$). Hidrostatik yük altında örnekte hacim değişikliği olur. Gerilmenin hacim değişikliğine oranı Bulk modülü olarak tanımlanır. Hacim değişikliği de yönlerdeki yamulmaya bağlı olduğundan eşitlik hacim ve yamulma cinsinden ifade edilebilir.

$$K = \frac{\sigma}{\Delta V/V} = \frac{\sigma}{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}} = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

POISSON Oranı

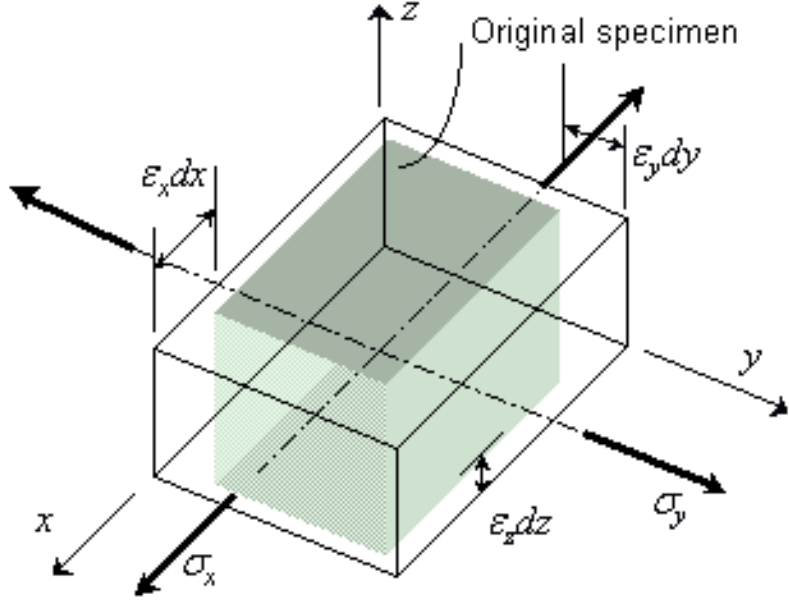
Bu oran "Poisson etkisi" nin ölçüsü olup; sıkışma altında malzeme genişleme (sıkışma doğrultusuna dik) ve çekme altında sıkışmaya (çekme doğrultusuna dik) eğilimi gösterir. Poisson oranı izafi sıkışmanın izafi genişlemeye oranıdır. Diğer deyişle tanal yamulmanın düşey yamulmaya oranıdır. Bir çok malzeme için 0.0-0.5 arasında değişir.

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{yatay}}{\varepsilon_{düşey}} = \frac{\text{Yük yönünde yamulma}}{\text{Yüke dik yönde yamulma}}$$



HOOKE Yasası

Malzemelerin elastik limtleri içinde yamulma ile gerilme orantılıdır. Bu lineer eşitlik; $0 \leq \sigma \leq \sigma_{akma}$ durumunda geçerlidir.



$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

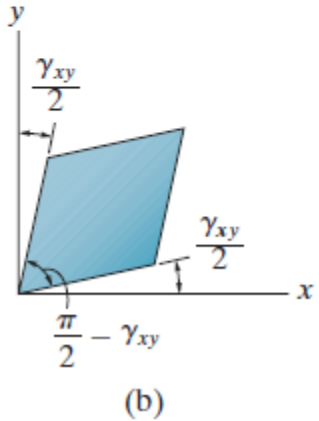
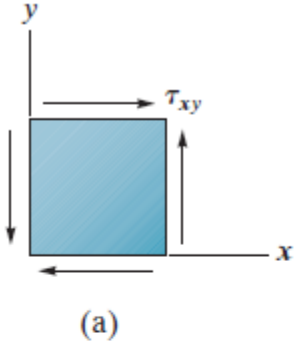
E : Young (Elastisite) modülü, ν : Poisson oranı

Hooke yasasına göre yamulma gerilme olmadan da gelişebilir. Örneğin birim eleman “y” yönünde bir gerilmeye maruz ise “x” yönünde de yamulma gelişebilir. “y” yönünde çekme gerilmesi uygulandığını varsayalım. Aynı şekilde etki-tepkiden dolayı “x” yönünde de dengelyi sağlamak için yamulma gelişir.

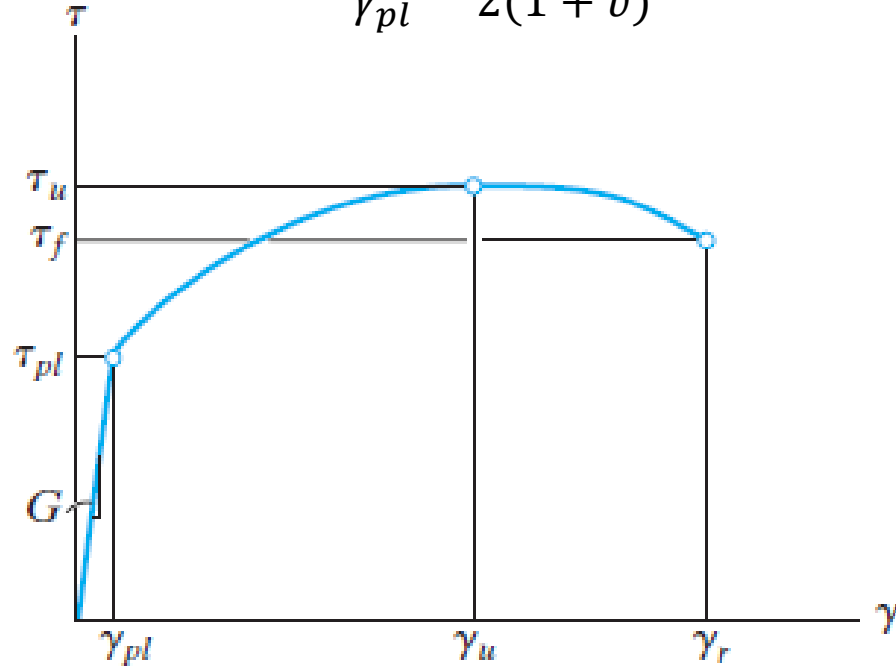
$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

Makaslama Gerilmesi - Makaslama Yamulması Diyagramı

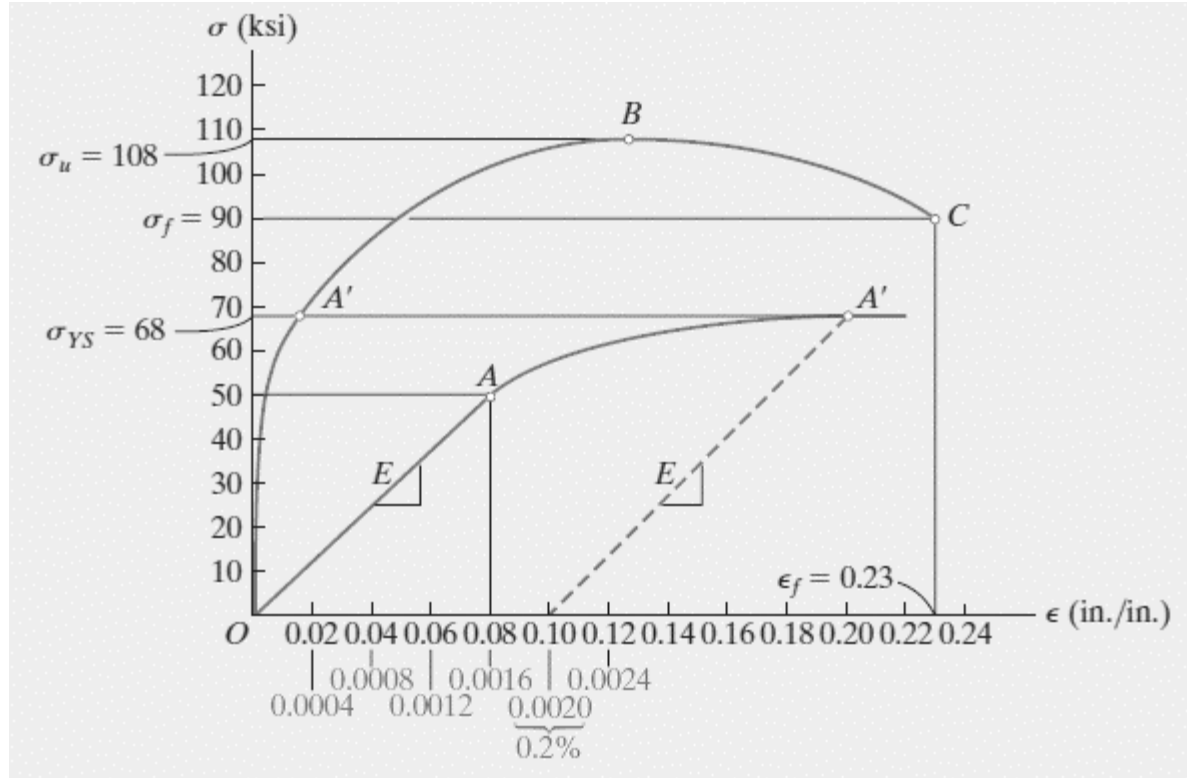
Cisim saf makaslama maruz kalırsa dengenin korunması için cismin her yüzünde makaslama gerilmeleri gelişir (a). Cisim homojen ve izotrop ise cisimde uniform yamulma gelişir (b). “ γ_{xy} ” makaslama yamulması x ve y eksenini boyunca açılma yamulmayı ifade eder. Bu etki deneysel olarak malzemelerde makaslama deneyleri ile gerçekleştirilebilir. Çekme ve basınç deneylerine benzer şekilde makaslama deneylerinde ilk olarak lineer elastik bölge ve üst limiti olan orantılılık limiti izlenir (τ_{pl}). Nihai (maksimum) gerilmeye ulaşılan kadar (τ_u) yamulma sıkılaştırması ve en son kırılma makaslama noktasına ulaşılır (τ_f). Elastik bölgedeki doğrusal grafiğin eğimi de makaslama modülünü ifade edecektir.



$$G = \frac{\tau_{pl}}{\gamma_{pl}} = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$



Soru 6. Çamurtaşında yapılan çekme testinde şekildeki gerilme-yamulma ilişkisi elde edilmiş olup, elastisite modülü ve akma gerilmesini %0.2 yamulma ötelemesine göre belirleyiniz.

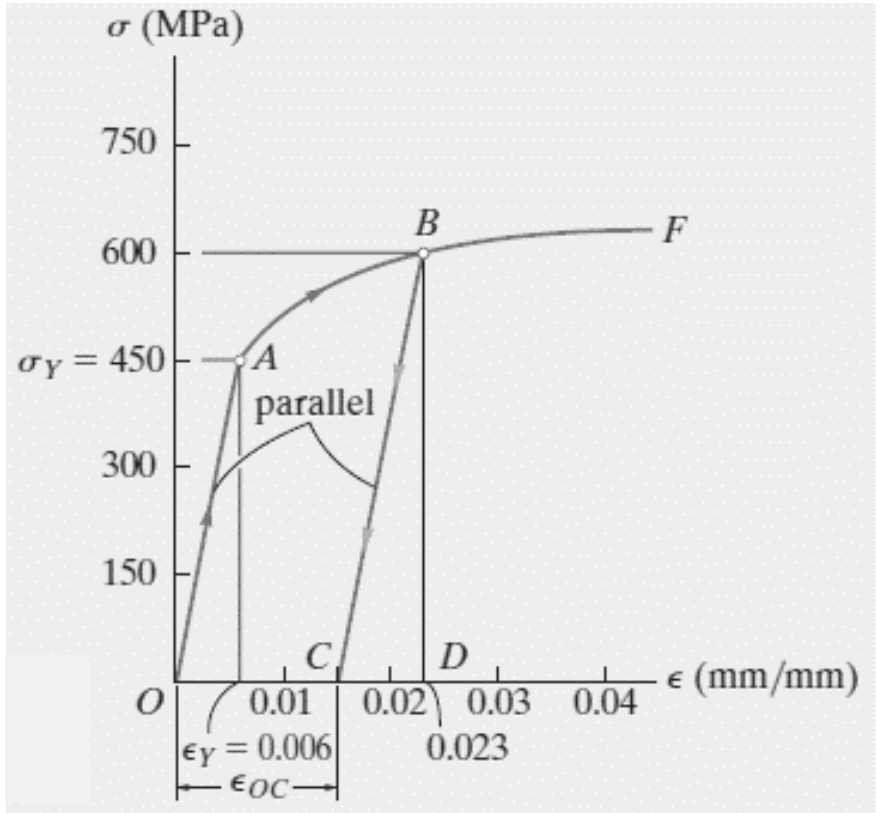


$E = 50 / 0.0015 = 31.2 \times 10^3$ ksi (Grafiğin doğrusal kısmının eğimi)

Akma gerilmesi; %0.2 yamulma noktasından Oa ya çizilen paralelin eğriyi kestiği nokta (A') = $\sigma_{YS} = 68$ ksi

Nihai dayanım: Eğrinin pik noktası = 108 ksi = σ_u (B noktası) ve kırılma gerilmesi = 90 ksi = σ_f (C noktası)

Soru 7. Şekilde çelik malzemede yapılan çekme testi gerilme-yamulma grafiği verilmiştir. Örnek 600 MPa gerilmeye maruz bırakılıp kaldırıldıktan sonra oluşacak kalıcı yamulmayı belirleyiniz.



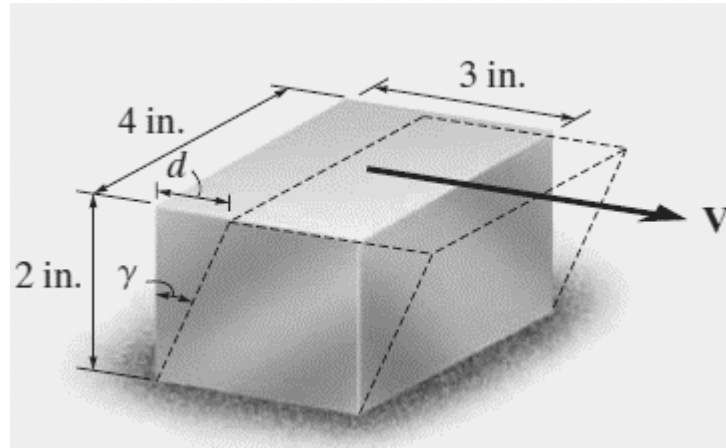
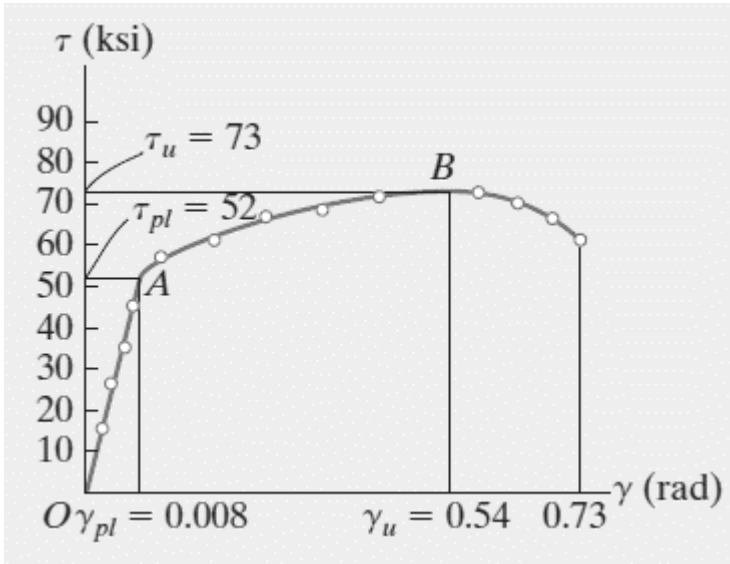
Örnek yük altında iken B noktasına kadar yamulma sıkılaşmasına maruz kalır. "B" noktasındaki yamulma 0.023 m/m dir. Bu aşamada yük kaldırıldığında grafiğin doğrusal kesimine (OA) paralel şekilde (BC) yük boşalması yolu izlenir. Sonuçta da cisimde kalıcı yamulma (çekmede boy uzaması, sıkışmada boy kısılması) gelişir.

Elastisite modülü; $E=450/0.006=75000 \text{ Mpa}=75 \text{ Gpa}$

CBD üçgenine dikkat edilecek olursa; $E=BD/CD$; $CD=0.008 \text{ mm/mm}$ olacaktır (Elastisite modülü ilişkisinden).

Toplam yamulma D noktasında 0.023 mm/mm olduğundan, $\epsilon_{OC}=0.023-0.008=0.015 \text{ mm/mm}$ kadar kalıcı yamulma oluşacaktır.

Soru 8. Şekilde kaya örneğinde yapılan makaslama testi grafiği verilmiştir. Makaslama modülü (G), orantılılık sınırı ve nihai makaslama gerilmesini belirleyiniz. Ayrıca kesme kuvveti altında örnekte oluşacak “d” uzunluğunu ve buna yol açacak olan kesme kuvvetini belirleyiniz.



Makaslama modülü (G); AO doğrusunun eğimi kadar olup;

$$G=52/0.008=6500 \text{ ksi}$$

Not: Hooke yasasına göre OA doğru denklemi de $\tau=G\gamma=6500\gamma$ kadardır.

Orantılılık sınırı: “A” noktasındaki gerilme olup, $\tau_{pl}=52 \text{ ksi}$

Nihai gerilme: “B” noktasındaki gerilme olup, $\tau_u=73 \text{ ksi}$

Cisimdeki makaslama yamulması 0.008 radian olduğundan; $\tan(0.008 \text{ rad})=d/2$,
 $d=0.016 \text{ inch}$ olur.

Buna neden olan makaslama kuvveti ise; $\tau_{avg}=V/A$, $52=V/3 \times 4$, $V=624 \text{ kip}$