Ankara Üniversitesi

Mühendislik Fakültesi

Jeoloji Mühendisliği Bölümü

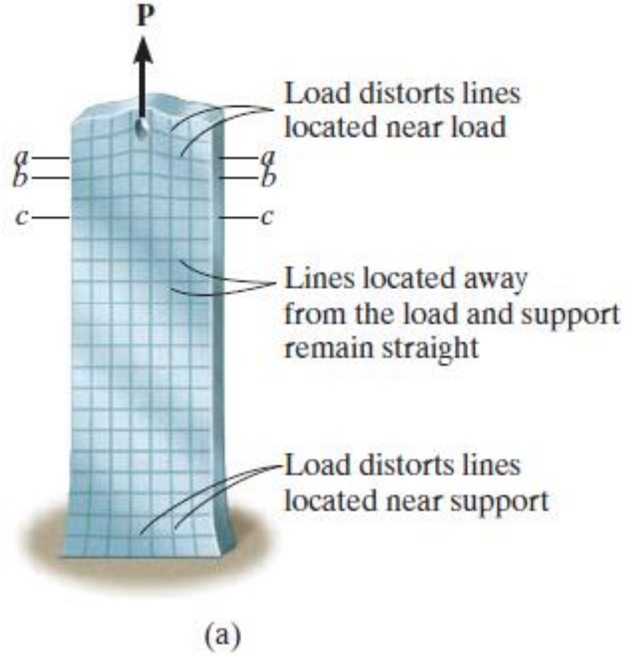
JEM234 MUKAVEMET

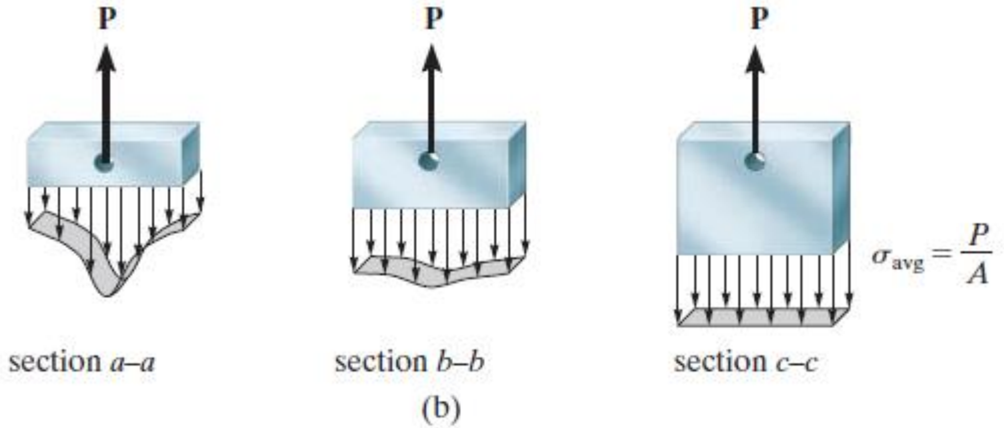
Ders Notları

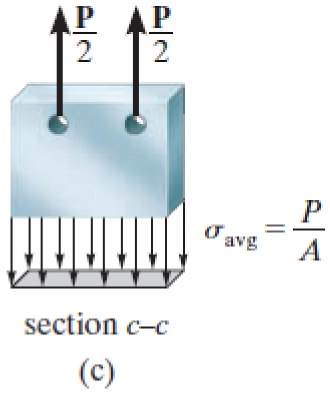
Doç. Dr. Koray ULAMIŞ

Saint-Venant İlkesi

Alttan sabitlemiş olan dikdörtgen bir malzemenin “P” kadar çekme kuvvetine maruz kaldığını varsayalım. Kuvvet merkezden uygulandığında malzeme elastik olarak deforme olmaya başlar (a). Yükün uygulandığı noktadan itibaren ilgili alan boyunca yük ortadan kenarlara doğru farklı büyüklükte dağılacaktır. Malzeme elastik sınırlara kadar yüklenirse uygulama noktasından uzaklaştıkça daha uniform dağılmaya başlayacaktır (b). Gerilme kesit alanı ile ilişkili olduğundan, yamulmanın en az veya sıfır olduğu mesafe en az kesit alanının maksimum boyutu kadar olmalıdır. Barre de Saint-Venant ilkesi (1885); bir sınıra uygulanan yükten makul bir uzaklıkta bulunan gerilimlerin, bu yükün statik eşdeğer bir yüke dönüşmesi halinde önemli oranda değişim göstermeyeceğini savunur. Gerilme ve yamulma dağılımı yalnızca yükün uygulandığı noktanın yakınındaki bölgelerde değişim gösterir. Örneğin c-c’ kesitine simetrik P/2 yükleri etki ederse, kesit boyunca gerilme dağılımı uniform olur ve ortalama gerilmeP/A kadar olur.





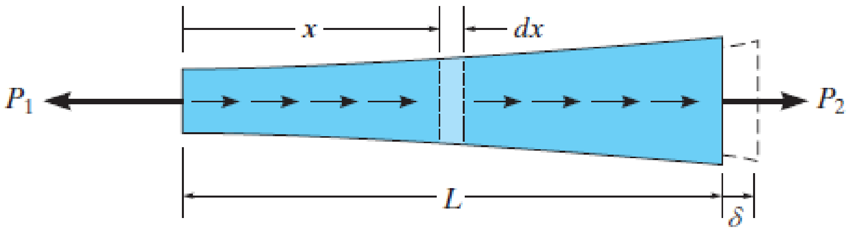


Saint-Venant İlkesi (Hibbeler, 2010)

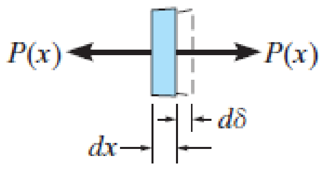
Eksenel Yüklemede Elastik Deformasyon

Hooke yasasına dayanarakeksenel yük altında melzemelerdeki elastik yerdeğiştirmeler hesaplanabilir. Şekil “a” da kesit alanı “L” uzunluğu boyunca değişken bir çubuk eleman verilmiştir. Eleman her iki ucundan noktasal çekmeye maruz bırakılmış olsun. Cisimde meydana gelecek yer değiştirme miktarı da “δ” kadar olsun. Ani kesit değişiklikleri ve local deformasyonları gözardı ederek inceleyelim. Saint-Venant ilkesi gereği bu etkiler local etkiler gösterecektir, onun dışında çubuğun büyük kısmı uniform deforme olacaktır. Çubuğu kesitlere ayırdığımızda “dx” uzunluğu olan kesimi incelersek, P(x) etkisi ile kesikli gösterilen deformasyon gelişecektir (b).

$$\sigma = \frac{P(x)}{A(x)} \qquad \varepsilon = \frac{d\delta}{dx}$$



(a)



(b)

Orantılılık sınırına kadar olan yükleme koşulu için Hooke yasası gereği;

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\frac{P(x)}{A(x)} = E\left(\frac{d\delta}{dx}\right) \qquad d\delta = \frac{P(x)dx}{A(x)E}$$

Cismin tamamındaki toplam yerdeğiştirmeyi hesaplamak için integrasyon yapılırsa;

δ: iki nokta arasındaki yer değiştirme
L: cismin uzunluğu
P(x): x mesafede iç kuvvet
A(x): x fonksiyonu olan kesit alanı
E: Elastisite modülü

$$\delta = \int_0^L \frac{P(x)dx}{A(x)E}$$

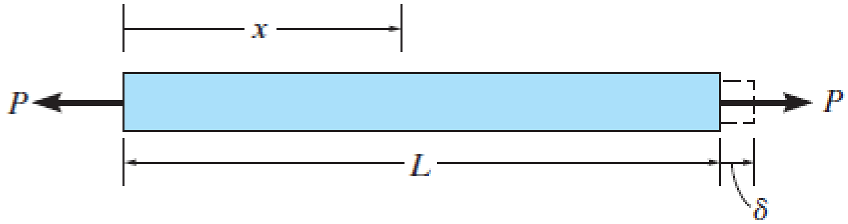
Malzemenin kesit alanı ve ugyulanan yük de sabit ise hem elastisite modülü, hem de içsel reaksiyon kuvveti sabit kalacaktır. Ayrıca malzemeler birarada tutularak farklı yüklere maruz bırakılırsa toplam malzemeyi oluşturan segmentler ayrı incelenmelidir.

$$\delta = \frac{PL}{AE}$$

Tek cisim

$$\delta = \sum \frac{PL}{AE}$$

Çoklu cisim

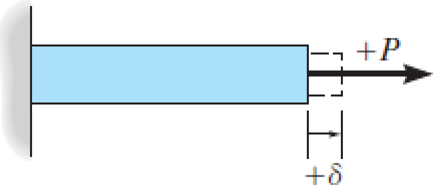


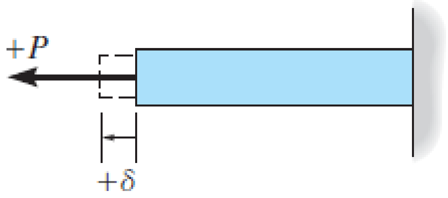
İşaret Notasyonu

Yerdeğiştirme(ler)in hesaplanabilmesi için bir işaret notasyonu uygulanmalıdır.

Çekme kuvveti ve uzama "+"

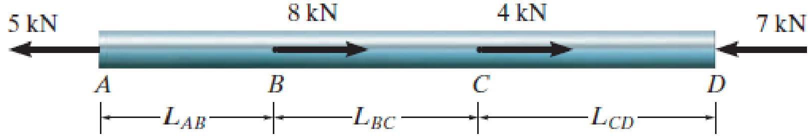
Sıkışma ve kısalma "-"



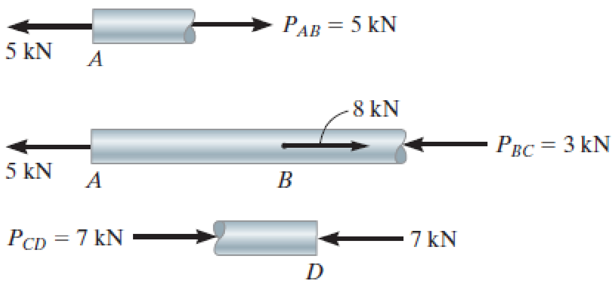


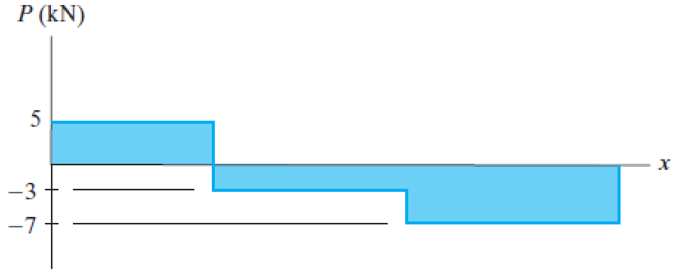
<u>Örnek</u>: Segmentlere ayrılarak uygulanan yüklere göre yer değiştirmeleri hesaplayalım.

PAB=+5 kN, PBC=-3 kN, PCD=-7 kN
5 kN çekme (+), 8 kN sıkışma (-), 4 kN sıkışma (-)

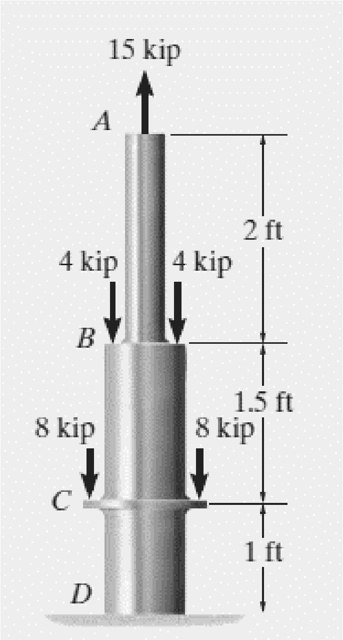


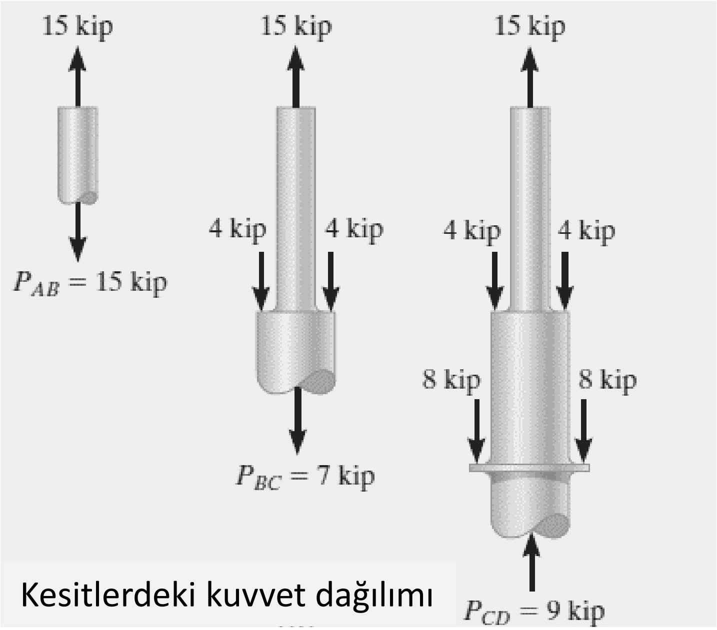
$$\delta_{A/D} = \sum \frac{PL}{AE} = \frac{(5\ \text{kN})L_{AB}}{AE} + \frac{(-3\ \text{kN})L_{BC}}{AE} + \frac{(-7\ \text{kN})L_{CD}}{AE}$$





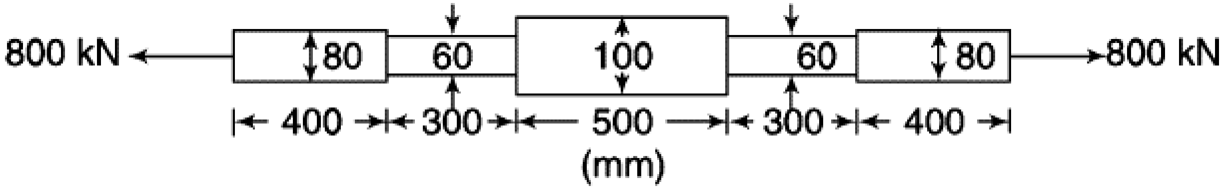
Soru 9. İki parçalı cisimde AB kesit alanı 1 in^2, BD kesit alanı ise 2in^2' dir. Cisimdeki toplam yerdeğiştirmeyi hesaplayınız (E=29*10^3 ksi).





$$\delta = \sum \frac{PL}{AE} = \frac{(+15\ kip)(2\ ft)(12\frac{in}{ft})}{1in^2(\frac{29*10^3 kip}{in^2})} + \frac{(+7\ kip)(1.5\ ft)(12\frac{in}{ft})}{2in^2(\frac{29*10^3 kip}{in^2})} = +0.0127\ in 0.032\ cm$$

Soru 10. Kesitleri farklı olan birleştirilmiş cisme 800 kN luk çekme uygulanmaktadır. Toplam yerdeğiştirmeyi hesaplayınız (E=204 GPa).



$$\Delta = \frac{PL}{AE}$$

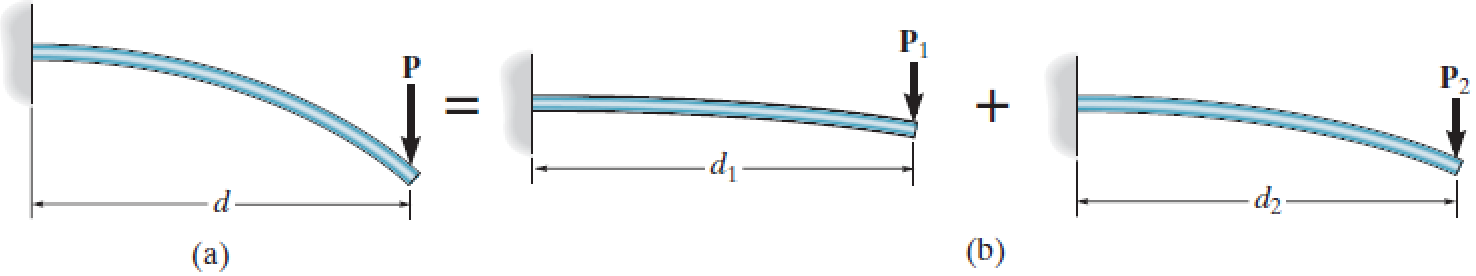
$$= \frac{800\,000}{(\pi/4) \times 204\,000}\left(\frac{400 \times 2}{80^2} + \frac{300 \times 2}{60^2} + \frac{500}{100^2}\right)$$

$$= 4.993\,(0.125 + 0.167 + 0.05) = 1.708\ \text{mm}$$

Süperpozisyon İlkesi

Malzemelerin aynı anda farklı yükleme koşullarına maruz kalması durumunda geçerli olan ilkede, bileşke kuvvet veya yerdeğiştirme yükleme koşullarına göre cismin farklı noktalarına uygulanan yüklerin veya yerdeğiştirmelerin toplamı kadar olacaktır. Ancak ilkenin uygulanması için iki temel koşul vardır.

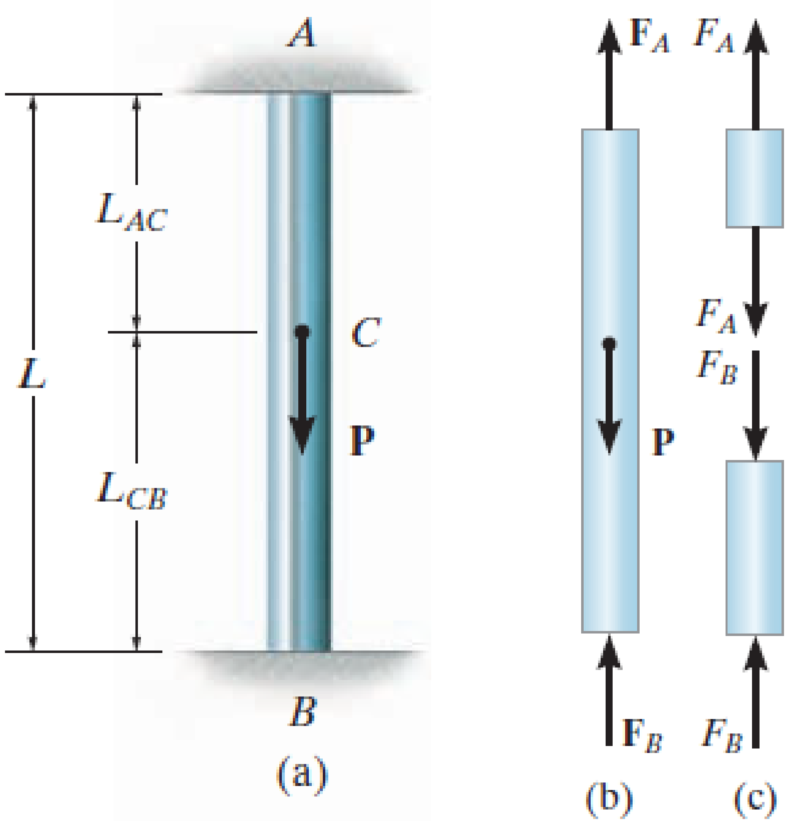
1. Yükleme, hesaplanacak gerilme veya yer değiştirmeler ile lineer ilişkili olmalıdır (σ=P/A, δ=PL/AE)
2. Yükleme sonucunda elemanın original geometrisi veya konfigürasyonu korunmalıdır. Aksi durumda yükün yönelimi ve buna bağlı olarak moment kolları değişecektir. Örneğin, (a) daki şekilde P yüküne maruz çubukta P yükü P1 ve P2 bileşenlerine ayrılabilir (b) ve $P=P_1+P_2$ dir. Ancak şekil değişikliği olursa $P_d \neq P_1 d_1 + P_2 d_2$ olur, zira $d_1 \neq d_2 \neq d'$ dir.



Süperpozisyon ilkesi (Beer, vd. 2011)

Statikçe Belirlenemeyen Eksenel Yükleme

Her iki ucundan sabitlenmiş cisimde denge denklemleri reasiyon kuvvetlerinin belirlenmesinde yetersiz kalır. Çözüm için cisimdeki noktaların nasıl yer değiştireceği bilinmelidir (Kinematik durum). Her iki uçtaki yer değiştirmelerin oranının sıfır olması durumunda (sabit mesnet) kinematik durum $\delta_{A/B}$=0 gerçekleşir. Malzemenin türüne bağlı olarak bu eşitlik yük-yer değiştirme şeklinde ifade edilebilir. AC segmentinde iç kuvvet +F_A ve CB'deki iç kuvvet ise –F_B olur (c).



$$\frac{F_A L_{AC}}{AE} - \frac{F_B L_{CB}}{AE} = 0$$

$$F_A = P\left(\frac{L_{CB}}{L}\right) \quad \text{and} \quad F_B = P\left(\frac{L_{AC}}{L}\right)$$

Statikçe belirsiz problemler (Beer, vd. 2011)