



Ankara Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Jeoloji Mühendisliği Bölümü



JEM234 MUKAVEMET

Ders Notları

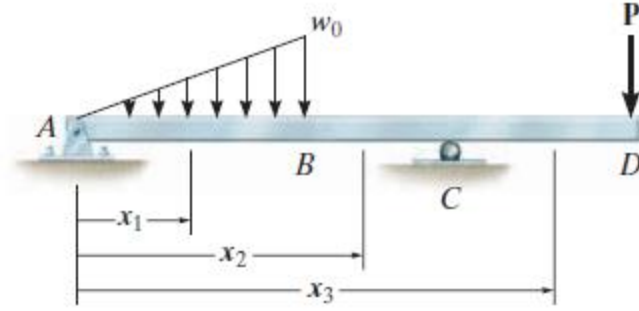
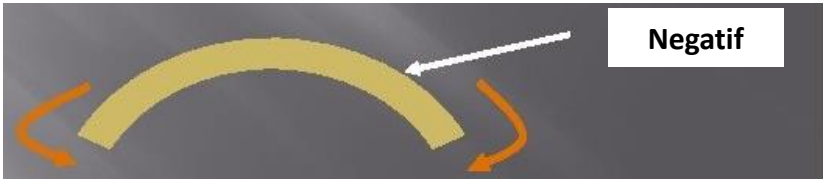
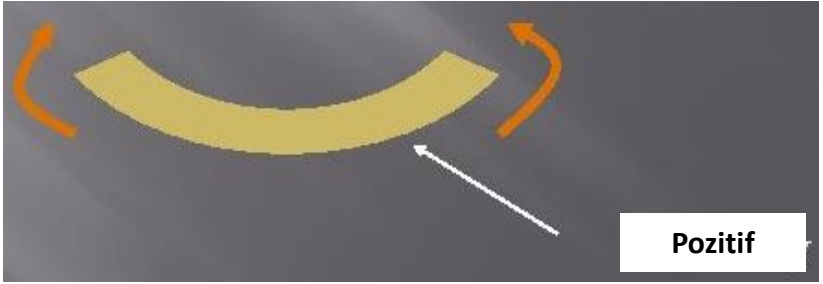
Doç. Dr. Koray ULAMIŞ

5. MAKASLAMA KUVVETİ – EĞİLME MOMENTİ

Kiriş ve şaftlar malzeme mühendisliğinde önemli yapısal elemanlardır. Yük altında makaslama kuvveti ve eğilme momentine maruz kalan bu elemanlarda gerilme ve momentin diyagramlar ile ifade edilmesi önemlidir. Sıkça kullanılan yapısal elemanlar “Slender Member” olarak adlandırılır. Bu elemanlarda kesit alanları boya göre çok daha az olup, yük altında davranışları genel yapısal bütünlük anlamında detaylı olarak incelenmelidir. Diğer önemli bir husus da bu elemanların ne tür destekler üzerinde bulunduğudır. Buna göre farklı mesnet (destek) reaksiyonları ve moment dağılımı gelişecektir. Kirişler yapıda tavanı desteklemek, araç aksı, vinç kolu gibi bir çok alanda kullanılan önemli yapısal elemanlardır.



Kirişlere uygulanan konsantre veya yayılı yüklemeye koşullarına bağlı olarak, uzunluğu boyunca farklı kesimler ve noktalarda reaksiyon gelişecektir. Kirişteki en büyük makaslama kuvveti ve momentin büyüklük ve konumları bir diyagram üzerinde gösterilmelidir. Bu diyagramlar "Makaslama Kuvveti-Moment Diyagramı" adını alır. Bu iki parametrenin dağılımının belirlenmesi malzemelerde güçlendirmenin tasarlanmasında kritik öneme sahiptir. Genel uygulama olarak kirişin sol başlangıç noktasından sonuna kadar parametrelerin belirlenerek diyagram oluşturulmasıdır. Yük koşullarını dikkate alarak uzunluğun fonksiyonu olarak parametrelerin dağılımı süreksiz olacağından kesitlere ayrı ayrı incelemek daha doğru bir yaklaşım olacaktır.

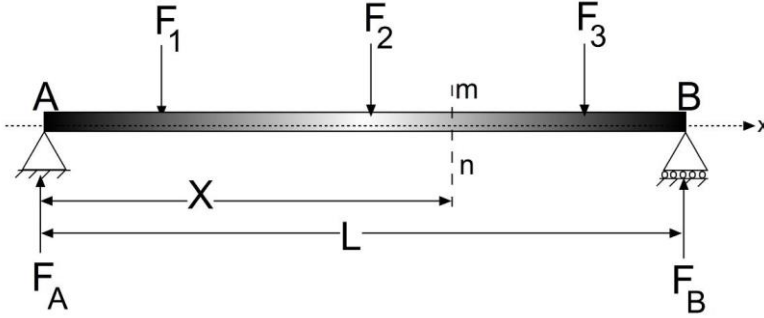


	Pozitif	Negatif
Harici yük		
Makaslama kuvveti		
Eğilme momenti		

Konsantre (Nokta) Yükleme

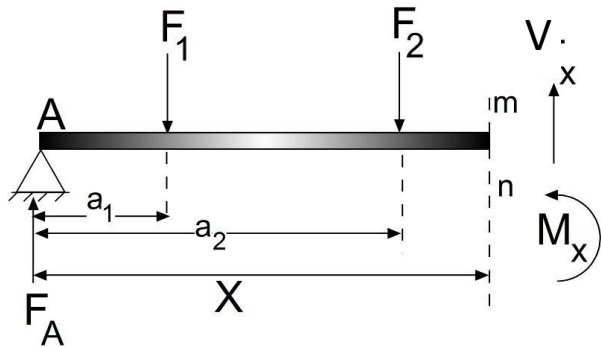
Harici yüklenen kirişte “İçsel makaslama kuvveti” denge gereği kuvvete zıt yönde gelişecektir. Herhangi bir “X” mesafesinde makaslama kuvveti;

$$V_x = F_A - F_1 - F_2$$

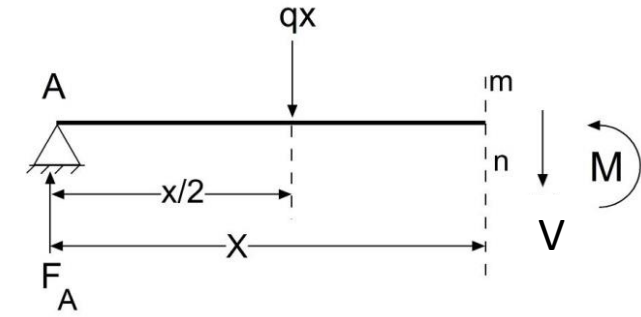
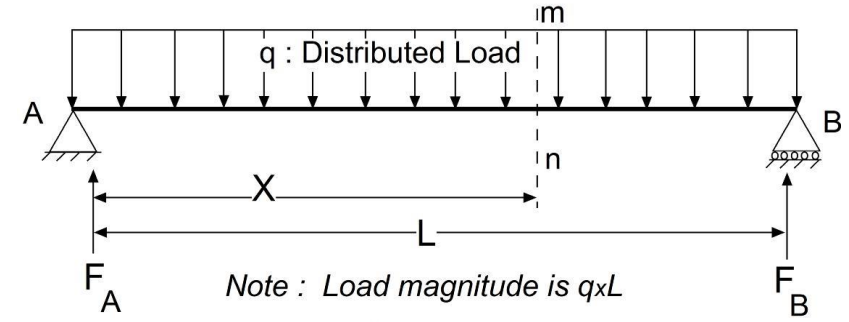


Pozitif harici kuvvet etkisi ile “X” mesafedeki “Eğilme momenti” ise;

$$M_x = F_A X - F_1(X - a_1) - F_2(X - a_2)$$



Yayıllı Yükleme



Not: Kuvvet; $F = qL$

A ve B sabit mesnet tepkileri eşit;

$$F_B = (qL/2) = F_A$$

“mn” kesitinde makaslama kuvveti

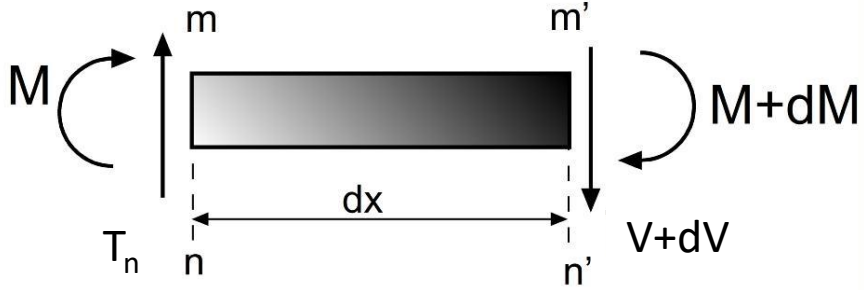
$$V_x = F_A - qX = (qL/2) - qX = q(1/2 - X)$$

“mn” kesitinde eğilme momenti

$$M_x = F_A X - (qX^2/2) = (qL/2)X - (qX^2/2) = (qX/2)(1 - X)$$

Makaslama Kuvveti – Eğilme Momenti İlişkisi

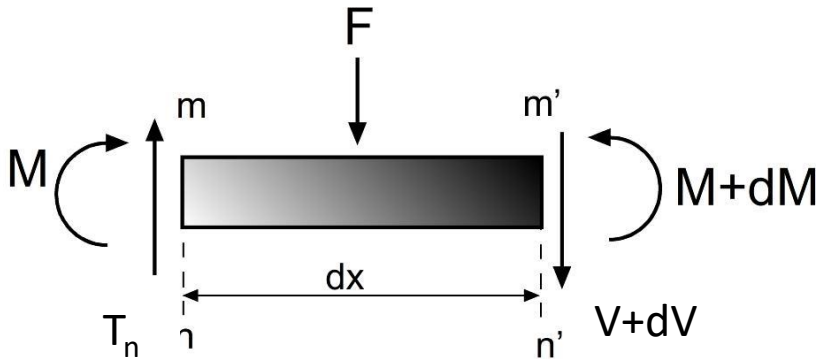
Nokta Yük: Shear “mn” ve “m'n'” kesitleri arasında başka yük yoksa kuvvet iki kesit arasında sabit, ancak moment farklı olacaktır.



$$\Sigma M_{m'n'} = 0 ; M + T_n dx - (M + dM) = 0 ; \mathbf{V = dM/dx}$$

Kirişin herhangi noktasındaki makaslama kuvveti eğilme momentinin türevidir. Diğer deyişle, eğilme momenti makaslama kuvveti grafiğinin altında kalan alan kadardır.

Kesitler arasında başka bir harici yük varsa, kuvvetin büyüklüğü “F” kadar değişecek ve türevi de (dM/dx) değişecektir.

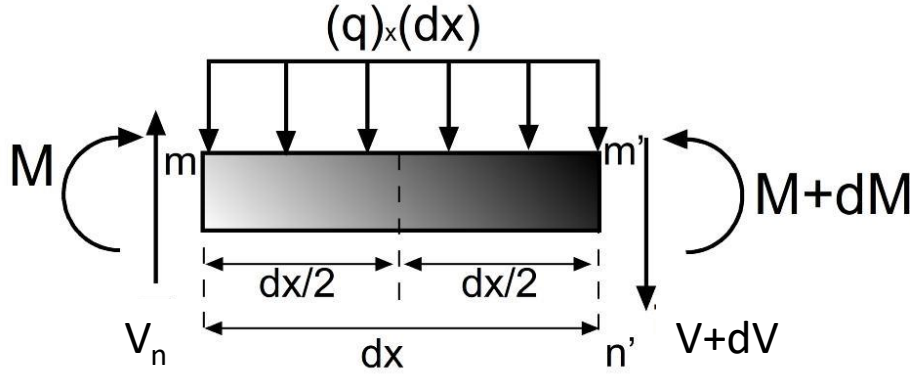


$$-q = dV/dx = d^2M/dx^2$$

$$-\int q dx = (dM/dx) = V$$

$$-\int \int q dx dx = \int V dx = M$$

Yayıllı Yük: İki kesit arasında ek yükleme bulunmaz ise makaslama kuvvetinin türevi yayılı yükün büyüklüğüne eşit olur.



Düşey denge koşulu için; $\Sigma x = 0$; $V - q \, dx - (V + dV) = 0$;

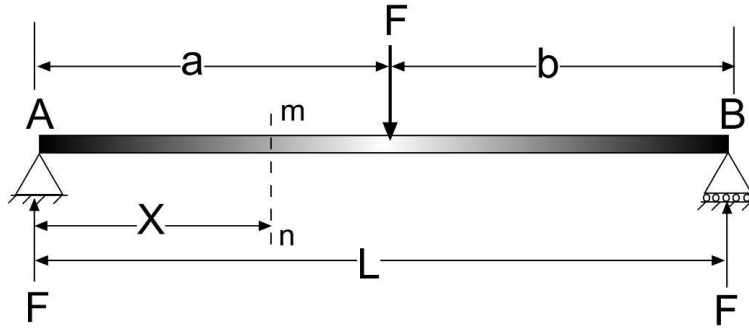
$$q = (-) dV/dx$$

m'n' kesitindeki eğilme momenti sıfır olmalıdır; $M - (M + dM) + V \, dx - (q \, dx^2/2) = 0$;

$$V = dM/dx$$

Not: dx çok küçük olduğundan, dx²/2 daha küçük ve hatta sıfır olarak alınabilir

Makaslama Kuvveti – Eğilme Momenti Diyagramı Esasları



$$M_B = (F_A \times L) - (F \times b) = 0; F_A = (F \times b) / L$$

$$M_B = F_B \times L - F \times a = 0; F_B = (F \times a) / L$$

A mesnetinden “X” mesafedeki “mn” kesiti:

“mn” deki moment

$$-F_A \times X = M_x; M_x = [(F \times b) / L] \times X$$

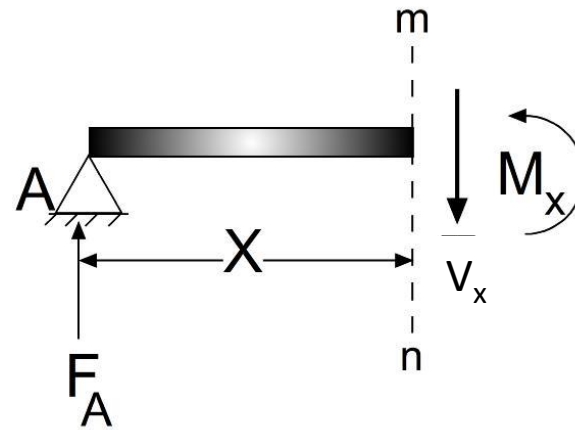
Makaslama kuvveti

$$V_x = (dM_x / dx) = F_A = (F \times b) / L$$

Sınır koşulları

$$X = 0; M_x = [(F \times b) / L] \times X = 0 \text{ and } V_x = (F \times b) / L$$

$$X = a; M_x = [(F \times b) / L] \times a \text{ and } V_x = (F \times b) / L$$



A mesnetinden "X'" mesafedeki mn kesitinde:

Eğilme Momenti

$$M'_x = F_A x' - F(x' - a) = [(F_x b)/L]x' - F(x' - a)$$

Sınır koşulları

$$x' = a; M = [(F_x b)/L]a - F(a - a) = (F_x b_x a)/L$$

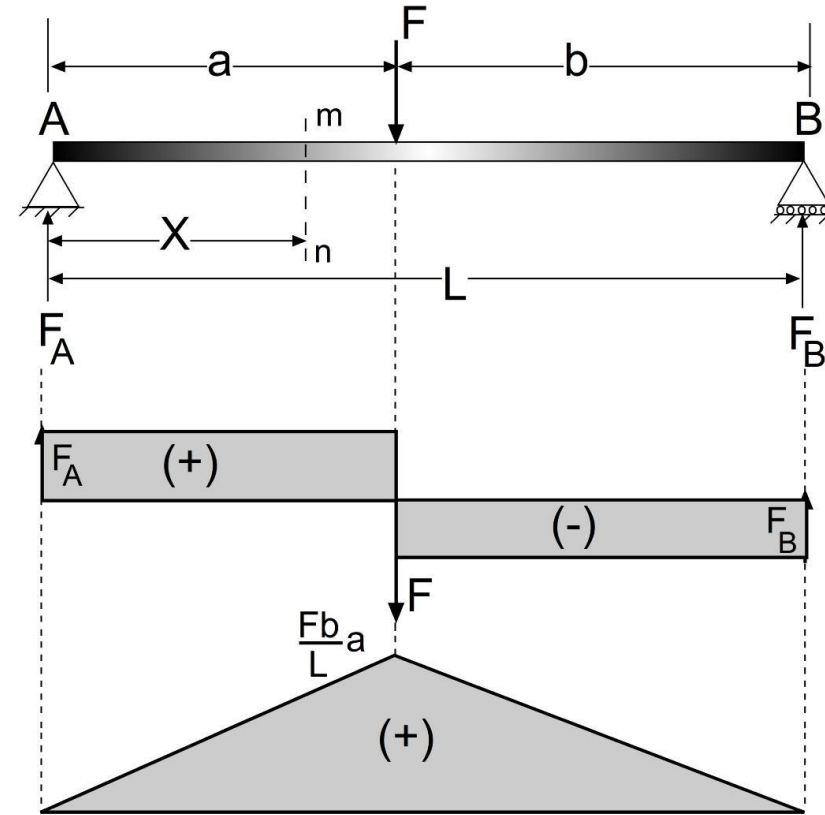
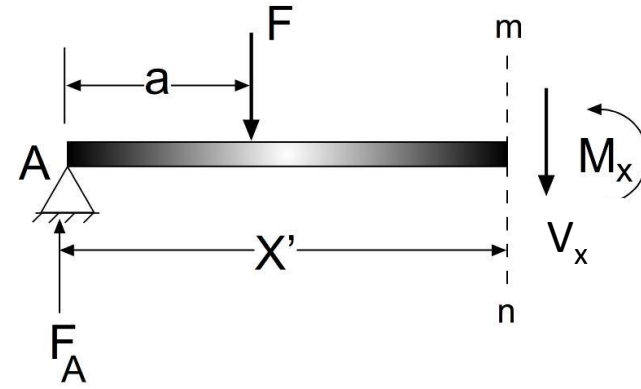
$$x' = L; M = [(F_x b)/L]L - F(L - a) = F_x b - F_x b = 0$$

Makaslama kuvveti;

$$V_{x'} = (M_{x'}'/dx') = [(F_x b)/L] - F = [(F_x b - F_x L)/L] = -F(a/L)$$

Makaslama kuvveti ve moment alanları eşit ise toplamı sıfır olacağından;

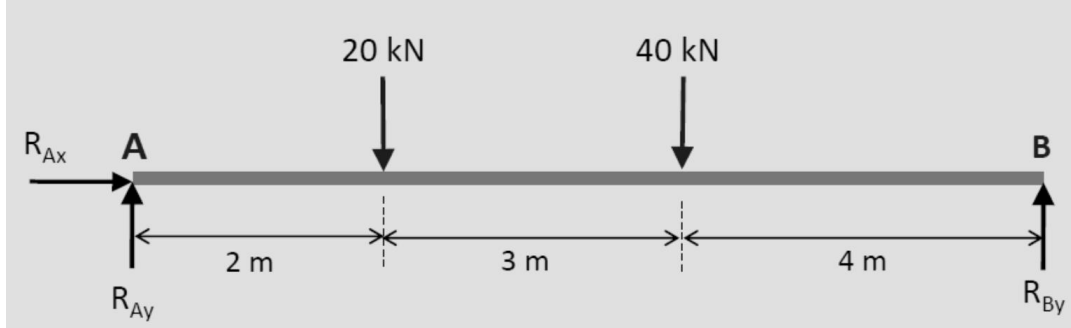
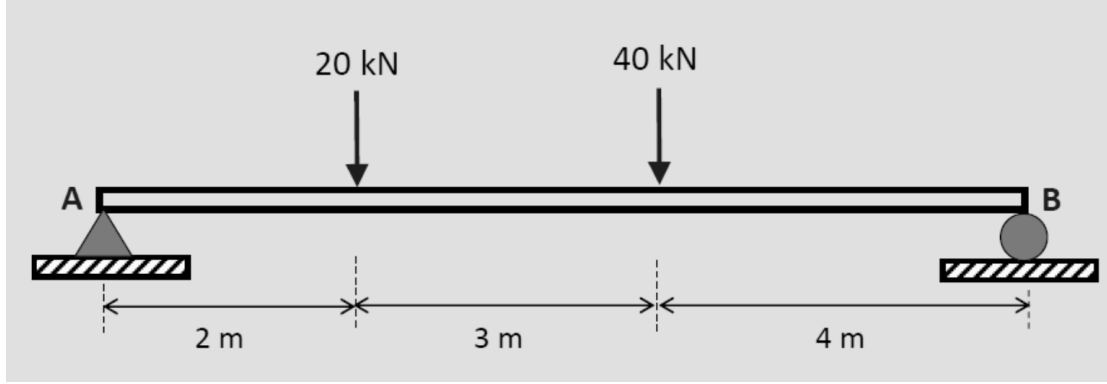
$$\int_A^B dM = \int_A^B V dx ; \int_A^B dM = M_B - M_A$$



Dikkat Edilecek Hususlar

1. Konsantre yüklemelerde makaslama kuvveti büyüklüğü ikinci bir kuvvet ile karşılaşana kadar sabit ve moment değişimi ise lineerdir.
2. Yayılı yüklemelerde makaslama kuvveti değişimi lineer iken, eğilme momenti değişimi paraboliktir.
3. Eğilme momentinin en büyük olduğu noktada makaslama kuvveti sıfırdır
4. Üçgen şekilli yayılı yüklemelerde makaslama ikinci, eğilme momenti üçüncü dereceden parabolic şekillidir.
5. Makaslama kuvveti diyagramının her noktadaki eğimi yayılı yüklemelerde her noktadaki yükü verir
6. Moment diyagramının her noktadaki eğimi ise makaslama kuvvetini verir.

Soru 11. Sabit mesnetlerdeki tepki kuvvetlerini hesaplayınız.



Serbest Cisim Diyagramı

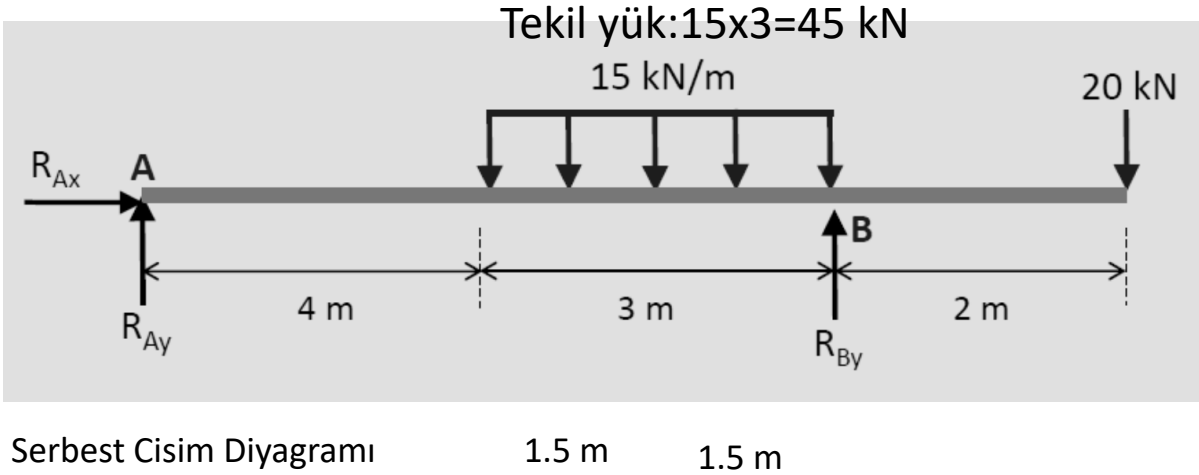
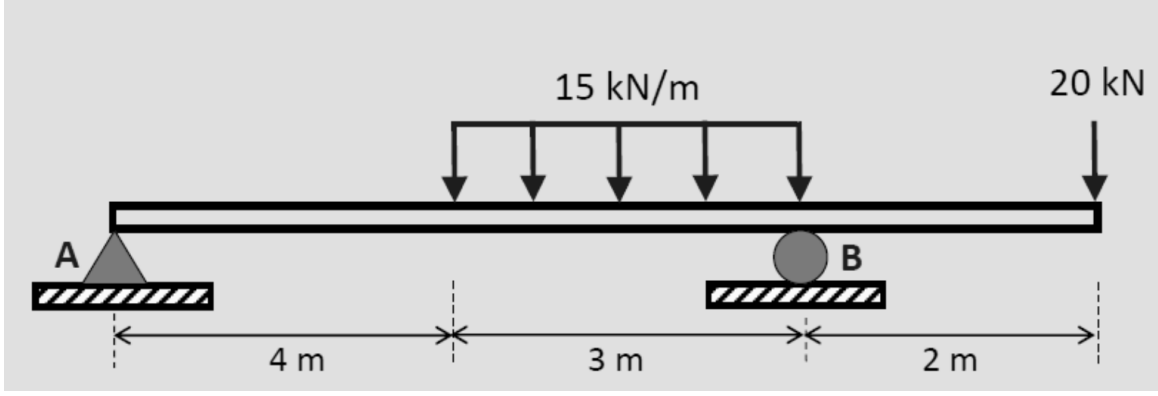
$$\sum F_Y=0; R_A+R_B=20+40=60 \text{ kN}$$

B noktasına göre moment alınırsa;

$$\sum M_B=0$$

$$(R_A \times 9) - (20 \times 7) - (40 \times 4) = 0, R_A = 33.3 \text{ kN}; R_B = 26.7 \text{ kN}$$

Soru 12. Sabit mesnetlerdeki tepki kuvvetlerini hesaplayınız.



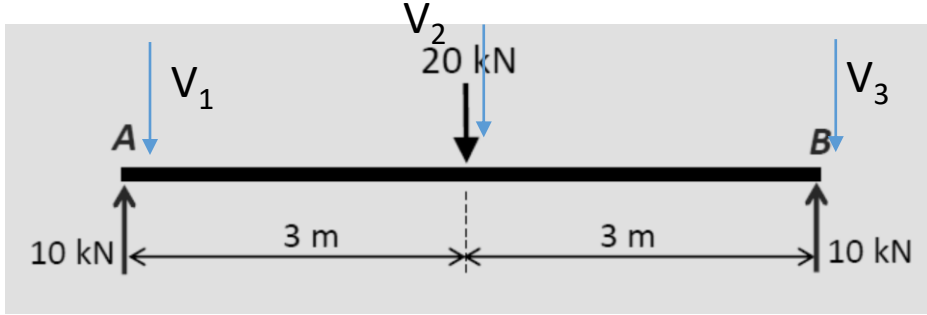
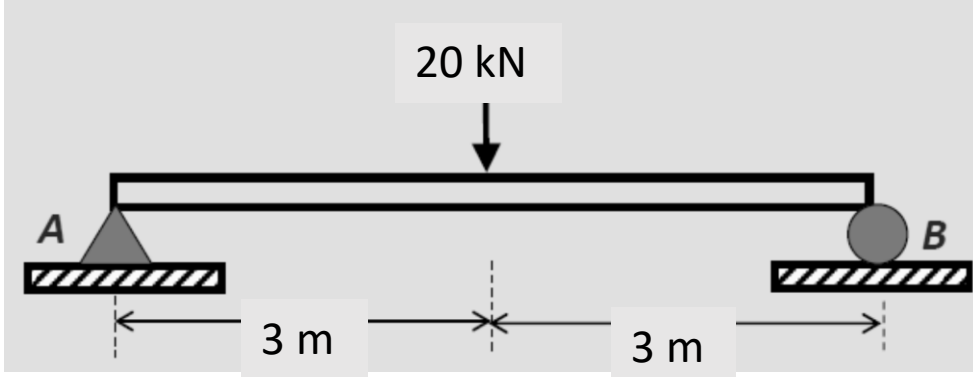
$$\sum F_Y = 0; R_A + R_B = 20 + (15 \times 3) = 65 \text{ kN}$$

A noktasına göre moment alınırsa;

$$\sum M_A = 0$$

$$(R_B \times 7) - (45 \times 5.5) - (20 \times 9) = 0, R_B = 61.07 \text{ kN}; R_A = 3.93 \text{ kN}$$

Soru 13. Sabit mesnetlerdeki tepki kuvvetlerini hesaplayınız. Kesme kuvveti-Eğilme Momenti diyagramını çiziniz.



Serbest Cisim Diyagramı

$$\sum F_Y=0; R_A+R_B=20 \text{ kN}$$

A noktasına göre moment alınırsa;

$$\sum M_A=0$$

$$(R_B \times 6) - (20 \times 3) = 0, R_B = R_A = 10 \text{ kN}$$

A noktasında (x=0)

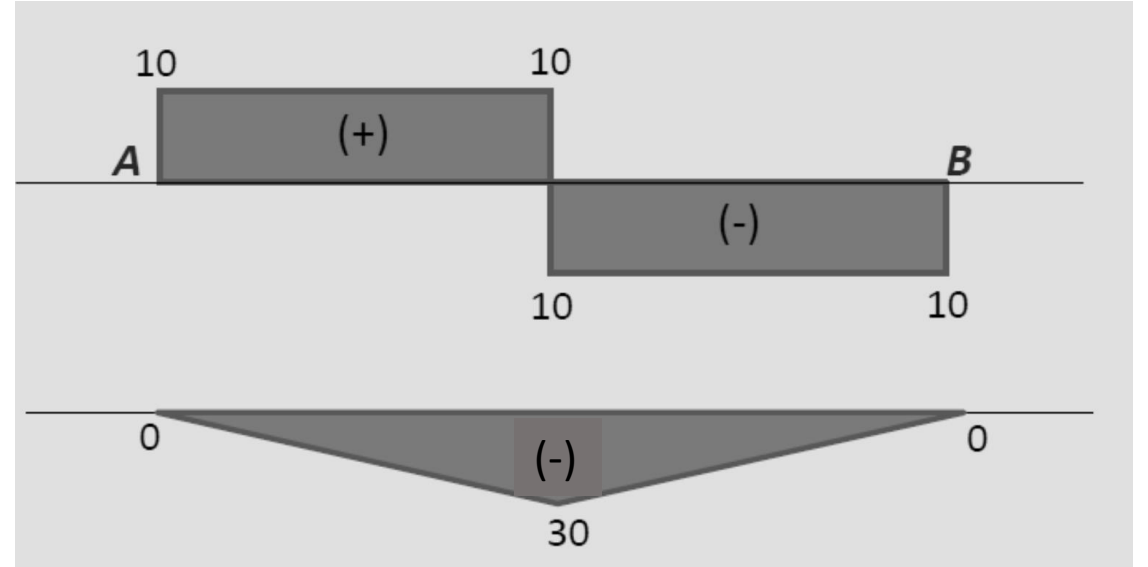
$$V_1 - 10 = 0, V_1 = 10 \text{ kN}; M_1 = 0$$

X=3. metrede

$$V_2 + 20 - 10 = 0, V_2 = -10 \text{ kN}; M_2 = -10 \times 3 = -30 \text{ kN.m}$$

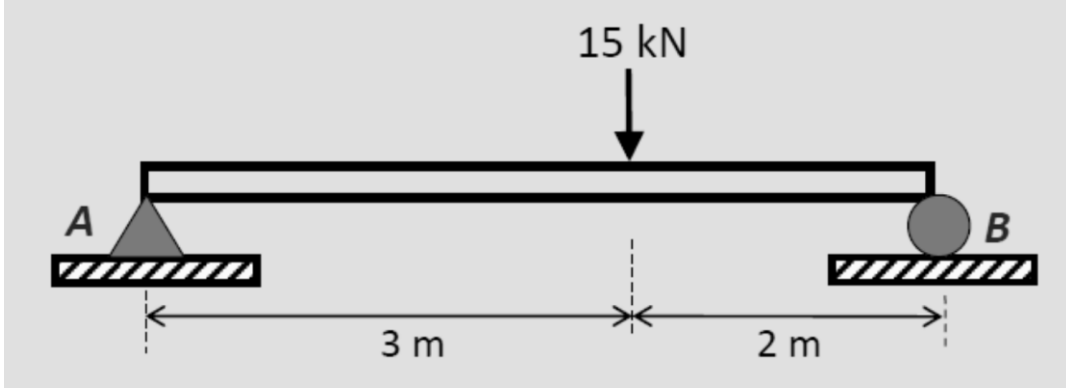
B noktasında (x=6 m)

$$V_3 + 20 - 10 - 10 = 0, V_3 = 0 \text{ kN}; M_3 = (-10 \times 6) + (20 \times 3) = 0 \text{ kN.m}$$



Kesme Kuvveti-Eğilme Momenti Diyagramı

Soru 14. Sabit mesnetlerdeki tepki kuvvetlerini hesaplayınız. Kesme kuvveti-Eğilme Momenti diyagramını çiziniz.

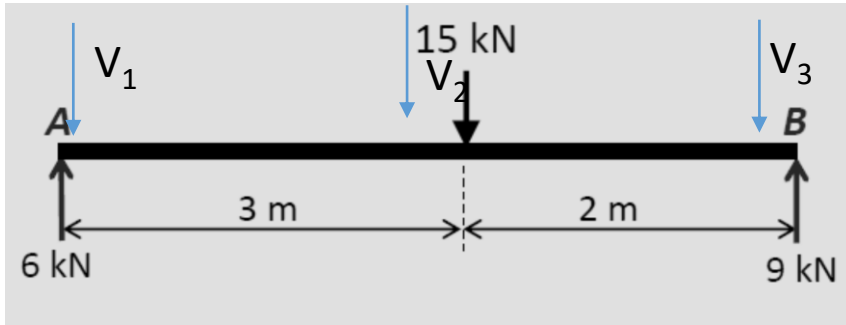


$$\sum F_Y=0; R_A+R_B=15 \text{ kN}$$

A noktasına göre moment alınırsa;

$$\sum M_A=0$$

$$(R_B \times 5) - (15 \times 3) = 0, R_B = 9 \text{ kN } R_A = 6 \text{ kN}$$



Serbest Cisim Diyagramı

A noktasında ($x=0$)

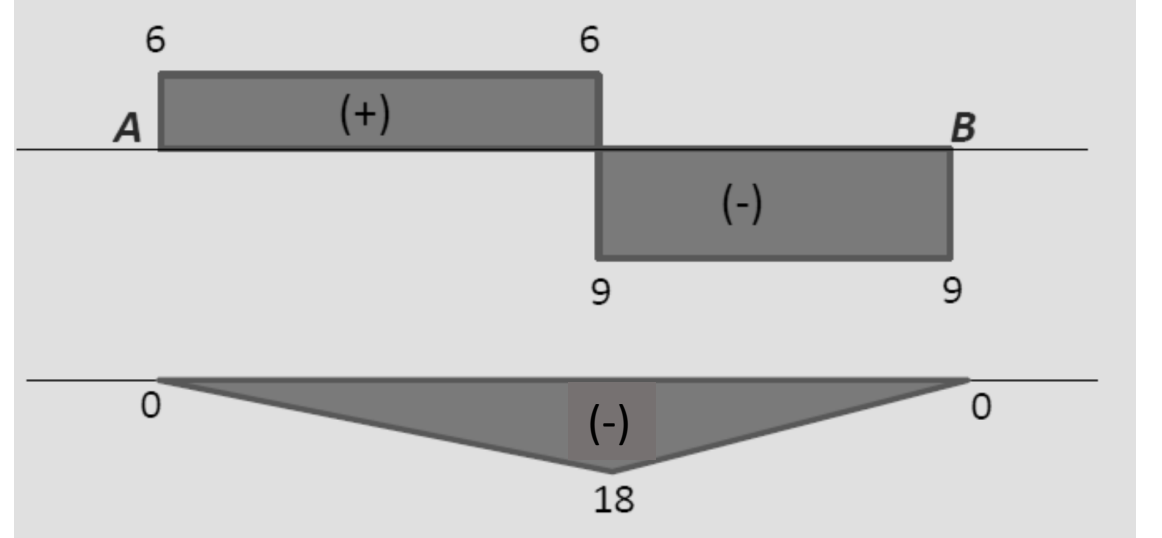
$$V_1 - 6 = 0, V_1 = 6 \text{ kN}; M_1 = 0$$

X=3. metrede

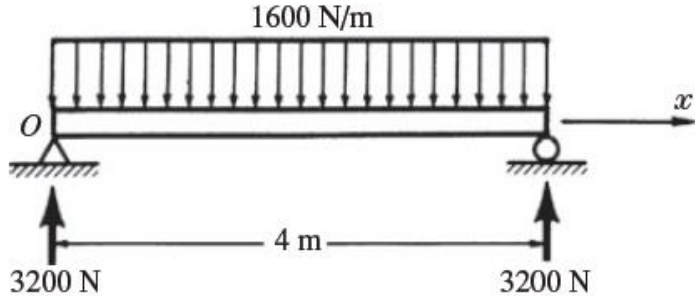
$$V_2 + 15 - 6 = 0, V_2 = -9 \text{ kN}; M_2 = -6 \times 3 = -18 \text{ kN.m}$$

B noktasında ($x=5 \text{ m}$)

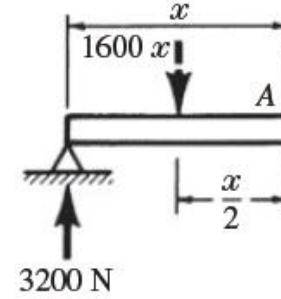
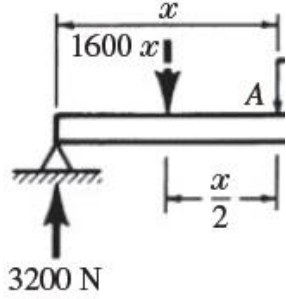
$$V_3 + 15 - 6 - 9 = 0, V_3 = 0 \text{ kN}; M_3 = (-6 \times 5) + (15 \times 2) = 0 \text{ kN.m}$$



Soru 15. Sabit mesnetlerdeki tepki kuvvetlerini hesaplayınız. Kesme kuvveti-Eğilme Momenti diyagramını çiziniz.



Etkiyen yük= $1600 \times 4 = 6400$ N
 Mesnetlere eşit dağılır, mesnet başına 3200 N



$$M = 3200x - 1600x \left(\frac{x}{2} \right)$$

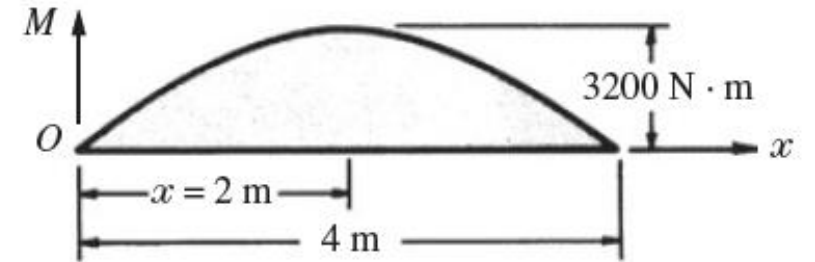
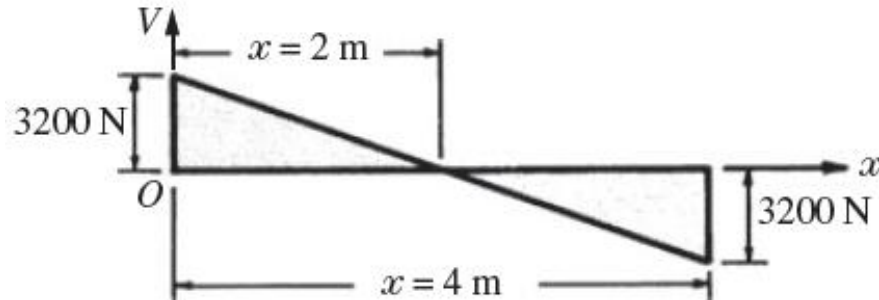
$$= 3200x - 800x^2$$

X=0, $M_1 = 0$ N
 X=1 m, $M_2 = 2400$ N
 X=2 m, $M_3 = 3200$ N
 X=4 m, $M_4 = 0$ N

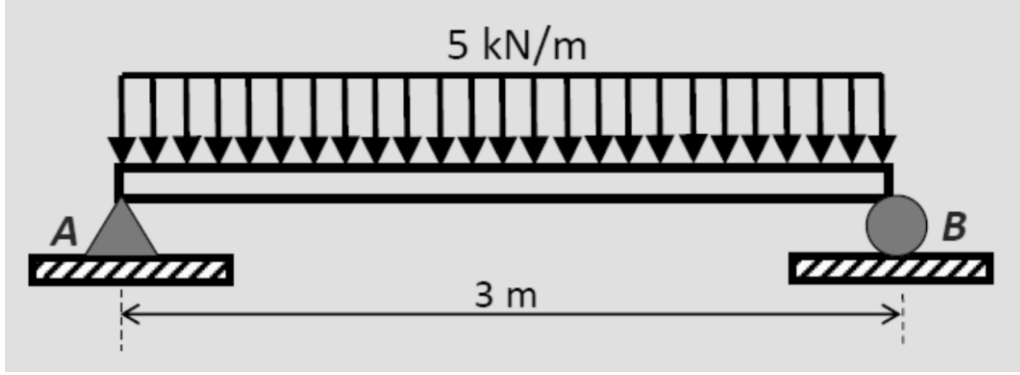
“O” noktasından itibaren kesme kuvvetinin dağılımı
 “x” mesafe sonra $V + 1600x - 3200 = 0$ (orta noktadan etki eder)

$$V = 3200 - 1600x$$

X=0, $V_1 = 3200$ N
 X=1 m, $V_2 = 1600$ N
 X=2 m, $V_3 = 0$ N
 X=4 m, $V_4 = -3200$ N



Soru 16. Sabit mesnetlerdeki tepki kuvvetlerini hesaplayınız. Kesme kuvveti-Eğilme Momenti diyagramını çiziniz.

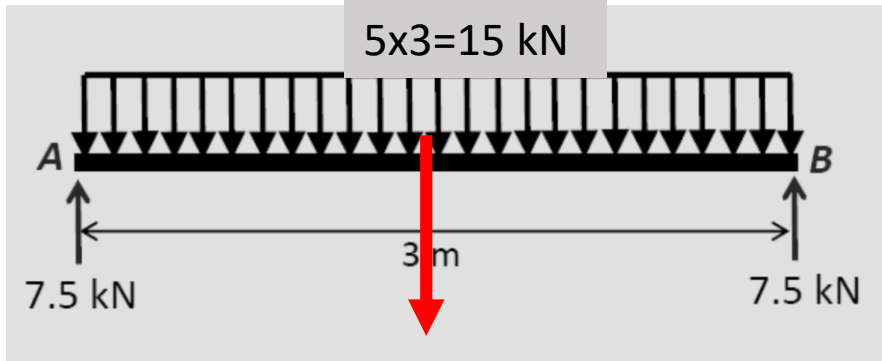


$$\sum F_Y=0; R_A+R_B=15 \text{ kN}$$

A noktasına göre moment alınırsa;

$$\sum M_A=0$$

$$(R_B \times 3) - (15 \times 1.5) = 0, R_B = 7.5 \text{ kN } R_A = 7.5 \text{ kN}$$



Serbest Cisim Diyagramı

A noktasında (x=0)

$$V_1 - 7.5 = 0, V_1 = 7.5 \text{ kN}$$

X=0.5 metrede

$$V_2 + (5 \times 0.5) - 7.5 = 0, V_2 = 5 \text{ kN}$$

X=1.0 metrede

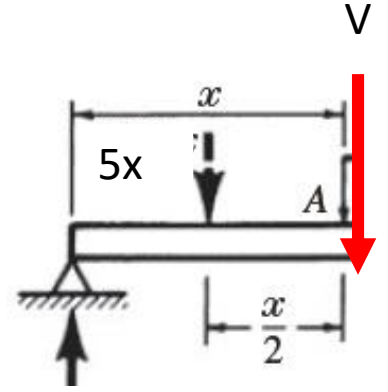
$$V_3 + (5 \times 1) - 7.5 = 0, V_3 = 2.5 \text{ kN}$$

X=1.5 metrede

$$V_4 + (5 \times 1.5) - 7.5 = 0, V_4 = 0 \text{ kN}$$

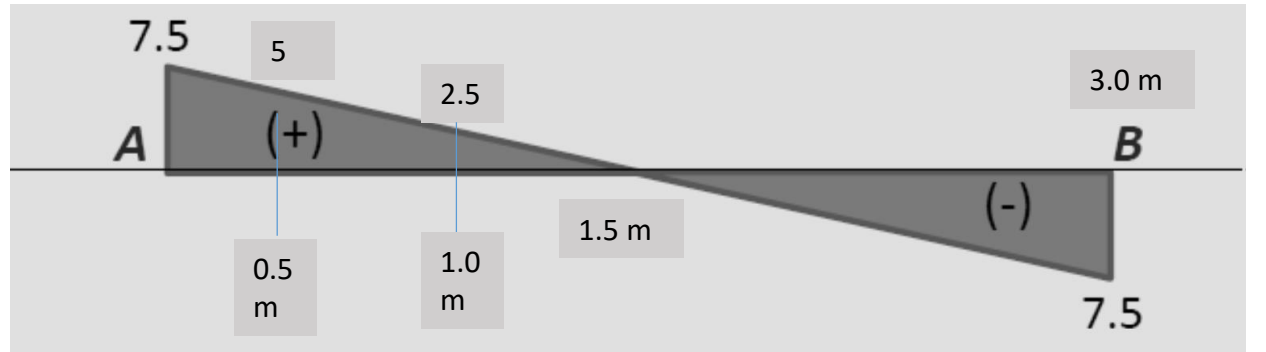
B noktasında (x=3 m)

$$V_4 + (5 \times 3) - 7.5 = 0, V_4 = -7.5 \text{ kN}$$



Yayıllı yük; 7.5 kN
metre başına 5 kN

$$V + 5x - 7.5 = 0; V = 7.5 - 5x$$

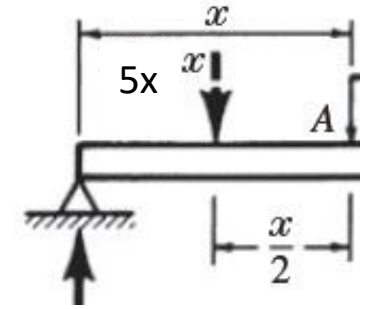


Kesme Kuvveti Diyagramı

Önemli not:

$$dV/dx=-w \text{ ve } dM/dx=V$$

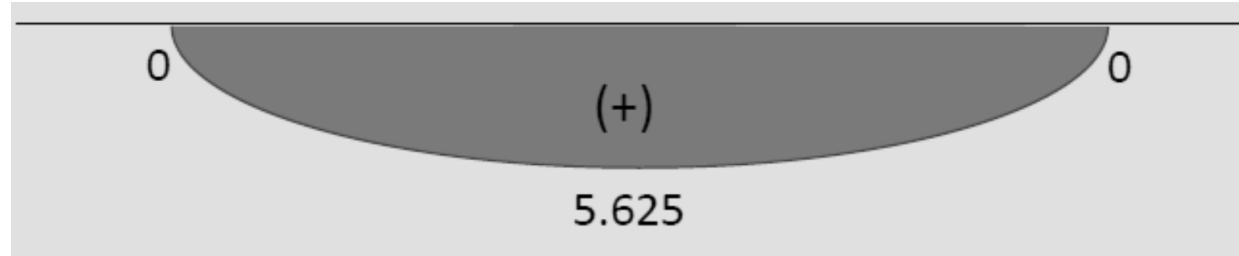
Maximum moment $dM/dx=V=0$ noktasında oluşur.



$$\begin{aligned} X=0, M_1 &= 0 \text{ kN} \\ X=0.5 \text{ m}, M_2 &= 3.125 \text{ kN} \\ X=1 \text{ m}, M_3 &= 5.0 \text{ kN} \\ X=1.5 \text{ m}, M_4 &= 5.625 \text{ kN} \\ X=3 \text{ m}, M_5 &= 0 \text{ kN} \end{aligned}$$

7.5 kN

$$\begin{aligned} -M + 7.5x - 5x(x/2) &= 0 \\ M &= 7.5x - 5x^2/2 \end{aligned}$$



Eğilme momenti Diyagramı