



Ankara Üniversitesi  
Mühendislik Fakültesi  
Jeoloji Mühendisliği Bölümü



JEM234 MUKAVEMET

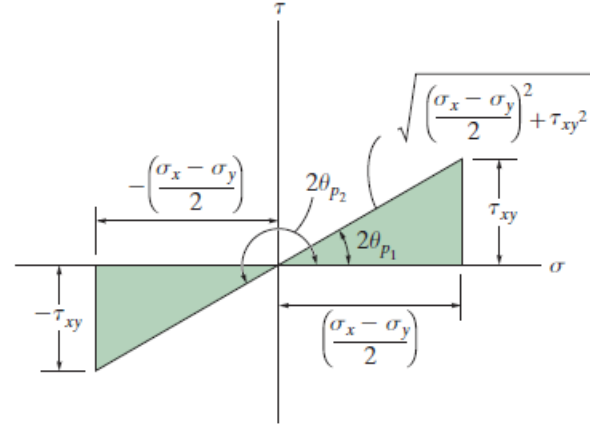
Ders Notları

Doç. Dr. Koray ULAMIŞ

## Asal Gerilmeler ve Maksimum Makaslama Gerilmesi

" $\theta$ " açısının  $x'$  ve düzleminde normal ve makaslama gerilmesi büyüklükleri düzlemin yönelimi ile " $\theta$ " doğrudan ilişkilidir. Gerilmelerin yönlerde maksimum hale gelmesine neden olacak yönelimin bilinmesi mühendislik uygulamalarında çok önemlidir. Düzlem içi asal gerilmelerin belirlenmesinde " $\theta=\theta_p$ " kullanıldığında,

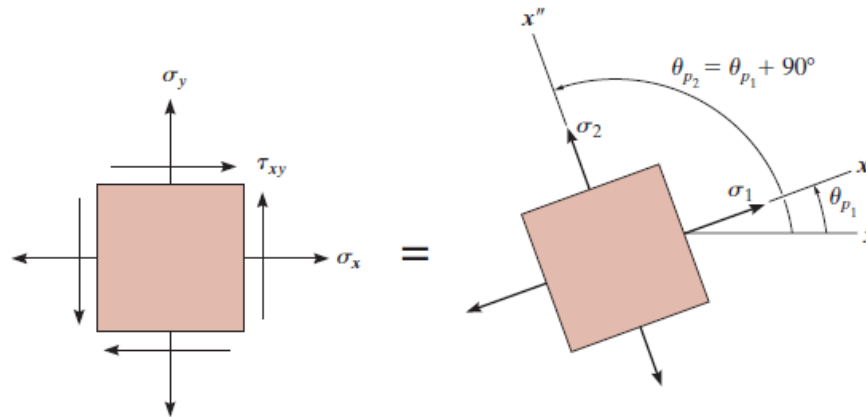
$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}$$



Şekildeki beton kirişte çekmeye bağlı kırıklar oluşmuştur. Gerilme dönüşümleri malzeme dayanımında özellikle kırık/çatlak gelişiminin yöneliminin belirlenmesinde önemlidir. Ayrıca asal gerilmelerin büyüklüğü ve yönelimi dayanımda kritik öneme sahiptir. Malzemelerde etkin olan asal gerilmeler ;

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Eşitliği ile hesaplanır. İlgili gerilmelerin yönleri de Şekil a'da verilmiştir. Asal gerilmeler yönünde makaslama gerilmeleri sıfırdır. Ancak yenilmede normal ve makaslama gerilmeleri bir arada etki eder.



Şekil a. Düzlemsel asal gerilmeler

## Düzlem Gerilmede Maksimum Makaslama Gerilmesi

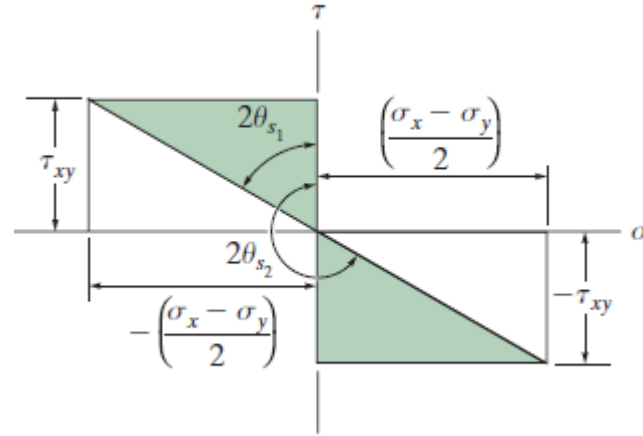
Maksimum makaslama maruz bırakılan cismin birim alanlarındaki yönelimi için aşağıdaki eşitlik kullanılır.

$$\tan 2\theta_s = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}}$$

Eşitliğin kökleri  $\theta_{s1}$  ve  $\theta_{s2}$  olup, şekildeki yeşil üçgenlerden belirlenebilir.  $\tan 2\theta_s$  değeri,  $\tan 2\theta_p$  nin eşdeğeri ve negatifi olup, her biri  $45^\circ$  lik açı değeri alır. Asal normal gerilmelere maruz cisim de maksimum makaslama gerilmesi  $45^\circ$  lik düzlemde oluşur. İlgili düzlemlerdeki maksimum makaslama gerilmesi ise,

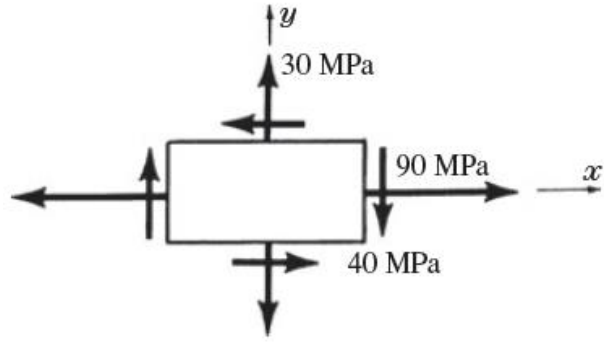
$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

ile belirlenir. Maksimum düzlem makaslama gerilmesinin geliştiği düzlemde ortalama normal gerilmeler ( $\sigma_{av}$ ) gelişir.



$$\sigma_{avg} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

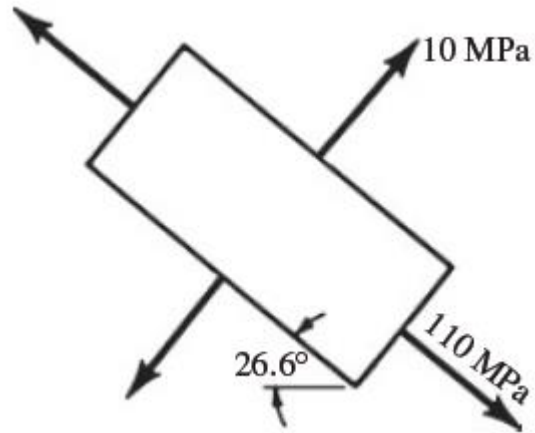
**Soru 19.** Şekilde etkiyen düzlem gerilme dağılımına göre (a) Asal gerilmeler ile yönleri, (b) Maksimum makaslama gerilmesi ve yönlerini belirleyiniz.



(a)

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) + \sqrt{\left[ \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \right]^2 + (\tau_{xy})^2} \\ &= \frac{90 + 30}{2} + \sqrt{\left( \frac{90 - 30}{2} \right)^2 + 40^2} = 110 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\sigma_{\min} = \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) - \sqrt{\left[ \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \right]^2 + (\tau_{xy})^2} = \frac{90 + 30}{2} - \sqrt{30^2 + 40^2} = 10 \text{ MPa}$$



$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)} = \frac{-40}{\frac{1}{2}(90 - 30)} = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore \theta_p = -26.6^\circ, 63.4^\circ$$

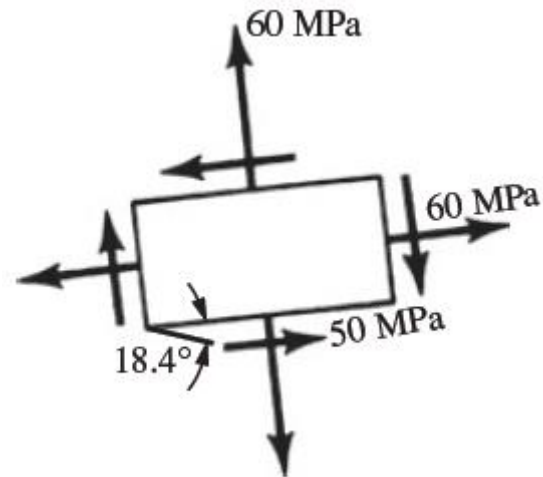
(b)

$$\tau_{\max/\min} = \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right]^2 + (\tau_{xy})^2}$$

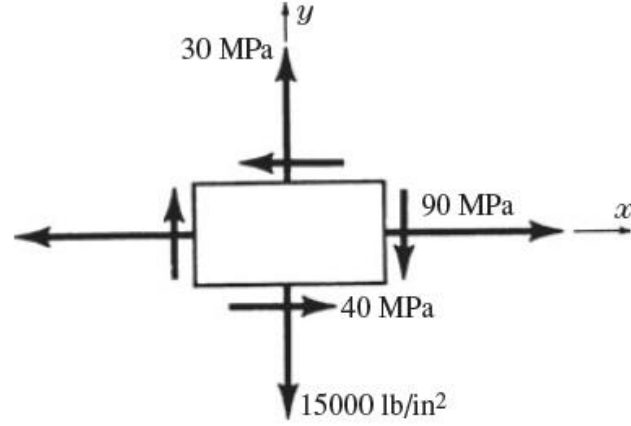
$$= \pm \sqrt{\left(\frac{90 - 30}{2}\right)^2 + 40^2} = \pm 50 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}{\tau_{xy}} = -\frac{(90 - 30)/2}{-40} = \frac{3}{4} \quad \therefore \theta_s = 18.4^\circ, 108.4^\circ$$

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{90 + 30}{2} = 60 \text{ MPa}$$



**Soru 20.** Şekilde etkiyen düzlem gerilme dağılımına göre (a) Asal gerilmeler ile yönleri, (b) Maksimum makaslama gerilmesi ve yönlerini "**MOHR ÇEMBERİ**" ile belirleyiniz.



B noktasının koordinatları: (90;40)

D noktasının koordinatları: (30;-40)

G noktası en küçük asal normal gerilme (10)

H noktası en büyük asal normal gerilme (110)

L ve M noktaları en küçük ve en büyük makaslama gerilmesi ( $\pm 50$ )

Diğer yandan;

$$CK=30 \text{ ve } CD=(30^2+40^2)^{0.5}=50$$

$$\text{En küçük asal normal gerilme, } s_{\min}=OG=OC-CG=60-50=10 \text{ MPa}$$

$$\text{En büyük asal normal gerilme, } s_{\max}=OH=OC+CH=60+50=110 \text{ Mpa}$$

$$\tan 2\theta_p=40/30=26.6^\circ$$

$$\text{En büyük asal makaslama gerilmesi } CL=50 \text{ MPa ve } 2\theta_s \text{ açısı ise } 2\theta_p+90^\circ=18.4^\circ$$

