8. HAFTA

Faktör Döndürme

Faktör döndürmenin amacı kavramsal anlamlılığın sağlanmasıdır. Faktör döndürme ile yeni faktörler elde edilmez. Sadece elde edilen faktörlerin daha iyi yorumlanmasını sağlamak için faktör döndürme yapılır. Faktör döndürmeyle hangi değişkenlerin, hangi faktörle daha ilişkili olduğu yapı belirlenir.

Matris cebirinde, koordinat eksenlerinin dik döndürülmesi bir ortogonal dönüşümle ilişkilidir. Bu nedenle faktör ağırlıklarının ortogonal dönüşümü ve faktörlerin ortogonal dönüşümlerine, faktör döndürülmesi adı verilir.

$\hat{\mathbf{L}}$ herhangi bir yöntemle elde edilen tahmini faktör ağırlıklarının pxm tipinde bir matrisi ise, $\hat{\mathbf{L}}^* = \hat{\mathbf{L}}\mathbf{T}$ döndürülmüş ağırlıkların pxm tipinde bir matrisidir, burada $\mathbf{T}\mathbf{T}' = \mathbf{T}'\mathbf{T} = \mathbf{I}_{mxm}$ dır. Bununla birlikte tahmini varyans kovaryan(veya koralasyon) matrisinin değişmeyecektir. Yani

$$\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\mathbf{\Psi}} = \hat{\mathbf{L}}\mathbf{T}\mathbf{T}'\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\mathbf{\Psi}} = \hat{\mathbf{L}}^*\hat{\mathbf{L}}^{*\prime} + \hat{\mathbf{\Psi}}$$

olduğundan, artık matrisi için

$$\mathbf{S}_n - \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' - \hat{\mathbf{\Psi}} = \mathbf{S}_n - \hat{\mathbf{L}}^*\hat{\mathbf{L}}^{*\prime} + \hat{\mathbf{\Psi}}$$

dir, buradan $\hat{\psi}_i$ özel varyansları ve değişkenlerin ortak faktör varyansları $\hat{h}_i^2$ ‘ ler de değişmez. Böylece matematiksel olarak $\hat{\mathbf{L}}$ ’ nın veya $\hat{\mathbf{L}}^*$ ın elde edilmesi önemli değildir. Döndürme yapmadan önceki ağırlıklar daha kolay yorumlanabilmesi için, daha basit yapılar elde edilinceye kadar döndürme yapılır. Döndürme ile değişken ağırlıkları bir faktör üzerinde daha büyükken, diğer faktörler üzerinde daha küçük ağırlıklara sahip olacaktır. Böylece faktör döndürme ile değişkenlerin grup yapısı da belirlenebilir.

Bir çok döndürme tekniği vardır. Bunlardan en çok kullanıla Varimax olarak adlandırılan, varyansların maksimizasyonudur. Burada her hangi bir yöntemle faktör ağırlıkları ve ortak faktör sayısı belirlenmiş olsun. Her bir değişkenin, her bir faktördeki tahmini ağırlığı $\hat{l}_{ij}$, $i = 1,2,...,p$, $j = 1,2,...,m$ değerleri, değişkenlerin ilişkili ortak faktör varyansları $\hat{h}_i^2$ ’ nin kare köküne bölünerek ölçeklendirilmiş yeni ağırlıklar

$$\hat{l}_{ij}^{*} = \frac{\hat{l}_{ij}}{\hat{h}_i}$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu yeni ağırlık değerleri kullanılarak

$$V = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{p}(\hat{l}_{ij}^{*2})^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{p}\hat{l}_{ij}^{*2})^2}{p}\right]$$

bulunur. Varimax yöntemiyle öyle **T** ortogonal matrisi seçilir ki, V değeri mümkün olduğunca büyük olsun. En büyük V elde edilinceye kadar, ölçeklendirilmiş ağırlık yeniden ölçeklendirilerek yeni ağırlıklar bulunur. En büyük V değerini veren ağırlıklar, döndürmeyle elde edilmiş ağırlıklar olacaktır. **T** dönüşümü belirlendikten sonra, $\hat{l}_{ij}^{*}$ ağırlıkları, $\hat{h}_i$ ile çarpılarak orijinal faktör ağırlık varyansları korunmuş olur. Yukarıda verilen V yaklaşık olarak her bir faktörün (ölçeklendirilmiş) ağırlıklarının karelerinin varyanslarının toplamıdır. Yani

$$V \propto \sum_{j=1}^{m}(j \text{ inci faktör için (ölçeklendirilmiş) ağırlıkların karelerinin varyansıdır.)}$$

dir. Ancak farklı tahmin yöntemleriyle elde edilen faktör ağırlıklarının Varimax döndürülmesiyle elde edilen ağırlıklar aynı olmayacaktır. Ek ortak faktörlerin döndürmeye eklenmesiyle, döndürülmüş ağırlıkların yapısı değişebilir. Eğer tek bir güçlü faktör varsa, bu faktör herhangi bir ortogonal döndürmeyle gizlenebilir, yani etkisini kaybedebilir. Diğer yandan, söz konusu faktör her zaman sabit tutularak, diğer faktörler döndürülebilir. Döndürme ile sadece her faktörün, her bir değişkenin varyansına katkısı değişecektir. Ancak faktörlerce belirlenen toplam varyansın açıklanma oranı değişmez. Başka döndürme yöntemleri de vardır. Bunlardan bazıları: Quartimax, Ortomax, Oblimax, Qurtimin, Covarimin, Biquartimin, Oblimin, Binoramin …. gibi.

Faktör Değerleri (Skorları)

Faktör analizinde genelde faktör modelindeki parametreler üzerinde ilgi yoğunlaşır. Ancak ortak faktörlerin değerlerinin tahminleriyle de ilgilenilir. Faktör değerleri bilinmeyen parametrelerin tahminleri değildir. Faktör değerleri $\underline{F}_j$, $j = 1, 2, ..., n$ gözlenemeyen ancak rasgele olan faktörlerin tahminleridir. Bu tahmin değeri $\hat{\underline{f}}_j$, her bir birim için $\underline{F}_j$ ‘ den elde edilen $\underline{f}_j$' nin tahmini değeridir. Gözlenen $\underline{\mathbf{x}}_j$ değerleri, $\underline{f}_j$ ve $\underline{\varepsilon}_j$ değerlerinden daha az olduğundan tahmin kolay değildir. Bu sorundan dolayı faktör değerlerinin(skorlarının) tahmini için bazı yaklaşımlar söz konusudur. Burada Ağırlıklı en küçük kareler ve en küçük kareler olmak üzere iki yaklaşım üzerinde durulacaktır. Bu yaklaşımların her ikisi de, iki ortak elemana sahiptir. Bunlar:

1. $\hat{l}_{ij}$ faktör ağırlıkları ve $\hat{\psi}_i$ özel varyansların tahmini,

2. Orijinal verilerin lineer dönüşümlerini içerirler.

Döndürülmemiş tahmini faktör ağırlıklarındansa, döndürülmüş ağırlıklara göre faktör değerleri hesaplanır. Burada verilen faktör değerlerini hesaplama ifadelerinde, döndürülmemiş ağırlıklar için, döndürülmüş ağırlıkların alınmasıyla değişmez ve dolayısıyla fark olmayacaktır.

Ağırlıklı En Küçük Karelere Faktör Değerlerinin Bulunması

$\underset{(px1)}{\underline{X}} - \underset{(px1)}{\underline{\mu}} = \underset{(pxm)}{\mathbf{L}}\ \underset{(mx1)}{\underline{F}} + \underset{(px1)}{\underline{\varepsilon}}$ ortogonal faktör modeli için, ortalama vektör $\underline{\mu}$, faktör ağırlıkları matrisi $\mathbf{L}$ ve özel varyanslardan oluşan $\mathbf{\Psi}$ matrisinin bilindiği kabul edilsin. Özel faktör $\underline{\varepsilon}' = (\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \ldots\ \varepsilon_p)$ hata vektörü olarak alınsın. $Var(\varepsilon_i) = \psi_i$, $i = 1,2,...,p$ olduğundan yani hata varyansları eşit olmadığından, ortak faktör değerlerinin tahmini için ağırlıklı en küçük kareler tahmin yöntemi kullanılabilir. Buradan hatalar kendi varyanslarına bölünerek, ağırlıklı hata kareler toplamı,

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\varepsilon_i^2}{\psi_i} = \underline{\varepsilon}'\mathbf{\Psi}^{-1}\underline{\varepsilon}$$
$$= (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mu} - \mathbf{L}\underline{f})'\mathbf{\Psi}^{-1}(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mu} - \mathbf{L}\underline{f})$$

dir. Bu ifadeyi minimize eden $\underline{f}$' nin tahmini $\hat{\underline{f}}$ değeri

$$\hat{\underline{f}}_{mx1} = (\mathbf{L}'_{mxp}\mathbf{\Psi}^{-1}_{pxp}\mathbf{L}_{pxm})^{-1}\mathbf{L}'_{mxp}\mathbf{\Psi}^{-1}_{p*p}(\underline{\mathbf{x}}_{px1} - \underline{\mu}_{px1})$$

biçiminde elde edilir. Bu değer her hangi bir birimin *p* tane özelliğine ilişkin gözlem değerinin, *m* tane ortak faktör için aldığı değerleri göstermektedir. Yani bir birim için *p* tane değerden, *m* tane değer elde edilmiş olur. Bu ifade de bilinmeyen $\mathbf{L}$, $\mathbf{\Psi}$ ve $\underline{\mu}$ parametreleri yerine örneklemden elde edilen $\hat{\mathbf{L}}$, $\hat{\boldsymbol{\Psi}}$ ve $\hat{\underline{\mu}} = \overline{\underline{X}}$ tahmin edicileri alınırsa, j inci birim için elde edilen faktör değerleri

$$\hat{\underline{f}}_j = (\hat{\mathbf{L}}'\hat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}\hat{\mathbf{L}})^{-1}\hat{\mathbf{L}}'\hat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}(\underline{\mathbf{x}}_j - \overline{\underline{\mathbf{x}}}) \ , \ j = 1,2,...,n$$

olarak elde edilir. $\hat{\mathbf{L}}$, $\hat{\boldsymbol{\Psi}}$ ve $\hat{\underline{\mu}} = \overline{\underline{X}}$ en çok olabilirlik yönteminden elde edilirlerse, $\hat{\mathbf{L}}'\hat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}\hat{\mathbf{L}} = \hat{\Delta}$ ’ nın diagonal bir matris olma tekil koşulunu sağlamalıdır. Buradan, en çok olabilirlik tahminlerinden ağırlıklı en küçük kareler ile elde edilen faktör değerleri

$$\begin{aligned} \hat{\underline{f}}_j &= (\hat{\mathbf{L}}'\hat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}\hat{\mathbf{L}})^{-1}\hat{\mathbf{L}}'\hat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}(\underline{\mathbf{x}}_j - \overline{\underline{\mathbf{x}}}) \\ &= \hat{\Delta}^{-1}\hat{\mathbf{L}}'\hat{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}(\underline{\mathbf{x}}_j - \overline{\underline{\mathbf{x}}}) \quad , \qquad j = 1,2,...,n \end{aligned}$$

dir veya örneklem korelasyon matrisinden faktör ağırlıkları elde edildiğinde, faktör değerleri

$$\begin{aligned} \hat{\underline{f}}_j &= (\hat{\mathbf{L}}_Z'\hat{\boldsymbol{\Psi}}_Z^{-1}\hat{\mathbf{L}}_Z)^{-1}\hat{\mathbf{L}}_Z'\hat{\boldsymbol{\Psi}}_Z^{-1}\underline{\mathbf{z}}_j \\ &= \hat{\Delta}_Z^{-1}\hat{\mathbf{L}}_Z'\hat{\boldsymbol{\Psi}}_Z^{-1}\underline{\mathbf{z}}_j \quad , \qquad j = 1,2,...,n \end{aligned}$$

olarak elde edilir, burada $\underline{\mathbf{z}}_j = D_{pxp}^{-1/2}(\underline{\mathbf{x}}_j - \overline{\underline{\mathbf{x}}})$ ve $\hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\mathbf{L}}_Z\hat{\mathbf{L}}_Z' + \hat{\boldsymbol{\Psi}}_Z$ dir.

En Küçük Karelere Faktör Değerlerinin Bulunması

Faktör ağırlıkları temel bileşenler yönteminden elde edilirse, faktör değerleri ağırlıklandırılmamış en küçük kareler yöntemi kullanılarak elde edilebilir. ψ_i ’ ler eşit veya yakın olduğu kabul edildiğinde faktör değerleri

$$\hat{\underline{f}}_j = (\tilde{\mathbf{L}}'\tilde{\mathbf{L}})^{-1}\tilde{\mathbf{L}}'(\underline{\mathbf{x}}_j - \overline{\underline{\mathbf{x}}}) \ , \ j = 1,2,...,n$$

dir veya standartlaştırılmış veriler için

$$\hat{\underline{f}}_j = (\tilde{\mathbf{L}}_Z'\tilde{\mathbf{L}}_Z)^{-1}\tilde{\mathbf{L}}_Z'\underline{\mathbf{z}}_j \ , \ j = 1,2,...,n$$

dir.

$$\tilde{\mathbf{L}}_{pxm} = \left[\sqrt{\hat{\lambda}_1}\,\hat{\underline{e}}_1 \ \vdots \ \sqrt{\hat{\lambda}_2}\,\hat{\underline{e}}_2 \ \vdots \ . \ . \ . \ \vdots \ \sqrt{\hat{\lambda}_m}\,\hat{\underline{e}}_m \right]$$

olduğundan,

$$\underline{\hat{f}}_j = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\hat{\lambda}_1}} \underline{\hat{e}}_1 (\underline{\mathrm{x}}_j - \underline{\bar{\mathrm{x}}}) \\ \frac{1}{\sqrt{\hat{\lambda}_2}} \underline{\hat{e}}_2 (\underline{\mathrm{x}}_j - \underline{\bar{\mathrm{x}}}) \\ . \\ . \\ . \\ \frac{1}{\sqrt{\hat{\lambda}_m}} \underline{\hat{e}}_m (\underline{\mathrm{x}}_j - \underline{\bar{\mathrm{x}}}) \end{bmatrix} \quad , \; j = 1, 2, \ldots, n$$

dir. Bu faktör skorları için

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \underline{\hat{f}}_j = \underline{0} \text{ (örneklem ortalama vektörü)}$$

ve

$$\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \underline{\hat{f}}_j \underline{\hat{f}}_j' = \mathrm{I} \text{ (örneklem varyans kovaryans matrisi}$$

dir. j inci birimin gözlem değerleri $\underline{\mathbf{x}}_j$ den elde edilen $\underline{\hat{f}}_j$ değerleri, ilk m tane temel bileşen için elde edilen temel skorlar ile aynıdır.

Örnek 13 : 220 adet öğrencinin p=6 derse ilişkin sınav sonuçlarının korelasyon matrisi aşağıdaki gibidir:

$$R = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} gal\,dili & ingilizce & tarih & aritmetik & cebir & geometri \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.000 & 0.439 & 0.410 & 0.288 & 0.329 & 0.248 \\ & 1.000 & 0.351 & 0.354 & 0.320 & 0.329 \\ & & 1.000 & 0.164 & 0.190 & 0.181 \\ & & & 1.000 & 0.595 & 0.470 \\ & & & & 1.000 & 0.464 \\ & & & & & 1.000 \end{bmatrix} \end{array}$$

m=2 ortak faktör için en çok olabilirlik yöntemine göre çözüm:

Değişkenler	F_1	F_2	$\hat{h}_i^2$
X_1	0.553	0.429	0.490
X_2	0.568	0.288	0.406
X_3	0.392	0.450	0.356
X_4	0.740	-0.273	0.623
X_5	0.724	-0.211	0.569
X_6	0.595	-0.132	0.372

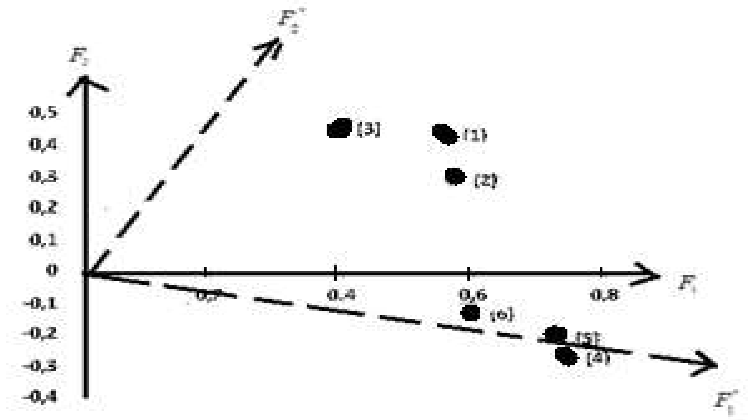
R matrisine ilişkin özdeğer ve özvektörler sırasıyla

$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\hat{\lambda}_6$
2.7329	1.1298	0.6152	0.6012	0.5248	0.3962

$$\hat{e} = \begin{bmatrix} 0.3979 & 0.4225 & -0.2379 & 0.4470 & 0.6206 & -0.1473 \\ 0.4164 & 0.2732 & -0.6498 & -0.4059 & -0.3700 & 0.1676 \\ 0.3130 & 0.5996 & 0.6713 & -0.0990 & -0.2855 & -0.0222 \\ 0.4466 & -0.3886 & 0.0008 & 0.2322 & -0.3518 & -0.6869 \\ 0.4500 & -0.3532 & 0.1361 & 0.4024 & -0.1218 & 0.6910 \\ 0.4103 & -0.3340 & 0.2280 & -0.6401 & 0.5079 & -0.0205 \end{bmatrix}$$

Bütün değişkenler birinci faktör üzerinde pozitif ağırlıklara sahiptir. Bu faktör genel bilgi faktörü olabilir. İkinci faktör üzerindeki ağırlıkların yarısı pozitif yarısı negatiftir. Bu faktöre de ikili zıt faktör adı verilir. (ağırlıkların negatif ya da pozitif olması analizi etkilemez.) Bu faktör kolay tanımlanamaz. Ancak faktör üzerindeki yukarıdaki ortalama puanlar sözel test üzerindeki ortalama puanları vermektedir. Yukarıdaki ortalama sonuçlardan faktör üzerinde matematik testinin ortalama sonuçları daha düşüktür. Bu nedenle bu faktör matematik yeteneği olma ve matematik yeteneği olmama biçiminde adlandırılabilir.

$\left(\hat{l}_{i1}, \hat{l}_{i2}\right)$ faktör ağırlıkları çiftleri



Noktalar değişkenlerin ilişkilerinin sayısı ile gösterilmiştir. Ayrıca koordinat eksenleri yaklaşık $\phi \cong 20^o$ lik açı ile saat yönünde ortogonal döndürmeyi göstermektedir. Bu açı $\left(\hat{l}_{41}, \hat{l}_{42}\right)$ noktasından geçen yeni eksene göre seçilmiştir. Bu işler yapıldığında değişkenlerin iki farklı kümesi oldukça iyi açıklanmaktadır.

$\phi \cong 20^o$ olup buradan

$$T = \begin{bmatrix} \cos 20 & \sin 20 \\ -\sin 20 & \cos 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.939 & 0.342 \\ -0.342 & 0.939 \end{bmatrix}$$

$$\hat{L}^* = \begin{bmatrix} 0.553 & 0.429 \\ 0.568 & 0.288 \\ 0.392 & 0.450 \\ 0.740 & -0.273 \\ 0.724 & -0.211 \\ 0.595 & -0.132 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.939 & 0.342 \\ -0.342 & 0.939 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.372 & 0.592 \\ 0.434 & 0.465 \\ 0.214 & 0.557 \\ 0.789 & -0.003 \\ 0.752 & 0.049 \\ 0.604 & 0.080 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Matematiksel test değişkenleri F_1^* üzerinde daha yüksek ağırlıklı ve F_2^* üzerindeki ağırlıklar önemsiz gözükmektedir. Birinci faktör matematik yetenek faktörü olabilir. Benzer biçimde üç sözel test değişkeni F_2^* üzerinde daha yüksek ağırlığa sahiptir ve F_1^* üzerindeki ağırlıkları önemsenmeyecek kadar küçüktür. İkinci faktör sözel yetenek faktörü olabilir. Daha önce (yani döndürme yapılamadan önce) tanımlanan genel bilgi faktörü F_1^* ve F_2^* faktörlerinin içinde yer almıştır.

Döndürülmüş faktör ağırlıkları ve ilişkili ortak faktör varyansları aşağıdaki gibidir:

Değişkenler	F_1^*	F_2^*	$\hat{h}_i^{2*} = \hat{h}_i^2$
X_1	0.372	**0.592**	0.490
X_2	0.434	**0.465**	0.406
X_3	0.214	**0.557**	0.356
X_4	**0.789**	-0.003	0.623
X_5	**0.752**	0.049	0.569
X_6	**0.604**	0.080	0.372

Örnek 14: Daha önce verilen Pazar verileri göz önüne alınsın. Temel bileşenler çözümüyle elde edilen orijinal faktör ağırlıkları, değişkenlerin ortak faktör varyansları, varimax döndürme yöntemiyle elde edilen faktör ağırlıkları aşağıda verilmiştir:

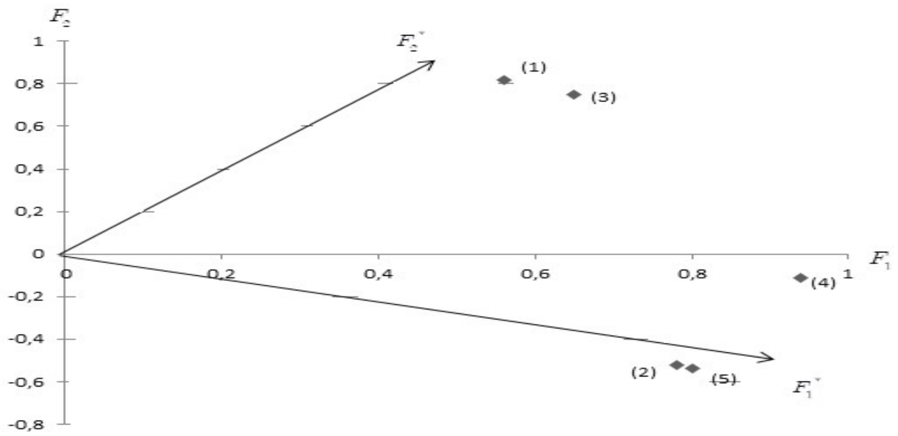
	Tahmini Faktör Ağırlıkları		Döndürülmüş Tahmini Faktör Ağırlıkları		Ortak Faktör Varyansları
Değişkenler	F_1	F_2	F_1^*	F_2^*	$\hat{h}_i^{2*} = \hat{h}_i^2$
X_1	0.56	0.82	0.02	**0.99**	0.98
X_2	0.78	-0.52	**0.94**	-0.01	0.88
X_3	0.65	0.75	0.13	**0.98**	0.98
X_4	0.94	-0.11	**0.84**	0.43	0.89
X_5	0.80	-0.54	**0.97**	-0.02	0.93
Toplam örneklem varyansının birikimli açıklama oranı	0.571	**0.934**	0.507	**0.934**	

Tahmini ağırlıkların döndürülmesiyle sadece her faktör ile açıklanan toplam örneklem varyans oranının dağılımı etkilenecektir. Ancak birikimli açıklama oranları değişmez (0.934).

2.,4. ve 5. Değişkenler faktör 1 ile tanımlanır. (Faktör 1 üzerinde yüksek ağırlık, faktör 2 üzerinde küçük ağırlıkları olduğundan)

1. ve 3. Değişken ise faktör 2 ile tanımlanır (Faktör 2 üzerinde yüksek ağırlık, faktör 1 üzerinde küçük ağırlıkları olduğundan)

Değişkenler için faktör ağırlıkları orijinal ve varimax döndürülmüş faktör eksenlerine göre aşağıdaki gibidir:



Faktör ağırlıklarının döndürülmesi en çok olabilirlik yöntemiyle elde edilen ağırlıklar için önemlidir. Çünkü ilk değerler, $\hat{L}'\hat{\Psi}^{-1}\hat{L}$ diagonal matrisinin teklik koşulunun sağlanmasına kısıtlanmıştır. Bu koşul hesaplama amaçları için uygundur, ancak faktörlerin kolay ifade edilmesini sağlamaz.

Örnek 15 : Hisse senedi verileri için ağırlık faktörlerinin en çok olabilirlik tahminleri ve varimax döndürme yöntemiyle elde edilen faktör ağırlıkları aşağıda verilmiştir:

	Tahmini Faktör Ağırlıklarının En Çok Olabilirlik Tah.		Döndürülmüş Tahmini Faktör Ağırlıkları		Ortak Faktör Varyansları	
Değişkenler	F_1	F_2	F_1^*	F_2^*	$\hat{h}_i^{2*} = \hat{h}_i^2$	$\hat{\psi}_i$
X_1	0.684	0.189	**0.601**	0.377	0.50	0.50
X_2	0.694	0.517	**0.850**	0.164	0.75	0.25
X_3	0.681	0.248	**0.643**	0.335	0.53	0.47
X_4	0.621	-0.073	0.365	**0.507**	0.39	0.61
X_5	0.792	-0.442	0.208	**0.883**	0.82	0.18
Toplam örneklem varyansının birikimli açıklama oranı	0.485	**0.598**	0,334	**0.598**		

Döndürülmüş ağırlıklar için faktör yorumları daha önce verilmişti.

1. , 2. ve 3. değişkenlerin (bunlar kimyasal hisseler) yükü faktör 1 üzerinde yüksektir.

4. ve 5. değişkenlerin (bunlar petrol hisseleri) faktör 2 üzerinde ağırlıkları yüksektir.

İki faktör birlikte endüstrileri ayırmaktadır. Faktör 1 tek ekonomik gücü verir öyleki kimyasal hisseler birlikte harekete sebep olur. Faktör 2 petrol hisseleriyle etkilenen ekonomik şartları gösterir.

Örnek 16 : Olimpiyat dekatlon verileri için ağırlık faktörlerinin temel bileşenler ve en çok olabilirlik tahminlerinin döndürme yöntemiyle elde edilen faktör ağırlıkları aşağıda verilmiştir:

	Temel Bileşenler Yöntemi Döndürülmüş Tahmini Faktör Ağırlıkları				Ortak Faktör Varyansları	En Çok Olabilirlik Yöntemi Döndürülmüş Tahmini Faktör Ağırlıkları				Ortak Faktör Varyansları
Değişkenler	F_1^*	F_2^*	F_3^*	F_4^*	$\hat{h}_i^{2*} = \hat{h}_i^2$	F_1^*	F_2^*	F_3^*	F_4^*	$\hat{h}_i^{2*} = \hat{h}_i^2$
X_1	**0.884**	0.136	0.56	-0.113	0.16	0.167	**0.857**	0.246	-0.138	0.16
X_2	**0.631**	0.194	<u>0.515</u>	-0.006	0.30	0.240	0.477	**0.580**	0.011	0.38
X_3	0.245	**0.825**	0.223	-0.148	0.19	**0.966**	0.154	0.200	-0.058	0.00
X_4	0.239	0.150	**0.750**	0.076	0.35	0.242	0.173	**0.632**	0.113	0.50
X_5	**0.797**	0.075	0.102	0.468	0.13	0.055	**0.709**	0.236	0.330	0.33
X_6	0.404	0.153	**0.635**	-0.170	0.38	0.205	0.261	**0.589**	-0.071	0.54
X_7	0.186	**0.814**	0.147	-0.079	0.28	**0.697**	0.133	0.180	-0.009	0.46
X_8	-0.036	0.176	**0.762**	0.217	0.34	0.137	0.078	**0.513**	0.116	0.70
X_9	-0.048	**0.735**	0.110	0.141	0.43	<u>0.416</u>	0.019	0.175	0.002	0.80
X_{10}	0.045	-0.041	0.112	**0.934**	0.11	-0.055	0.056	0.113	**0.990**	0.00
Toplam örneklem varyansının birikimli açıklama oranı	0.21	0.42	0.61	0.73		0.18	0.34	0.50	0.61	

Her iki yöntem için faktör 1 ve faktör 2 ağırlık yükleri bakımından aynı sırada değildir.

Gülle atma (X_3), disk atma (X_7) ve cirit atma (X_9) bir faktör üzerinde daha yüksek ağırlığa sahiptir. Ve bu faktöre kol kuvveti faktörü adı verilebilir.

Yüksek atlama, 110 m engelli, sırıkla atlama ve uzun atlama değişkenlerinin ağırlıkları başka bir faktör üzeinde yüksektir. Bu faktöre de bacak kuvveti faktörü adı verilebilir.

100 m koşusu, 400 m koşusu ve uzun atlama (bazı uzunluklar için) üçüncü faktör üzerinde büyük ağırlığa sahiptir. Bu faktöre hızlı koşma faktörü adı verilebilir. Son olarak 1500 m koşusu daha yüksek ve 400 m koşusu daha az ağırlıklarla 4. Faktörde yer almaktadırlar. Bu faktöre de mukavemet koşu (uzun mesafeli koşu, mukavemet : direnç, dayanıklılık) faktörü adı verilebilir.

Örnek 17 : Hisse senedi verileri için en küçük kareler yöntemiyle hesaplanan faktör değerlerini bulunuz.

Çözüm 17:

R matrisinden en çok olabilirlik çözüm yöntemiyle elde edilen tahmini döndürülmüş faktör ağırlıkları ve özel varyanslar :

$$\hat{L}^* = \begin{bmatrix} 0.601 & 0.377 \\ 0.850 & 0.164 \\ 0.643 & 0.335 \\ 0.365 & 0.507 \\ 0.208 & 0.883 \end{bmatrix} \text{ ve } \hat{\Psi} = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.61 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.18 \end{bmatrix}$$

Standartlaştırılmış gözlemler vektörü :

$$\underset{\sim}{z}' = \begin{bmatrix} 0.50 & -1.40 & -0.20 & -0.70 & 1.40 \end{bmatrix}$$

Standartlaştırılmış gözlemler vektörü 1 ve 2. Faktörler üzerindeki faktör değerleri:

$$\hat{f} = \left(\hat{L}_Z^{*'} \hat{\Psi}^{-1} \hat{L}_Z^{*}\right)^{-1} \hat{L}_Z^{*'} \hat{\Psi}^{-1} \underset{\sim}{z} = \begin{bmatrix} -1.8 \\ 2.0 \end{bmatrix}$$

Faktör değerleri, bir faktör üzerinde ağırlığı büyük (0.4'den büyük) olan değişkenleri gruplandırır. Faktör 1 için değerler ağırlıkların işaretine göre birleştirilmiş gruptaki değişkenlerin gözlem değerlerinin (standartlaştırılmış) toplamıyla elde edilir. Faktör 2 için faktör değerleri, 2. Faktör üzerindeki büyük ağırlıklar ile ilişkili değişkenlerin standartlaştırılmış gözlemlerinin toplamıdır.

Örnek 18: Hisse senedi verileri için temel bileşenler çözüm yöntemiyle elde edilen faktör ağırlıklarını kullanarak faktör analizi gruplarından faktör değerlerini elde ediniz.

Çözüm 18:

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} 0.784 & -0.216 \\ 0.773 & -0.458 \\ 0.795 & -0.234 \\ 0.712 & 0.473 \\ 0.712 & 0.524 \end{bmatrix}$$

olup buradan döndürülmüş ağırlıklar matrisi

$$\tilde{L}^* = \tilde{L}T = \begin{bmatrix} 0.746 & 0.323 \\ 0.889 & 0.128 \\ 0.766 & 0.316 \\ 0.258 & 0.815 \\ 0.226 & 0.854 \end{bmatrix}$$

Böylece $\tilde{L}$ dan elde edilen faktör değerleri :

$$\hat{f}_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$
$$\hat{f}_2 = x_4 + x_5 - x_2$$

iken $\tilde{L}^*$ dan elde edilen faktör değerleri :

$$\hat{f}_1 = x_1 + x_2 + x_3$$
$$\hat{f}_2 = x_4 + x_5$$

biçiminde elde edilir.