BÖLÜM 7
Elektrodinamik

Doç. Dr. Fulya Bağcı

Ankara Üniversitesi,

Fizik Mühendisliği Bölümü

7.3.3 Maxwell Denklemleri, 7.3.4 Magnetik Yük, 7.3.5 Madde İçinde Maxwell Denklemleri, 7.3.6. Sınır Koşulları

Bu ders sunumu hazırlanırken aşağıdaki kaynak kullanılmıştır:
Elektromagnetik Teori, David J. Griffiths, Gazi Kitabevi (Çeviri: Prof. Dr. Basri Ünal)

7.3.3 Maxwell Denklemleri

- (i) $\nabla . \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $(Gauss\ yasası)$
- (ii) $\nabla . \boldsymbol{B} = 0$
- (iii) $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ (Faraday yasası)
- (iv) $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ (Maxwell düzeltmeli Ampere yasası)
- Kuvvet yasası $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\vartheta} \times \boldsymbol{B})$

ile birlikte onlar klasik elektrodinamiğin tüm kuramsal içeriğini özetler.

- Yükün korunumunun matematiksel ifadesi olan $\nabla . \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ süreklilik denklemi bile no (iv)'e diverjans uygulanarak Maxwell denklemlerinden türetilebilir.

- Elektrik alanlar yükler ve değişen magnetik alanlar tarafından üretilebilir.
- Magnetik alanlar akımlar veya değişen elektrik alanlar ile üretilebilir.
- Maxwell denklemleri size yüklerin alanları nasıl oluşturduğunu, kuvvet yasası ise alanların yükleri nasıl etkilediklerini belirtir.
- Alanlar (E ve B) sol tarafta, kaynaklar (ρ ve J) sağ tarafta olmak üzere Maxwell denklemleri:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)}\ \nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{1}{\epsilon_0}\rho, & \text{(iii)}\ \nabla\times\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\mathbf{0}, \\ \text{(ii)}\ \nabla\cdot\mathbf{B}=0, & \text{(iv)}\ \nabla\times\mathbf{B}-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\mu_0\mathbf{J}, \end{array}\right\} \qquad (7.43)$$

7.3.4 Magnetik Yük

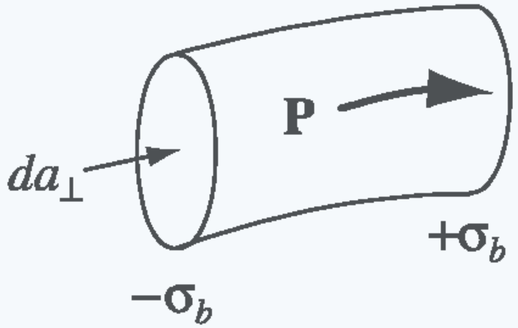
- Maxwell denklemleri ile ilgili hoş bir simetri ρ ve J'nin yok olduğu serbest uzayda dikkat çekicidir.
- (i) $\nabla . \boldsymbol{E} = 0 \ (Gauss\ yasası)$ (ii) $\nabla . \boldsymbol{B} = 0$
- (iii) $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ (Faraday yasası) (iv) $\nabla \times \boldsymbol{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$
- E'yi B ile B'yi de - $\varepsilon_0 \mu_0 E$ ile değiştirirseniz 1. denklem çifti 2. çifte dönüşür veya tersi de doğrudur. E ve B arasındaki bu simetri Gauss yasasındaki yük terimi ve Ampere yasasındaki akım terimi tarafından bozulur.

- Şöyle yazsaydık ne olurdu?
- i) $\nabla . \boldsymbol{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$ (Gauss yasası)
- (ii) $\nabla . \boldsymbol{B} = \mu_0 \rho_m$
- (iii) $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \boldsymbol{J}_m - \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ (Faraday yasası)
- (iv) $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}_e + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$
- Bu durumda ρ_e elektrik, ρ_m magnetik yük yoğunluğunu temsil ederdi. J_m magnetik yükün, J_e elektrik yükün akımı olurdu. Her iki yük de korunurdu. $\nabla . \boldsymbol{J}_e = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t}, \nabla . \boldsymbol{J}_m = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t}$
- Büyük uğraşlı araştırmalara karşın magnetik yük bulunamamıştır. Bildiğimiz kadarı ile ρ_m her yerde sıfırdır. B alanı E alanı ile eşit haklara sahip değildir. E için durağan bir kaynak olan elektrik yükleri vardır fakat B için yoktur. Magnetik dipoller akım halkalarından oluşur, kuzey ve güney kutuplarından değil.

7.3.5 Madde İçinde Maxwell Denklemleri

- Elektrik ve magnetik kutuplanmaya uğramış malzemeler ile çalışırken Maxwell denklemlerini yazmanın daha uygun bir yolu vardır. Çünkü kutuplanmış malzeme içinde üzerinde doğrudan bir kontrol olanağımız olmayan bağlı yük birikmeleri ve akım bulunacaktır. Maxwell denklemlerini yalnızca doğrudan kontrol ettiğimiz kaynaklara serbest yüklerle akımlara açıkça atıf yapacak biçimde yeniden formüllendirelim.
- Daha önce durgun halde bir ***P*** kutuplanmasının bir
- $\rho_b = -\nabla . \boldsymbol{P}$ (4.12)

  bağlı yükünü oluşturduğunu öğrenmiştik.

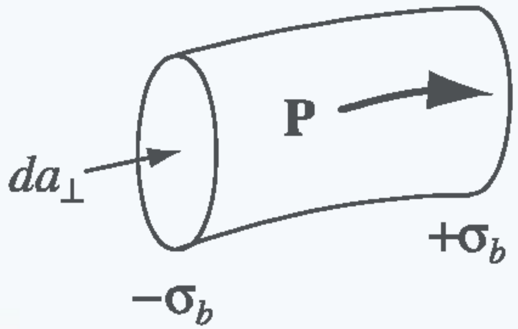


- Bunun gibi bir M magnetik kutuplanması (mıknatıslanma) bir
- $\boldsymbol{J}_b = -\nabla . \boldsymbol{M}$

  bağlı akımını doğurur.

- Durgun olmayan halde düşünülmesi gereken yalnızca bir yeni özellik vardır. Elektrik kutuplanmadaki herhangi bir değişme bir bağlı yük akışını ilgilendirir ($\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{P}}$) ve bu akımın toplam akıma katılması gereklidir. Küçük bir kutuplanmış malzeme topağını incelediğimizi varsayalım. Kutuplanma bir uçta $\sigma_b = P$ kadar bir yük yoğunluğu ve diğer uçta da $-\sigma_b$ kadar bir yük yoğunluğu oluşmasına sebep olur (Denk 4.11). Şimdi P bir miktar artarsa buna bağlı olarak her bir uçtaki yük de artar ve

$$dI = \frac{\partial \sigma_b}{\partial t} da_\perp = \frac{\partial P}{\partial t} da_\perp$$



tutarında bir net akım verir.

- Bu sebeple akım yoğunluğu şu şekilde verilir:
- $\boldsymbol{J}_p = \frac{\partial P}{\partial t} \quad (7.48)$
- Bu kutuplanma akımının bağlı akımıyla hiçbir ilgisi yoktur. Malzemenin kutuplanması ile ilişkilidir ve elektronların spinini ve yörüngesel hareketini ilgilendirmez. J_p elektrik kutuplanma değiştiğinde yükün doğrusal hareketinin bir sonucudur. P sağa doğru yönelmiş ise ve artıyorsa o zaman her bir pozitif yük birazcık sağa, her bir negatif yükse birazcık sola doğru hareket eder. Birikimli etki J_p kutuplanma akımıdır.
- Bu bağlamda Denk.7.48'in süreklilik denklemi ile tutarlı olduğunu doğrulayalım:

- $\nabla . \boldsymbol{J}_p = \nabla . \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla . \boldsymbol{P}) = -\frac{\partial \rho_b}{\partial t}$

Evet, süreklilik denklemini sağlamaktadır. Gerçekte bağlı yük korunumunu açıklamak için $\boldsymbol{J}_p$ zorunludur. Bu arada değişen bir mıknatıslanma az öncekine benzer bir yük toplanması veya akıma yol açmaz. Bağlı akım $\boldsymbol{J_b} = \nabla \times \boldsymbol{M}, M$'deki değişikliklere tepki olarak değişir.

Bütün bunların ışığında toplam yük yoğunluğu iki parçaya ayrılabilir:

- $\rho = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \nabla . \boldsymbol{P}$

Akım yoğunluğu da üç kısma ayrılabilir:

- $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_f + \boldsymbol{J}_b + \boldsymbol{J}_P = \boldsymbol{J}_f + \nabla \times \boldsymbol{M} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$
- Gauss yasası şimdi
- $\nabla \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f - \nabla . \boldsymbol{P})$

  şeklinde veya
- $\nabla \boldsymbol{D} = \rho_f$

  olarak yazılabilir. Burada $\boldsymbol{D}$ durgun haldeki gibi $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ ile verilir.

- Bu arada Ampere yasası Maxwell terimi ile birlikte şu hale gelir:
- $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{J}_f + \nabla \times \boldsymbol{M} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \, \varepsilon_0 \, \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$
- veya bu terimi şu şekilde yazabiliriz:
- $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_f + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$
- Burada önceden olduğu gibi
- $\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B} - \boldsymbol{M}$ (7.54)
- Faraday yasası ve $\nabla \boldsymbol{B} = 0$ bizim yükü ve akımı serbest ve bağlı akımlara ayırmamızdan etkilenmezler, çünkü onlar ρ veya J’yi içermezler.

- O halde serbest yükler ve akımlar cinsinden Maxwell denklemleri
- i) $\nabla . \boldsymbol{D} = \rho_f$ (Gauss yasası)
- (ii) $\nabla . \boldsymbol{B} = 0$
- (iii) $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ (Faraday yasası) (7.55)
- (iv) $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_f + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$
- şeklinde yazılabilir. Bazı kişiler bunları gerçek Maxwell denklemleri olarak kabul ederler, fakat onlar hiçbir şekilde Denk.(7.39)'dan daha genel değildirler. Onlar yalnızca yükün ve akımın serbest ve serbest olmayan diye uygun biçimde bölünmesini yansıtırlar. Onlar karma gösterim bulundurma eksisine sahiptir çünkü E ve D'nin her ikisini ve B ve H'nin her ikisini birden içerirler. Bu yüzden onların D ve H'yi E ve B cinsinden veren uygun yapıcı bağıntılarla desteklenmesi gerekir.

- Doğrusal ortamlar için
- $\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H}$ (7.56)
- geçerlidir. Böylece
- $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu} \boldsymbol{B}$ (7.57)
- Burada $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$ ve $\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$ ‘dir.
- Sırası gelmişken $\boldsymbol{D}$’nin elektrik yer değiştirme diye adlandırıldığını anımsayacaksınız. (iv) Ampere/Maxwell denklemlerindeki ikinci terimin yer değiştirme akımı diye adlandırılması işte bu yüzdendir. Böylece $\boldsymbol{J}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ ‘nin genelleştirilmiş hali şu şekli alır:
- $\boldsymbol{J}_d = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ (7.58)

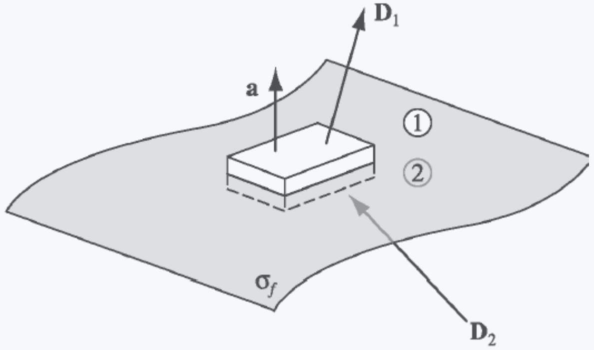
7.3.6 Sınır Koşulları

- Genelde $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ ve $\boldsymbol{H}$ alanları iki farklı ortam arasındaki sınırda veya σ yoğunluğu, $\boldsymbol{K}$ akım yoğunluğu taşıyan bir yüzeyde süreksiz olacaktır. Bu süreksizliklerin kesin şekli Maxwell denklemlerinin integral şekillerinden çıkarılabilir.
- (i) $\oint_S \boldsymbol{D} \,.\, da = Q_{iç}$
- (ii) $\oint_S \boldsymbol{B} \,.\, da = 0$

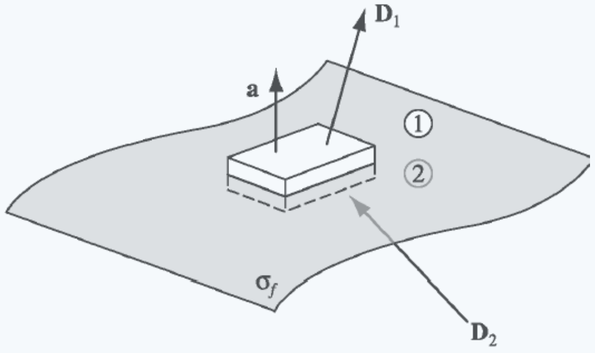
kapalı bir S yüzeyi üzerinden

- (iii) $\int_p \boldsymbol{E}\, dl = -\frac{d}{dt} \oint_S \boldsymbol{B} \,.\, da$
- (iv) $\int_p \boldsymbol{H}\, dl = I_{f,iç} - \frac{d}{dt} \oint_S \boldsymbol{D} \,.\, da$

kapalı P halkası ile sınırlanmış her S yüzeyi için

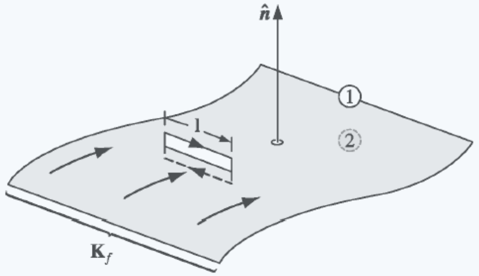


- Sınırın her iki tarafına ancak hafifçe uzanan yonga inceliğindeki minik bir hap kutusuna (i)'yi uygulayarak şunu buluruz (Şek. 7.46):
- $D_1 a - D_2 a = \sigma_f a$
- (a için pozitif yön 2'den 1'e doğrudur. Kalınlık sıfıra gittiğinde yonganın kenarı hiçbir katkı sunmaz. Aynı zamanda hacim yük yoğunluğu da katkı vermez. Böylece D'nin ara yüzeyi dik olan bileşeni şu miktar kadar süreksizdir.



- $D_1^{\perp} - D_2^{\perp} = \sigma_f$ (7.59)
- Denklem (ii)'ye uygulanan özdeş akıl yürütme
- $B_1^{\perp} - B_2^{\perp} = 0$ (7.60)

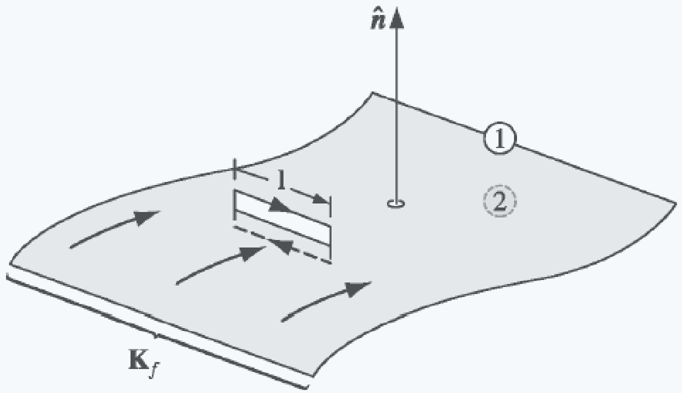
sonucunu verir. (iii)'ye dönersek yüzeyi kavrayan çok ince bir Amper halkası



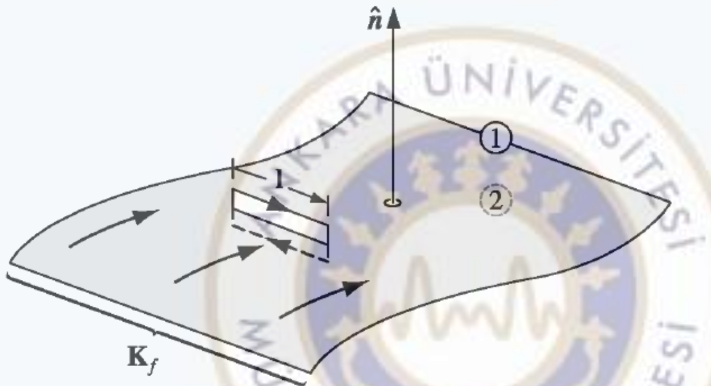
- $\boldsymbol{E}_1 l - \boldsymbol{E}_2 l = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint_S \boldsymbol{B} \,.\, da$

sonucunu verir. Fakat halkanın genişliğinin sıfıra gittiği limitte akı kaybolur.

- Bu yüzden
- $\boldsymbol{E}_1^{\parallel} - \boldsymbol{E}_2^{\parallel} = 0$ (7.61)
- Yani E'nin yüzeye paralel olan bileşenleri sınırdan geçişte süreklidir. Buna ilaveten (iv) şu sonucu andırır:
- $\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{l} - \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{l} = I_{f,iç}$
- Burada $I_{f,iç}$ Amper halkasından geçen serbest akımdır. Hiçbir hacim akım yoğunluğu (sonsuz küçük genişlik limitinde) bir katkıda bulunmayacaktır, fakat bir yüzey akımı katkı getirebilir. Gerçekte $\hat{n}$ ara yüzeye dik (2'den 1'e doğru yönelmiş) bir birim vektörse böylece $(\hat{n} \times l)$ Amper halkasına diktir. O zaman



$$I_{f_{\text{enc}}} = \mathbf{K}_f \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{l}) = (\mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{l}$$



- Buradan
- $\boldsymbol{H}_1^{\parallel} - \boldsymbol{H}_2^{\parallel} = \boldsymbol{K}_f \times \widehat{\boldsymbol{n}}$ (7.62)
- O halde H'nin paralel bileşenleri serbest yüzey akımı yoğunluğu ile orantılı bir miktar kadar süreksizdir.

- Denk. 7.59-7.62 elektrodinamik için genel sınır koşullarıdır. Doğrusal ortamlar için bu koşullar tek başına E ve B cinsinden ifade edilebilirler:
- (i) $\varepsilon_1 E_1^{\perp} - \varepsilon_2 E_2^{\perp} = \sigma_f$ (iii) $E_1^{\parallel} - E_2^{\parallel} = 0$
- (ii) $B_1^{\perp} - B_2^{\perp} = 0$ (iv) $\frac{1}{\mu_1} B_1^{\parallel} - \frac{1}{\mu_1} B_2^{\parallel} = K_f \times \hat{n}$ (7.63)
- Özellikle ara yüzeyde bir serbest yük veya serbest akım yoksa o zaman
- (i) $\varepsilon_1 E_1^{\perp} - \varepsilon_2 E_2^{\perp} = 0$ (iii) $E_1^{\parallel} - E_2^{\parallel} = 0$
- (ii) $B_1^{\perp} - B_2^{\perp} = 0$ (iv) $\frac{1}{\mu_1} B_1^{\parallel} - \frac{1}{\mu_1} B_2^{\parallel} = 0$ (7.64)
- Bölüm 9'da göreceğimiz gibi bu denklemler yansıma ve kırılmanın teorisi için temeldirler.