BÖLÜM 8
Korunum Yasaları

Doç. Dr. Fulya Bağcı

Ankara Üniversitesi,

Fizik Mühendisliği Bölümü

8.1.1 Süreklilik denklemi, 8.1.2 Poynting teoremi

Bu ders sunumu hazırlanırken aşağıdaki kaynak kullanılmıştır:
Elektromagnetik Teori, David J. Griffiths, Gazi Kitabevi (Çeviri: Prof. Dr. Basri Ünal)

8.1 Yük ve Enerji
8.1.1 Süreklilik Denklemi

- Bu bölümde elektrodinamikteki enerji, momentum ve açısal momentumun korunumu incelenecektir.
- Önce yükün korunumu ile başlayalım. Biçimsel olarak bir V hacmi içindeki yük

$$Q(t) = \int_V \rho(r,t)d\tau$$

ve S sınırından akan akım $\oint_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{a}$ olur.

Böylece yerel yük korunumu

$\frac{dQ}{dt} = -\oint_S \boldsymbol{J} d\boldsymbol{a}$ olduğunu söyler.

$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = -\int_V \nabla \boldsymbol{J}\, d\tau$ buluruz.

- Bu her hacim için doğru olduğundan sonuçta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \boldsymbol{J} \text{ elde ederiz.}$$

- Bu süreklilik denklemidir. Yerel yük korunumunun matematiksel ifadesidir.
- Bu süreklilik denklemi Maxwell denklemlerinden türetilebilir.
- Yükün korunumu bağımsız bir kabul olmayıp elektrodinamik yasalarının bir sonucudur.
- Bu bölümün amacı enerji korunumu ve momentum korunumu için karşı gelen denklemleri oluşturmaktır.

8.1.2 Poynting Teoremi

Bölüm 2 ’de bir yük dağılımını (benzer yüklerin Coulomb itmesine karşı) bir araya getirmek için gerekli işin (Denk. 2.45)

$$W_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2\, d\tau$$

olduğunu görmüştük, burada $\boldsymbol{E}$ bileşke elektrik alandır. Bunun gibi, akımları akar hale getirmek için (zıt emk’ya karşı) yapılması gereken iş (Denk 7.34)

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2\, d\tau$$

ile verilir.

Burada $\boldsymbol{B}$ yine bileşke magnetik alandır

- Bu, elektromagnetik alanlarda depolanan toplam enerjinin

$$U_{em} = \frac{1}{2}\int \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right) d\tau \qquad (8.5)$$

olması gerektiğini önerir.

- Denklem (8.5)'i elektrodinamikteki enerji korunumu bağlamında daha genel olarak türetelim.

- t anında E ve B alanlarını oluşturmuş olan bir yük ve akım şekillenimine sahip olduğumuzu varsayalım. Daha sonraki dt anında, yükler bir miktar etrafa hareket ederler. Bu yükler üzerine etkiyen elektromagnetik kuvvetler tarafından dt aralığında ne kadar dW işi yapılmıştır?
- Lorentz kuvveti yasasına göre bir q yükü üzerine yapılan iş

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{dt} = q\boldsymbol{E}.\boldsymbol{v}\,\mathrm{dt}$$

ile verilir.

Burada $q = \rho d\tau$ ve $\rho v = J$ dir.

- Bir V hacmi içindeki tüm yüklerin üzerine işin yapılma hızı şöyle verilir:

$$\frac{\mathrm{dW}}{\mathrm{dt}} = \int_V (\boldsymbol{EJ})\, d\tau$$

- Besbelli, $\boldsymbol{E}.\boldsymbol{J}$ birim hacimde birim zamanda yapılan iştir yani, birim hacme aktarılan güçtür.

- $\boldsymbol{J}$ yi elemek üzere Ampere-Maxwell yasasını kullanarak, bu niceliği tek başına alanlar cinsinden ifade edebiliriz:

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{J} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}(\nabla \times \boldsymbol{B}) - \varepsilon_0 \boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

- Çarpım kuralı (6)

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E}(\nabla \times \boldsymbol{B})$$

Faraday yasasından $(\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B} \,/\, \partial t)$ faydalanarak, şunu buluruz:

$$\boldsymbol{E}(\nabla \times \boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})$$

Bu arada $\boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{B}^2)$ ve $\boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}^2)$

olduğundan, sonuçta şunu elde ederiz:

- $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) - \frac{1}{\mu_0}\nabla.\left(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}\right)$

$$\frac{\mathrm{dW}}{\mathrm{dt}} = \int_V (\boldsymbol{E}\boldsymbol{J})\, d\tau$$

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) - \frac{1}{\mu_0}\nabla.\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\right)$$

İkinci terime diverjans teoremini uygulayarak

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)\mathrm{d}\tau - \frac{1}{\mu_0}\oint(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\,\mathrm{d}a$$

Buluruz. Burada S, V'yi sınırlayan yüzeydir. Bu Poynting teoremidir.
O **elektrodinamiğin "iş-enerji teoremi**dir.
Sağ taraftaki birinci integral alanlarda depo edilen toplam enerjidir, U_{em} ' dir (Denk 8.5).
İkinci terim, açıkça V hacminden dışarıya doğru, hacmi sınırlayan yüzeyin arasından, elektromagnetik alanlar tarafından enerjinin taşınma hızını temsil etmektedir.

Poynting teoremi, elektromagnetik kuvvet tarafından yüklerin üzerine yapılan işin alanlarda depolanan enerjideki azalma eksi yüzey arasından dışarıya akan enerji olduğunu söyler.

- Birim zamanda, birim alandan alanlar tarafından aktarılan enerjiye Poynting vektörü adı verilir:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})$$

- Özel olarak, $\boldsymbol{S}.d\boldsymbol{a}$ birim zamanda sonsuz küçük da yüzeyinden geçen enerjidir ($\boldsymbol{S}.d\boldsymbol{a}$'ya enerji akısı denilebilir). Böyle ise S enerji akısı yoğunluğu olur.

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\mathrm{d}U_{em}}{\mathrm{d}t} - \oint_S \boldsymbol{S} \cdot d\boldsymbol{a}$$

- Yükler üzerine yapılan iş W onların mekanik enerjisini (potansiyel veya her neyse) artıracaktır.
- u_{mek} ile mekanik enerji yoğunluğunu gösterirsek,

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V u_{mek}\,\mathrm{d}\tau$$

Alanların enerji yoğunluğunu u_{em} ile gösterdiğimiz takdirde ise,

$$u_{em} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right)$$

olur. O zaman

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V (u_{mek} + u_{em})\ \mathrm{d}\tau = -\int_s \boldsymbol{S}\, d\boldsymbol{a} = -\int_V (\nabla.\boldsymbol{S})\,\mathrm{d}\tau$$

ve buradan

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V (u_{mek} + u_{em})\ \mathrm{d}\tau = -\nabla.\boldsymbol{S}$$

Bu Poynting teoreminin diferansiyel şeklidir.

- Poynting teoreminin diferansiyel şeklini yük korunumunu ifade eden süreklilik denklemiyle karşılaştırınız:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla.\boldsymbol{J}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V (u_{mek} + u_{em})\ \mathrm{d}\tau = -\nabla.\boldsymbol{S}$$

- Yük yoğunluğu, enerji yoğunluğu (mekanik + elektromagnetik) ile yer değiştirir ve akım yoğunluğu da Poynting vektörüyle yer değiştirir Sonuncusu, J'nin yük akışını anlatmasına tamamen benzer şekilde, enerji akışını temsil etmektedir.