3. IŞINIM YASALARI(devamı)

4. Eski Kuramlara Göre Işınım Formülleri :

Wien kayma yasasından çıkarılan $y = f(x)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada

$x = \lambda T$, $y = S_\lambda / T^5$ idi. Buradaki S_λ fonksiyonu :

$S_\lambda / T^5 = f(\lambda T) \Rightarrow S_\lambda = T^5 f(x) = T^5 f(\lambda,T)$

Bunu

$S_\lambda = [(\lambda T)^5 / \lambda^5]\ f(\lambda,T)$ şeklinde yazalım. Eğer $(\lambda T)^5 f(\lambda,T) = F(\lambda,T)$ dersek,

$S_\lambda = (1 / \lambda^5)\ F(\lambda,T)$ elde edilir. Burada ortaya çıkan $F(\lambda,T)$ fonksiyonunu henüz bilmiyoruz.

3. IŞINIM YASALARI(devamı)

Bu fonksiyonun bulunması için **ilk çaba** **W. Wien** tarafından gösterilmiş ve **özel kuramlara** dayanarak yalnız kısa dalgaboylarına uygun düşen

$$F(\lambda, T) = \exp(-\mathbf{c_2} / \lambda T)$$

ifadesi bulunmuştur. Buna göre,

$$S_\lambda = (1 / \lambda^5) \exp(-\mathbf{c_2} / \lambda T) \quad \text{ve,}$$

$$u_\lambda = (\mathbf{c_1} / \lambda^5) \exp(-\mathbf{c_2} / \lambda T)$$

elde edilmiştir. Buradaki $\mathbf{c_1}$ ve $\mathbf{c_2}$ katsayıları **deneyle bulunacak sabitlerdir**.

3. IŞINIM YASALARI(devamı)

İkinci deneme Lord J.W. Rayleigh ve Sir J.H. Jeans tarafından **yapılmıştır**. Onlar daha değişik bir yoldan istenilen bir amaca yaklaşmışlar ve böylece **kuantum kuramına** ilk yolu açmışlar. **Rayleigh-Jeans kuramı**, **kovuk ışınımını** bir titreşim hareketine benzetir. **Bundan yararlanarak**, birim oylum içinde belirli bir dalgaboyu aralığındaki **serbestlik derecesi** bulunur ve **kinetik gaz kuramından** da belli bir T sıcaklığı için, **her serbestlik derecesine isabet eden** ortalama erke **hesaplanır**. Böylece dalgaboyuna ve sıcaklığa **bağlı** bir yoğunluk ifadesine varılmış olur.

3. IŞINIM YASALARI(devamı)

Sebestlik Derecesi (S.D) : Hareketli bir cismin kaç türlü hareket edebileceğinin sayısıdır.

1^{o}) Bir kanal içinde sadece bir kayma hareketi yapan bir cismin S.D = 1 dir.

2^{o}) Düzlemde sadece kayma hareketi yapan bir cismin S.D = 2 dir.

3^{o}) Düzlemde hem kayma ve hem de yuvarlanma hareketi yapan bir cismin S.D = 3 tür.

4^{o}) Uzayda serbest dolaşan cismin (gaz molekülleri gibi) dönme hareketi yoksa S.D = 3 tür.

5^{o}) Uzayda cismin dönme hareketi de varsa, S.D = 4 tür.

3. IŞINIM YASALARI(devamı)

Kinetik gaz kuramından,

$E_K = (1/2)\, m\, v_o^2$, $v_o^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$

Şimdi gaz moleküllerinin **her bir serbestlik derecesine düşen** ortalama erkeyi hesaplayalım. **Kinetik gaz kuramına göre**, gaz moleküllerinin ortalama hızı,

$$v_o^2 = 3\, RT / M$$

idi. Burada, M: molekülün kütlesi, T: sıcaklık' tır.

R ise molekülün **gaz sabitidir** (=8.3143 x 10^7 erg K^{-1} mol^{-1}).

Tek molekülün kinetik erkesi: $E_K = (1/2)\, m\, v_o^2$

$E_K = (1/2)\, \mathbf{m}\, (3\, \mathbf{R}T / M) \Rightarrow E_K = (3/2)\, (m / M)\, \mathbf{R}T$

Burada **m**, tek bir gaz molekülünün kütlesidir.

Fizikte M / **m** = N_A :Bir **mol oylumdaki molekül sayısı**

(= Avogadro sayısı)

ve **R** / N_A = **k** : **Boltzmann sabiti**' dir. O zaman,

$E_K = (3/2)\, (\mathbf{R} / N_A)\, T$ ve $E_{K\,(ort)} = (3/2)\, kT$ dir.

3. IŞINIM YASALARI(devamı)

O halde T sıcaklığındaki bir gazın her bir molekülünün ortalama kinetik erkesi,

$$E_K\,(ort) = (3 / 2)\,kT$$

dir. Bu erke **S.D = 3** e karşılık erke, yani **bütün serbestlik derecelerini içine alan** toplam erkedir.

S.D =1 için $E_K = (1 / 2)\,kT$

olacaktır. Yani **moleküllerin dönme hareketi yapmadıkları kabul edilirse**, **her bir serbestlik derecesine düşen** ortalama kinetik erke

$$E_K = (1 / 2)\,kT$$

olacaktır. **Toplam erke**,

$$\mathbf{E} = E_K + E_P$$

3. IŞINIM YASALARI(devamı)

Artık **titreşim hareketlerine** geçebiliriz. Herhangi bir Statik Harmonik Hareket (**Durgun Uyumlu Devinim**) için ;

E_K (ort) = E_P (ort)

dir. O zaman böyle bir harekette her bir **S.D**'ne düşen toplam erke,

$E = E_K + E_P = (1 / 2)\, kT + (1 / 2)\, kT$

$E = k\, T$

olacaktır. Öte yandan, kapalı bir kap içindeki **duran ses dalgalarının** birim oylumda ve λ ile $\lambda + d\lambda$ dalgaboyu aralığındaki serbestlik derecesi $\mathbf{dn_s}$;

$\mathbf{dn_s} = 4\pi\, d\lambda / \lambda^4$ dir. Bu durumda,

$E_{ses} = (4\pi\, d\lambda / \lambda^4)\, kT$

olur. **Ses dalgalarının boyuna**, elektromanyetik dalgaların da enine **titreşim hareketleri** olduğu biliniyor. Enine dalgalar, birbirinden farklı **iki ayrı düzlemde** (uçlaşma düzlemleri) **titreşim** yapabilirler. Onun için, ışık dalgasının serbestlik derecesi **ses dalgasınınkinin iki katı**, yani

$dn_{ışık} = 8\pi\, d\lambda / \lambda^4$ olmalıdır. Bu durumda,

$E_{ışık} = (8\pi\, d\lambda / \lambda^4)\, kT$ dir.

3. IŞINIM YASALARI(devamı)

Buna göre T sıcaklığındaki bir ışınım kovuğunun λ ile $\lambda+d\lambda$ dalgaboyu aralığında birim oylumdaki ışınım yoğunluğu,

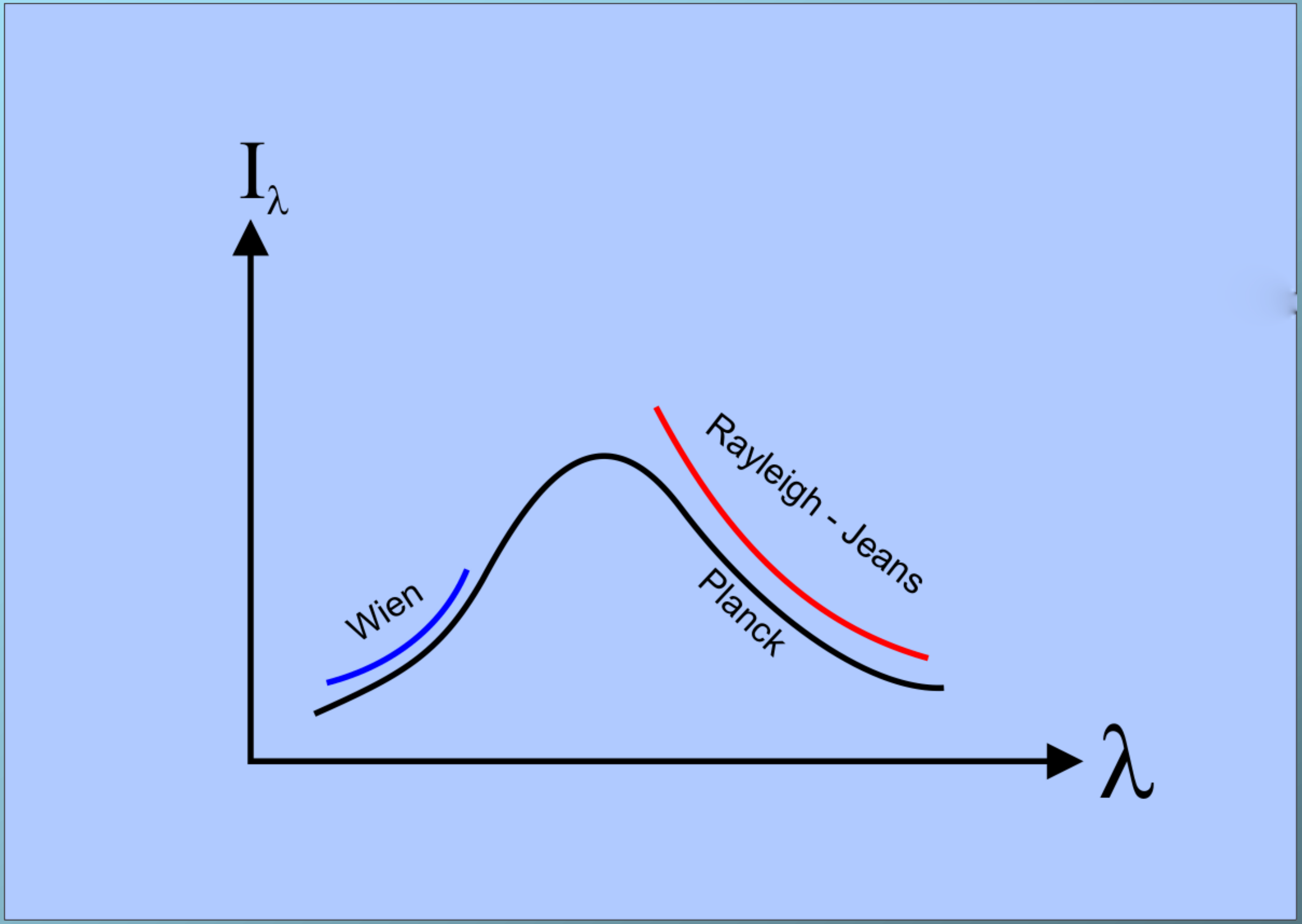
$$u_\lambda \, d\lambda = (8\pi \, d\lambda / \lambda^4) \, kT \Rightarrow u_\lambda = 8\pi \, k \, T \, \lambda^{-4}$$

olacaktır ki buna **Rayleigh - Jeans** formülü denir. Burada $u_\lambda = (\mathbf{c} / \lambda^2) \, u_\nu$ ve $\lambda = \mathbf{c} / \boldsymbol{\nu}$ konursa,

$$u_\nu = (8\pi \, k \, T / \mathbf{c}^3) \, \nu^2$$

elde edilir ki bu da **yoğunluğun frekansa** bağlı ifadesidir. Rayleigh – Jeans formülüne **göre çizilecek** "Renklere göre erke dağılımı"nın ancak uzun dalgaboyları için **deneylere uygun düştüğünü gösterir** (Şekil 31).

3. IŞINIM YASALARI(devamı)



Şekil 31. Wien, Rayleigh-Jeans ve Planck Işınım yasalarını temsili bir karşılaştırması

3. IŞINIM YASALARI(devamı)

Deneylerden bulunacak **eğriler** kısa dalgaboylarında **sıfıra yaklaşırken**, bağıntının verdiği eğri **asimtotik olarak yükselmektedir**. Bunun **nedeni serbestlik derecesinden** kaynaklanmaktadır. Çünkü $dn_{ışık}$ ile belirtilen **serbestlik derecesi** küçük λ lar için **çok büyüktür**. **Bu da deneylerle hiç bağdaşmıyor**. **Üstelik** ışınım erkesi **serbestlik derecelerine** göre **eşdeğerli dağılmış** olsa da kısa λ ların **serbestlik derecesinin** büyük olması **ısı dengesini bozucu nitelik** gösterir.

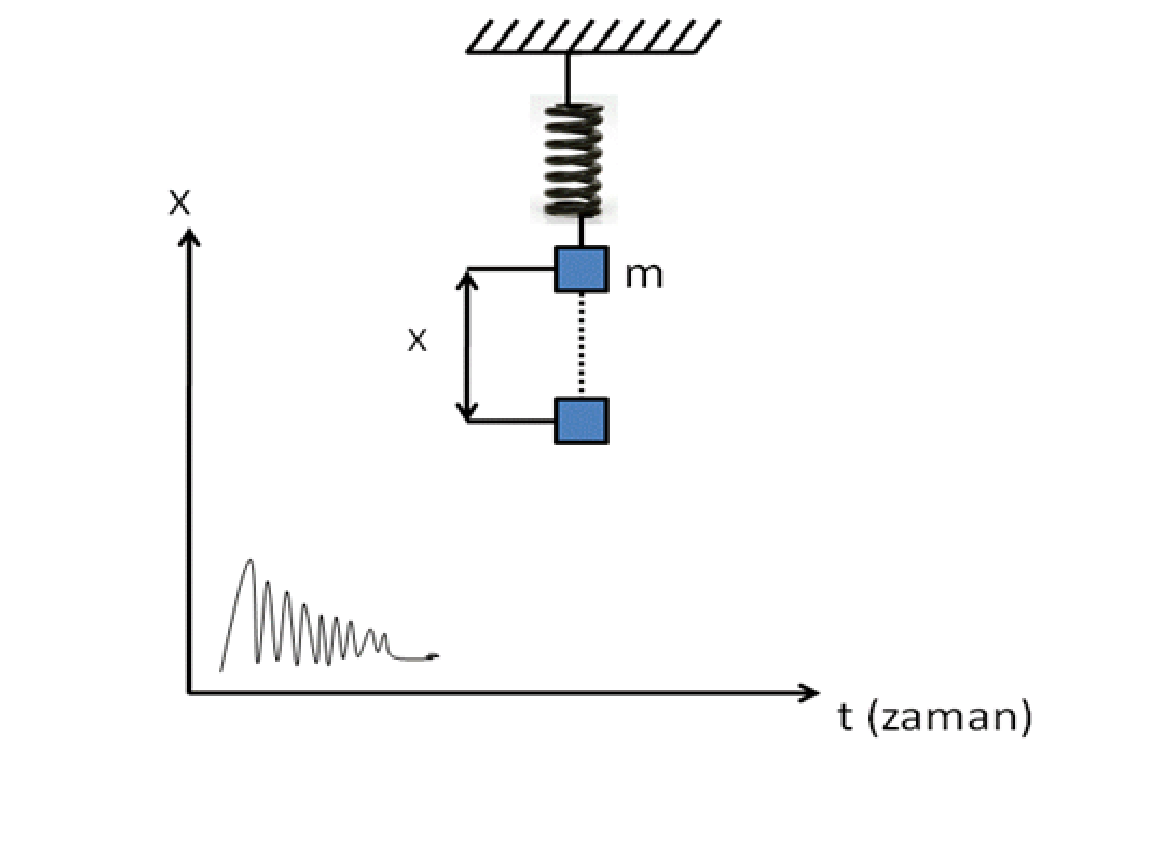
Özetle, gerek **Wien** ve gerekse **Rayleigh – Jeans** formüllerinin **deneylerle tam olarak bağdaşmadığı** bir gerçektir. Wien yasası kısa dalgaboylarında, Rayleigh – Jeans yasası da ancak uzun dalgaboylarında **gerçek değerlere** yaklaşmaktadırlar. **Bundan dolayı** her iki kuramın da kökten özürlü olduğu yargısına varılmış ve **böylece yepyeni bir kuram** geliştirilmiştir. O da **kuantum kuramıdır**.

3. IŞINIM YASALARI(devamı)

5. Kuantum Kuramı :

Alman fizikçilerden Max Planck, ışınım fonksiyonunu bulmak için **yepyeni bir yoldan** hareket ederek, ısı dengesinde bulunan **çok sayıdaki titreşimlere ilişkin** erke özelliklerinden ışınım erkesine geçmeyi başarmıştır. Bu yolda öne sürülen **düşünceler** ve **yapılan işlemlerin** hepsine birden "**Kuantum Kuramı**" denir.

Harmonik (uyumlu) Titreşim Hareketi :
Esnek **bir yaya asılı** bir cisim **denge durumundan uzaklaştırılıp** tekrar bırakılırsa, bu **cisim bir doğru boyunca** sallanır (Şekil **32**). Buna "Basit Harmonik Hareket" denir.
x: uzaklık (yol) ; t: zaman ; **K**: **dengeleyici kuvvet** olsun.



Şekil 32. Harmanik titreşim hareleti

3. IŞINIM YASALARI(devamı)

K / x = - β ⇒ **K** = - β x ;   β: orantı katsayısı

cismin kütlesi m ve b ivme olmak üzere ,

K = m b   ;   **K** = m $(d^2 x / dt^2)$

m kütleli cismin salındığı doğru x ekseni ve herhangi bir t anında **denge durumundan uzaklığı** da x olsun.

K = - β x ; β: yayın yapısına bağlı orantı katsayısıdır.

Buna göre **hareketin diferansiyel denklemi,**

$m\,(d^2 x / dt^2) = -\beta x$

$m\,(d^2 x / dt^2) + \beta x = 0 \quad \Rightarrow \quad (d^2 x / dt^2) + (\beta / m)\, x = 0 \qquad m \neq 0$

$\beta / m = \omega^2$ ise $\qquad (d^2 x / dt^2) + \omega^2 x = 0$

yazılabilir. Bu **denklemin genel çözümü** için;

$x = \exp(r\,t)$; r = sabit

biçiminde bir **çözüm** aranır.

3. IŞINIM YASALARI(devamı)

Bu çözüme göre,

$dx / dt = r \exp(r\,t)$ ve $d^2 x / dt^2 = r^2 \exp(r\,t)$

bunları yerine koyarsak,

$r^2 \exp(r\,t) + \omega^2 \exp(r\,t) = 0$

$(r^2 + \omega^2) \exp(r\,t) = 0$, $\exp(r\,t) \neq 0$

o zaman, $r^2 + \omega^2 = 0$ olmalı. Buradan,

$r^2 = -\omega^2 \Rightarrow r_{1,2} = (-1)^{1/2}\,\omega_{1,2}$

$r_1 = +\, i\omega$, $r_2 = -\, i\omega$

O zaman,

$x = \exp(r\,t) \Rightarrow x = \mathbf{C_1} \exp(i\omega t) + \mathbf{C_2} \exp(-i\omega t)$

Burada $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$ katsayılardır.

3. IŞINIM YASALARI(devamı)

$\exp(i\omega t) = \cos \omega t + i \sin \omega t$ **idi.**

$x = C_1 (\cos \omega t + i \sin \omega t) + C_2 (\cos \omega t - i \sin \omega t)$

olur. Bu da,

$x = (C_1 + C_2) \cos \omega t + i (C_1 - C_2) \sin \omega t$

$C_1 + C_2 = a$ ve $C_1 - C_2 = b$

olmak üzere **genel çözüm**,

$x = a \cos \omega t + i\, b \sin \omega t$

şeklinde elde edilir. Hareket **gerçek bir olaydır**. Onun için bu denklemdeki sanal kısım boşlanır. Bu nedenle **hareket denklemi**,

$x = a \cos \omega t$

olur. Burada **a**: **genlik**(en büyük uzanım), ω: açısal hız , x : yol ve t : zaman' dır.

3. IŞINIM YASALARI(devamı)

P = Dönem ise $\omega = 2\pi / P$ veya $P = 2\pi / \omega$

$1 / P = \nu$ = frekans , $\omega = 2\pi \nu$; $\nu = \omega / 2\pi$

$x = \mathbf{a} \cos \omega t$: Bu sonuca göre herhangi bir t anındaki hız,

$\mathbf{v} = dx / dt = - \mathbf{a}\, \omega \sin \omega t$

$\mathbf{v^2} = \mathbf{a^2}\, \omega^2 \sin^2 \omega t$

Kinetik erke; $E_K = (1 / 2)\, \mathbf{m}\, \mathbf{v^2}$

$E_K = (1 / 2)\, \mathbf{m}\, \mathbf{a^2}\, \omega^2 \sin^2 \omega t$

olur. Diğer taraftan, cismi denge durumuna zorlayan kuvvet $\mathbf{K} = - \beta x$ olduğuna göre,

Potansiyel erke;

$$E_P = - \int_{x=0}^{x} \mathbf{K}\, dx = + \int_{0}^{x} \beta x\, dx$$

$E_P = (1 / 2)\, \beta x^2$ olur. $x = \mathbf{a} \cos \omega t$ idi.

$E_P = (1 / 2)\, \beta\, a^2 \cos^2 \omega t$; $\beta / \mathbf{m} = \omega^2 \Rightarrow \beta = \mathbf{m}\, \omega^2$ ve

$E_P = (1 / 2)\, \mathbf{m}\, \omega^2 a^2 \cos^2 \omega t$ bulunur.

3. IŞINIM YASALARI(devamı)

Toplam erke;

$E = E_K + E_P$

$E = (1/2)\, \mathbf{m}\, \mathbf{a^2}\, \omega^2 \sin^2 \omega t + (1/2)\, \mathbf{m}\, \omega^2 a^2 \cos^2 \omega t$

$= (1/2)\, \mathbf{m}\, \mathbf{a^2}\, \omega^2 [\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t]$

$= (1/2)\, \mathbf{m}\, \mathbf{a^2}\, \omega^2$

bulunur. $\omega = 2\pi\nu$, $\omega^2 = 4\pi^2\nu^2$ olup frekansa **bağlı** toplam erke,

$E = 2\pi^2 \mathbf{a^2}\, \mathbf{m}\, \nu^2$

olur. Herhangi bir t anı için **dış bir etki yoksa** ν = **sabit** olur.

a = **sabit** ve **m** = **sabit**, dolayısıyla E = **sabit** olacaktır.

Buraya dek mekanikten bilinenlerdir. **Yeni yol** bundan sonra başlar.

Bilindiği üzere herhangi bir hareket için, **hareket miktarı** (momentum) :

$p = \mathbf{m\, v}$ dir. **v** = hız , **m** : kütle, p: momentum

Burada, **momentumun korunumu ilkesinden dolayı** hız yerine momentum yeğleniyor. Şöyle ki,

3. IŞINIM YASALARI(devamı)

$p = \mathbf{m}\,\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v} = p / \mathbf{m}$; $v^2 = p^2 / \mathbf{m}^2$

Kinetik erke; $E_K = (1 / 2)\,\mathbf{m}\,\mathbf{v}^2 = (1 / 2)\,\mathbf{m}\,(p^2 / \mathbf{m}^2)$

$$E_K = p^2 / 2\mathbf{m}$$

Potansiyel erke; $E_P = (1 / 2)\,\beta\,x^2$; $\beta = \mathbf{m}\,\omega^2$ idi

Toplam erke ; $E = (p^2 / 2\mathbf{m}) + (\beta / 2)\,x^2$ dir.

$$E = \frac{x^2}{2 / \beta} + \frac{p^2}{2\mathbf{m}} \qquad E \neq 0$$

Her iki yanı E ye bölersek,

$$\frac{x^2}{2E / \beta} + \frac{p^2}{2\mathbf{m}E} = 1 \qquad \text{.........(*)}$$

olur. Görüldüğü gibi E, x ve p ye bağlıdır. Bu denklem,

3. IŞINIM YASALARI(devamı)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gibi bir **elips** denklemidir.

$a = (2E / \beta)^{1/2}$, $b = (2\mathbf{m}E)^{1/2}$

olan bir **elips denklemi** ki **buna** "Erke elipsi" denir. Yani **hareket boyunca** (x, p) nin değişimleri **(*) elipsine** uygun olacak şekilde **birbirlerine bağlı** kalırlar. Belli bir E erkesi için **Elipsin alanı** : $\mathbf{A} = \pi ab$

$\mathbf{A} = \pi (2E / \beta)^{1/2} (2\mathbf{m}E)^{1/2} = \pi [(2E / \beta) (2\mathbf{m}E)]^{1/2}$

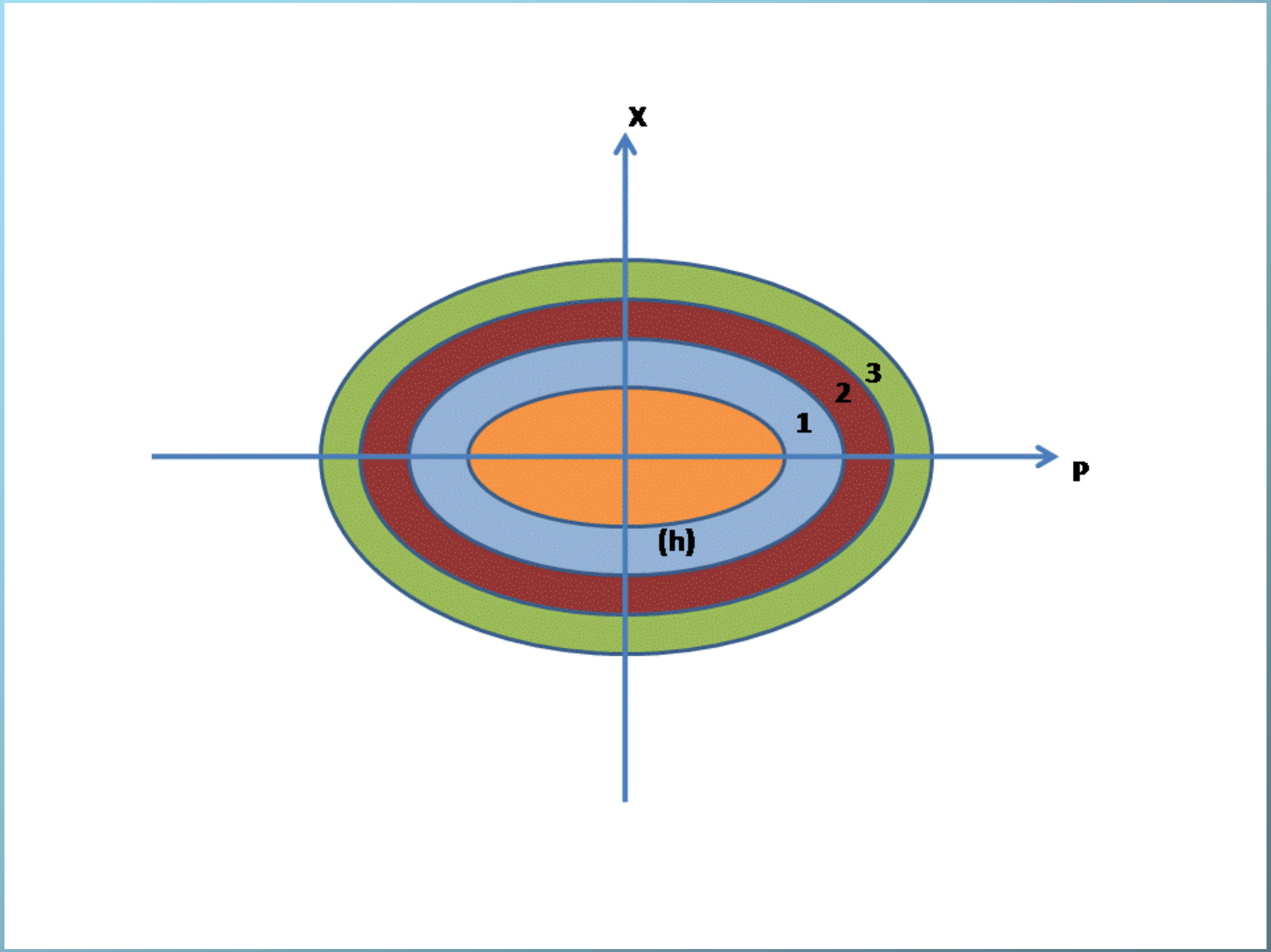
$\mathbf{A} = \pi\, 2E (\mathbf{m} / \beta)^{1/2}$; β **/ m =** ω^2 idi

$\mathbf{A = 2}\, \pi\, E (1 / \omega^2)^{1/2}$; $\omega^2 = 4\pi^2\nu^2$

$\mathbf{A} = 2\, \pi E / 2\, \pi\nu \Rightarrow \mathbf{A} = E / \nu$

elde edilir. Buradan anlaşılacağı üzere, Kuantum kuramına göre, basit harmonik hareketlerde erke elipsleri **sürekli değildir**. Birbirinin içine girmiş atlamalı (kademeli) elipsler vardır. **Art ardına gelen** elipslerin **sınırladığı halkaların alanları** ise **birbirine eşittir** (Şekil 33).

3. IŞINIM YASALARI(devamı)



Şekil 33. Eşit alanlı halkalara (=h) sahip erke elipsi

3. IŞINIM YASALARI(devamı)

O halde bu halkalardan bir tanesinin alanını h ile gösterirsek, salınım hareketi için onun birimi “erg s”,

Elips alanı: **A** = **n**h ; **n** = 0,1,2, ... tam sayılar

olur (h = alan = **sabit**). **Başka bir değimle**, her bir **basit harmonik hareket** E_n gibi bir erke düzeyine karşılık gelir. Bu **düzey** ise,

$\mathbf{A} = E / \nu \Rightarrow E = \mathbf{A}\,\nu \Rightarrow E_n = \mathbf{n}\, h\, \nu$

ile bellidir (**n**: sabit, h:alan sabiti, ν: frekans).

Alanları h, 2h, 3h, ..., **n**h olan ve erke elipsinin denklemine uygun **iç içe** elipsleri çizecek olursak (Şekil 33), **onlardan her biri** bir erke düzeyine karşılık olur.

n = 0 için E_0 = 0 düzeyi Temel düzey (**Klasik Fizik’te**)

n = 1 , için E_1 = ...

Kuantum fiziğinde ise, **n** = 0 da $E_0 = (1 / 2)\, h\, \nu$ dir.

Buradaki h, Planck sabitidir. $E = h\,\nu$ (ışık kuantumu).

Basit harmonik hareket için bu düşünceyi ortaya atan Max Planck, daha sonra onu ışınım erkesine uygulamıştır. Planck, ν frekanslı ışığın **titreşim** erkesinin $h\nu$ olduğunu **kabul etmiş** ve ona “ışık kuantumu” demiştir.

3. IŞINIM YASALARI(devamı)

Böylece ışığın da, **basit harmonik harekette olduğu gibi**, kesikli erke düzeylerine **karşılık olduğu tasarlanmış** oluyor. Bir E_n düzeyinden E_{n-1} düzeyine inişin bir $h\nu$ kuantumunda ışık salmasına karşılıktır. **Karşıt olarak** E_{n-1} düzeyinden E_n düzeyine çıkışın ise bir $h\nu$ kuantumunda ışık soğurulmasına karşılıktır. Bunu **atom modeline uygularsak**, elektron yörüngeleri belirli birer ışık kuantumuna ya da erke düzeylerine **karşılık** olur. Buna göre, elektronlar **çekirdek çevresinde** rastgele yörüngelere **oturamazlar**. Her **atomun çekirdeği çevresinde** ancak E_n erke düzeylerine karşılık olan ve atlamalarla geçilebilen belirli yörüngeler vardır. Elektronlar bu yörüngelerde dolanırlar. Bir elektron bir üst düzeydeki erke ile kendi düzeyindeki erke arasındaki **farka eşit** bir erke **alırsa**, ancak o zaman bir üst düzeye çıkar. Bu bir soğurma olayıdır. Ona $h\nu$ den daha az erke verilmiş olsaydı, o yine kendi yörüngesinde kalırdı. **Karşıt olarak**, üst yörüngelerden alt yörüngelere iniş bir salma olayıdır. Yörüngeler de sürekli değil, atlamalıdır. Bu yörüngeler **eşit alanlı elips halkaları ile belirlidir**. Her bir **elips halkasının alanı** ise h sabitine eşittir.