3. IŞINIM YASALARI(devamı)

6. Planck Yasası :

Planck'ın ortaya attığı **kurama** göre, bir elektronun m ninci üst düzeyinden n ninci alt düzeye düşmesi halinde bir miktar ışınım erkesi ortaya çıkar.

$E = h\nu$ idi.

$E_m = m\, h\nu$, $E_n = n\, h\nu$

$m > n$ ise $E_m > E_n$; $E_{m+1} > E_m$

O zaman bu ışınımın frekansı,

$E_m - E_n = h\nu$

ile belli olacaktır. E_m, m ninci düzeyin erkesi, E_n de n ninci düzeyin erkesidir. E_m deki elektron E_n ye **geçerse** $h\nu$ kadar erke açığa **çıkar ki bu olaya** salma (emisyon) denir. Eğer E_n düzeyindeki bir elektron E_m düzeyine **çıkarsa** $h\nu$ kadar bir erke soğurulur ki **bu olaya da** soğurma (absorpsiyon) denir.

Planck Yasası (devamı)

Şimdi biz, ısı dengesinde bulunan ve sıcaklığı T, ışınım yoğunluğu u_ν olan bir **kovuk** içindeki **geçişleri** göz önüne alarak, u_ν **fonksiyonunu** bulmaya çalışalım. Bunun için "Einstein'in geçiş olasılığı" nı kullanacağız.

Einstein Geçiş Olasılığı :

Üst düzeylerden alt düzeylere geçiş iki türlü olur (Şekil 34/A) :

1- **Kendiliğinden geçişler** : elektronun dış etkiler olmadan kendi kendine daha alt düzeylerden birine düşmesidir.

2- **Zorla geçişler** : elektronların ışınım basıncı gibi dış kuvvetlerin zorlamasıyla alt düzeylere inmesidir.

Alt düzeyden üst düzeye geçişler :

Üst düzeylere **geçişler** ancak dışarıdan erke almakla olur, **kendiliğinden bir geçiş beklenemez**.

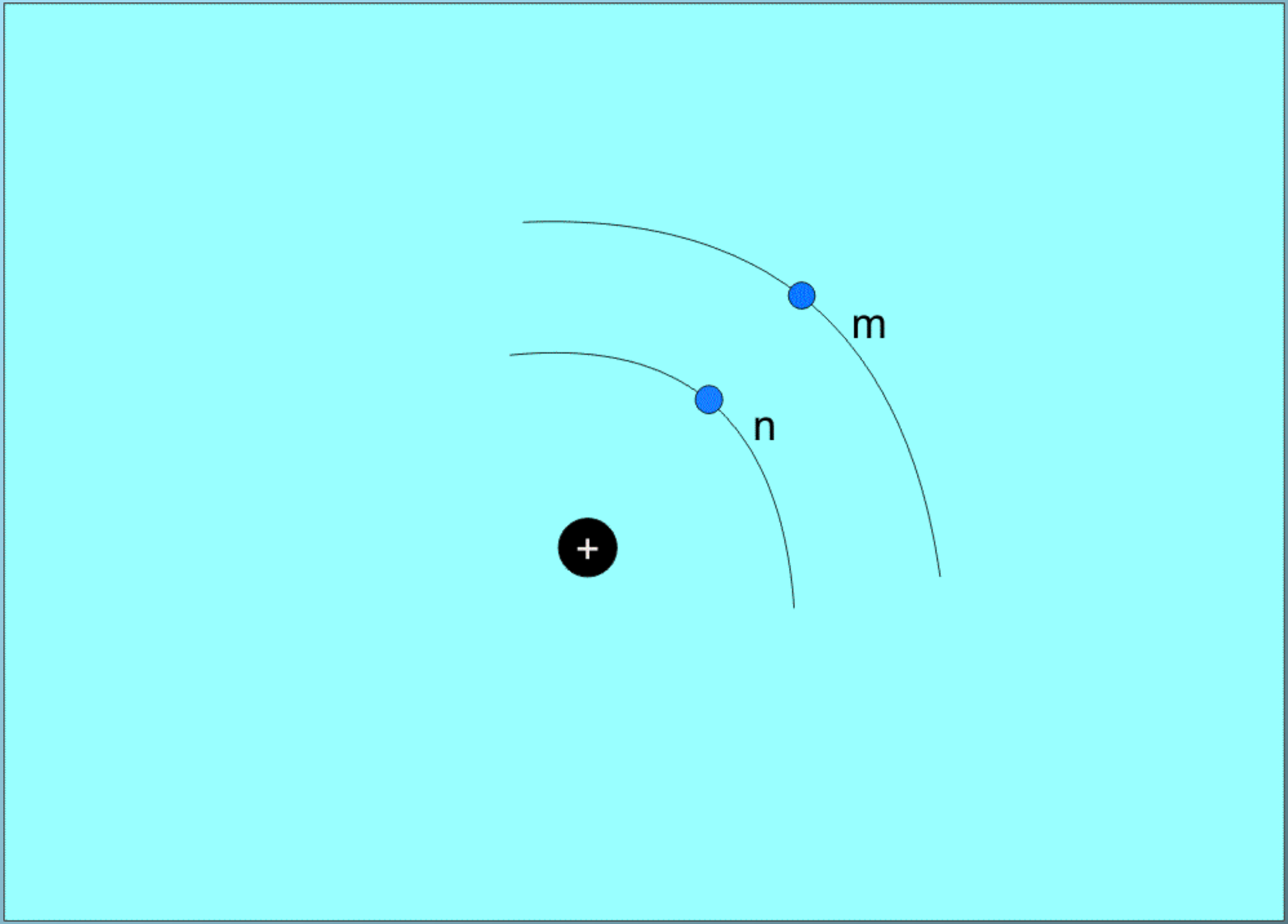
Buna göre, ele aldığımız **kovukta**, m ninci üst düzeyi ile n ninci alt düzeyi arasında **şu geçişler** olası olacaktır :

m düzeyindeki elektron sayısı = N_m

n düzeyindeki elektron sayısı = N_n

olmak üzere,

Planck Yasası (devamı)



Şekil 34A. Erke düzeyleri ve olası geçişler için şematik gösterim

Planck Yasası (devamı)

I- Üst düzeyden alt düzeye kendiliğinden geçişler (inişler) :

Bir saniyedeki **bu tür geçişlerin** olasılığı $\mathbf{A}_{nm}$ ise, n ninci düzeye **bir saniyede inen** elektronların sayısı,

$$\mathbf{A}_{nm} N_m$$

olmalıdır.

II- Üst düzeyden alt düzeye zorla inişler :

Bu **tür geçişlerin sayısı, geçiş olasılığı** ve **zorlamayı yapan** ışınımın u_ν yoğunluğu ile **orantılı** olmalıdır. Bir saniyedeki **bu tür geçişlerin olasılığı** $\mathbf{B}_{nm}$ ise, N_m elektrondan **alt düzeye** bir saniyede **zorla inen** elektronların sayısı

$\mathbf{B}_{nm}\ N_m\ u_\nu$ (ki burada $N_m\ u_\nu = N_n$ dir)

olacaktır.

III- Alt düzeyden üst düzeye çıkışlar :

Bir saniyede **bu tür geçişlerin** olasılığı $\mathbf{B}_{mn}$, **alt düzeydeki** elektronların sayısı N_n ise, **çıkışların sayısı,**

$\mathbf{B}_{mn}\ N_n\ u_\nu$

olacaktır. $\mathbf{B}_{mn}$: n den m ye **geçiş olasılığı**.

Planck Yasası (devamı)

Kovuk içinde ısı ve ışınım **dengesi** olduğuna göre **üst düzeyden inen** elektronların **sayısı** bu üst düzeye **çıkan** elektronların **sayısına** eşit olmalı, yani,

$$\mathbf{A}_{nm} N_m + \mathbf{B}_{nm} N_m u_\nu = \mathbf{B}_{mn} N_n u_\nu$$

dir ki bu **Einstein Geçiş olasılığı'dır**. Buradan,

$$\mathbf{A}_{nm} N_m = (\mathbf{B}_{mn} N_n - \mathbf{B}_{nm} N_m)\, u_\nu$$

O halde **kovuğun** u_ν yoğunluğu,

$$u_\nu = \frac{\mathbf{A}_{nm} N_m}{\mathbf{B}_{mn} N_n - \mathbf{B}_{nm} N_m}$$

bulunur. **İstatistik gaz kuramına** göre, T sıcaklığında ve ısı dengesindeki **bir kovukta**, erke düzeyleri E ile E+dE arasında bulunan N tane **titreşim hareketi** için **Titreşim Sayısı** :

$$dN = \mathbf{C}\, N \exp(- E / kT)\, dE$$

dir. Burada **C**, sabittir. Bu denklemden yararlanarak n ninci düzeydeki elektronların sayısını bulabiliriz.

Planck Yasası (devamı)

Bunun için **yapılacak iş**, bu denklemin **bir elips halkası içindeki integralini almaktır.**

$dN / N = \mathbf{C} \exp(- E / kT)\, dE$

$$\int dN = \mathbf{C}N \int_{E_{n-1}}^{E_n} \exp(- E / kT)\, dE$$

$E_n - E_{n-1} = h\nu_o$ aralığı **çok küçük** olduğundan **bu aralıkta** E_n = **sabit** kabul edilebilir. Böylece,

$N_n = \mathbf{C}\, N \exp(- E_n / kT)\, h\nu_o$

elde edilir. Burada ν_o **, bir düzeylik erke farkına karşılık gelen** frekans olup **sabittir**. Ayrıca sıfırıncı düzey (**n** = 0) için E_o = 0 **kabul edilmişti**. O halde yukarıdaki denklemden, sıfırıncı düzeydeki elektronların sayısı,

$N_o = \mathbf{C}N\, h\nu_o$

dır.

Planck Yasası (devamı)

Buna göre m ninci ve n ninci **düzeylerdeki** elektron sayısı, T sıcaklığı için, **sırasıyla**

$N_m = N_o \exp(-E_m / kT)$ ve

$N_n = N_o \exp(-E_n / kT)$

dir. Ele aldığımız **bu iki düzeydeki** elektronların **sayıları oranı** ;

$$N_m / N_n = \exp(-E_m / kT) \exp(-E_n / kT)$$

$$= \exp[-(E_m - E_n) / kT]$$

$E_m - E_n = h\nu$ idi,

$$N_m / N_n = \exp(-h\nu / kT)$$

bulunur.

Planck Yasası (devamı)

İstatistik Ağırlık Kavramı :

$\mathbf{g}_m$: m düzeyinin **istatistik ağırlığı**

$\mathbf{g}_n$: n düzeyinin **istatistik ağırlığı**

ise ve **eğer** elektronların düzeylerdeki **istatistik ağırlıkları eşit değilse**,

$$N_m / N_n = (\mathbf{g}_m / \mathbf{g}_n) \exp(- h\nu / kT) \qquad (**)$$

ve buradan

$$N_m = (\mathbf{g}_m / \mathbf{g}_n)\, N_n \exp(- h\nu / kT) \qquad (***)$$

elde edilir. O zaman bu N_m değerini

$$u_\nu = \frac{\mathbf{A}_{nm}\, N_m}{\mathbf{B}_{mn}\, N_n - \mathbf{B}_{nm}\, N_m}$$

yoğunluk ifadesinde yerine koyarsak,

Planck Yasası (devamı)

$$u_\nu = \frac{\mathbf{A}_{nm} (\mathbf{g}_m / \mathbf{g}_n) N_n \exp(- h\nu / kT)}{\mathbf{B}_{mn} N_n - \mathbf{B}_{nm} (\mathbf{g}_m / \mathbf{g}_n) N_n \exp(- h\nu / kT)}$$

$$= \frac{[\mathbf{A}_{nm} (\mathbf{g}_m / \mathbf{g}_n) \exp(- h\nu / kT)] N_n}{[\mathbf{B}_{mn} - \mathbf{B}_{nm} (\mathbf{g}_m / \mathbf{g}_n) \exp(- h\nu / kT)] N_n}$$

Pay ve paydayı $[(\mathbf{g}_m / \mathbf{g}_n) \exp(- h\nu / kT)]$'ye bölersek,

$$u_\nu = \frac{\mathbf{A}_{nm}}{(\mathbf{g}_n / \mathbf{g}_m) \mathbf{B}_{mn} \exp(h\nu / kT) - \mathbf{B}_{nm}} \qquad .....(I)$$

elde edilir.

Planck Yasası (devamı)

Şimdi **geri kalan katsayıları** bulmak için Rayleigh – Jeans formülünden **yararlanalım**. Çok uzun dalgaboyları için Rayleigh – Jeans'in

$$u_\nu = (8\pi\, k\, T / \mathbf{c}^3)\, \nu^2$$

formülü **deneylere uygun** düştüğüne göre, **bulduğumuz** u_ν **bağıntısı** uzun dalgaboyları (çok küçük frekanslar) **için**, Rayleigh – Jeans formülü ile **özdeş** olmalıdır.

Bilindiği üzere ν küçük ise $h\nu / kT \ll 1$ olacak.

Bu durumda,

$\exp(h\nu / kT) \quad \rightarrow$ exp (**x**)'in seri açılımı :

$\exp (\mathbf{x}) = 1 + \mathbf{x} + (\mathbf{x}^2 / 2!) + (\mathbf{x}^3 / 3!) + \ldots + (\mathbf{x}^n / n!)$

ye göre,

$$\exp(h\nu / kT) = 1 + (h\nu / kT) + \underbrace{[(h\nu / kT)^2 / 2!] + \ldots.}_{\text{boşlanabilir}}$$

$\exp(h\nu / kT) = 1 + (h\nu / kT)$

eşitliği büyük bir yaklaşıklıkla geçerli olacaktır.

Planck Yasası (devamı)

O zaman, uzun dalgaboyları için,

$$u_\nu = \frac{\mathbf{A}_{nm}}{(\mathbf{g}_n / \mathbf{g}_m)\, \mathbf{B}_{mn}\, [1 + (h\nu / kT)] - \mathbf{B}_{nm}} = (8\pi\, k\, T / \mathbf{c^3})\, \nu^2$$

Burada,

$(\mathbf{g}_n / \mathbf{g}_m)\, \mathbf{B}_{mn} - \mathbf{B}_{nm} = \mathbf{A}$ ve $(\mathbf{g}_n / \mathbf{g}_m)\, \mathbf{B}_{mn} = \mathbf{B}$ dersek,

$$\frac{\mathbf{A}_{nm}}{\mathbf{A} + \mathbf{B}\, (h\nu / kT)} = (8\pi\, k\, T / \mathbf{c^3})\, \nu^2$$

bulunur. Buradan,

$[\mathbf{A} + \mathbf{B}\, (h\nu / kT)]\, 8\pi\, k\, T\, \nu^2 = \mathbf{A}_{nm}\, \mathbf{c^3}$ = sabit

A = 0 olmalıdır. Yani

$(\mathbf{g}_n / \mathbf{g}_m)\, \mathbf{B}_{mn} - \mathbf{B}_{nm} = 0$ .... (II)

olmalıdır. Buradan,

$(\mathbf{g}_n / \mathbf{g}_m)\, \mathbf{B}_{mn} = \mathbf{B}_{nm}$ veya $\mathbf{g}_n\, \mathbf{B}_{mn} = \mathbf{g}_m\, \mathbf{B}_{nm}$ dir !!!

İstatistik ağırlıklar ile geçiş olasılıkları çarpımı sabittir. Bundan böyle,

Planck Yasası (devamı)

$$\frac{A_{nm}}{\underbrace{(g_n / g_m)\, B_{mn}}_{B_{nm}} (h\nu / kT)} = (8\pi\, k\, T\, \nu^2 / c^3)$$

$$A_{nm} = B_{nm} (h\nu / kT)\, (8\pi\, k\, T\, \nu^2 / c^3)$$ 'den

$$A_{nm} = B_{nm} (8\pi\, h\, \nu^3 / c^3) \qquad ....(III)$$

olur. (II) ve (III) bağıntıları (I) de kullanılırsa,

$$u_\nu = \frac{(8\pi\, h\, \nu^3 / c^3)\, B_{nm}}{B_{nm} \exp(h\nu / kT) - B_{nm}} = \frac{(8\pi\, h\, \nu^3 / c^3)\, B_{nm}}{[\exp(h\nu / kT) - 1]\, B_{nm}}$$

ve,

Planck Yasası (devamı)

$$u_\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{\mathbf{c}^3} \; \frac{1}{\exp(h\nu / kT) - 1} \qquad ....(1)$$

elde edilir ki bu, Planck'ın ışınım yoğunluğu **fonksiyonudur**.

λ'ya **bağlı** yoğunluk fonksiyonu ;

$u_\lambda = (\mathbf{c} / \lambda^2)\, u_\nu$ ve $\lambda\nu = \mathbf{c} \Rightarrow \nu = \mathbf{c} / \lambda$ dan,

$$u_\lambda = \frac{8\pi h \mathbf{c}}{\lambda^5} \; \frac{1}{\exp(h\mathbf{c} / k\lambda T) - 1} \qquad ....(2)$$

bulunur.

Planck Yasası (devamı)

ν ye bağlı **ışınım yeğinlik** fonksiyonu,

$I_\nu = (c / 4\pi)\, u_\nu$ den,

$$I_\nu = \frac{2 h \nu^3}{c^2} \; \frac{1}{\exp(h\nu / kT) - 1} \qquad \text{........(3)}$$

$I_\lambda = (c / 4\pi)\, u_\lambda$ ve (2) bağıntısından λ ya **bağlı** ışınım yeğinliği,

$$I_\lambda = \frac{2 h c^2}{\lambda^5} \; \frac{1}{\exp(h\mathbf{c} / k\lambda T) - 1} \qquad \text{.........(4)}$$

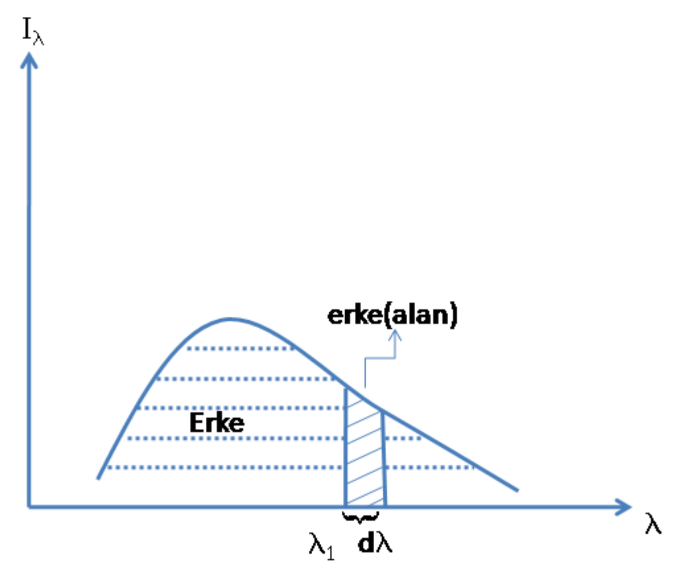
dir. Burada, $h c^2 = c_1$, $h\mathbf{c} / k = c_2$ dersek, c_1, c_2 = sabit olmak üzere,

$$I_\lambda = \frac{2 c_1}{\lambda^5} \; \frac{1}{\exp(c_2 / \lambda T) - 1} \qquad \text{.........(5)}$$

olur.

UYARI : Erke hesabı için $I_\lambda\, d\lambda$ çarpımı dikkate alınmalıdır(Şekil **34 /B**).

Planck Yasası (devamı)



Şekil 34/B. Belli bir dalgaboyu aralığındaki ışınım erkesi miktarı

3. IŞINIM YASALARI(devamı)

7.Planck Işınım Formülünden Diğer Yasaların Bulunması :

1°) Stefan-Boltzmann Yasası :

Toplam ışınım salma gücü,

$$S = \int_{\nu=0}^{\infty} S_\nu \, d\nu = \int_{\nu=0}^{\infty} \pi \, \mathbf{I}_\nu \, d\nu$$

olduğuna göre,

$$S = \pi \int_0^{\infty} (2\,h\,\nu^3 / \mathbf{c}^2)(1 / \exp(h\nu / kT) - 1) \, d\nu$$

olur. Burada $\mathbf{x} = h\nu / kT$, $\nu = (kT / h)\,\mathbf{x} \Rightarrow d\nu = (kT / h)\, d\mathbf{x}$ dönüşümü yapılırsa,

3. IŞINIM YASALARI(devamı)

$$S = (2\pi k^4 T^4 / \mathbf{c}^2 h^3) \int_0^\infty (\mathbf{x}^3 / \exp(\mathbf{x}) -1) \, d\mathbf{x}$$

olur. Buradaki integralin çözümü için;

$$1 / (\exp(\mathbf{x}) -1) = \exp(-\mathbf{x}) (1-\exp(-\mathbf{x}))^{-1}$$

$$= \exp(-\mathbf{x}) + \exp(-2\mathbf{x}) + \exp(-3\mathbf{x}) + ...$$

$$= \exp(-n\mathbf{x})$$

idi. O zaman,

$$\int_0^\infty \mathbf{x}^3 \exp(-n\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

olur.

3. IŞINIM YASALARI(devamı)

Laplace Transformu (**Dif. Denk.**),

$$F(\mathbf{s}) = \int_0^\infty f(\mathbf{t}) \exp(-\mathbf{st})\, dt \quad ; f(\mathbf{t}) = \mathbf{t}^m$$

olması durumunda,

$F(\mathbf{s}) = m! / \mathbf{s}^{m+1}$ dir.

O zaman **integralimiz** için m =3 ve,

$$\int_0^\infty (\mathbf{x}^3 / \exp(\mathbf{x}) - 1)\, d\mathbf{x} = 3! / n^4 = 6 / n^4 = 6\ \underbrace{(1 + (1/16) + (1/81) + \dots)}_{\text{seri toplamı} = \pi^4/90}$$

Burada, $\sum 1 / n^4 = \pi^4 /90$ dır.

3. IŞINIM YASALARI(devamı)

O halde,

$$\int_0^{\infty} (\mathbf{x}^3 / \exp(\mathbf{x}) -1)\, d\mathbf{x} = \pi^4 / 15$$

bulunur. Buna göre toplam ışınım salma gücü,

$$S = (2\pi^5 k^4 / 15\, \mathbf{c}^2 h^3)\, T^4$$

olarak elde edilir. Bu sonuç, $S = \sigma T^4$ şeklinde bilinen Stefan Boltzmann yasasına tamamen özdeştir. Burada σ sabiti,

$$\sigma = (2\pi^5 k^4 / 15\, \mathbf{c}^2 h^3) = 5.6697 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4}$$

dir. Burada σ nın bu değeri ve $\mathbf{c}_2 = h\mathbf{c} / k = 1.43879$ cm K deneyle bulunan değer kullanılırsa,

$$k = 1.3805 \times 10^{-16} \text{ erg K}^{-1}$$

$$h = 6.6256 \times 10^{-27} \text{ erg s}$$

değerleri bulunur. Bu **sonuç**, h **değeri** bulunduğundan çok önemlidir.

3. IŞINIM YASALARI(devamı)

2°) Wien Kayma Yasası :

I_λ fonksiyonunun maksimum olduğu yerde türev sıfır olmalıdır. O halde bu maksimumun yatay konu,

$dI_\lambda / d\lambda = 0$

denkleminin çözümünden bulunur.

$$I_\lambda = \frac{2\,c_1}{\lambda^5}\;\frac{1}{\exp(c_2 / \lambda T) - 1}$$

denkleminde $c_2 / \lambda T = \mathbf{x}$ dersek,

$$I_\lambda = \underbrace{\frac{2\,c_1 T^5}{c_2^{\,5}}}_{\text{sabit}}\;\frac{\mathbf{x}^5}{\exp(\mathbf{x}) - 1} \qquad ....(8)$$

yazılabilir. Öte yandan,

$dI_\lambda / d\lambda = (dI_\lambda / d\mathbf{x})(d\mathbf{x} / d\lambda) = 0$ denkleminden $dI_\lambda / d\mathbf{x} = 0$ olur. Buna göre,

$$d / d\mathbf{x} \,(\mathbf{x}^5 / \exp(\mathbf{x}) - 1) = 0$$

$$\frac{5\,\mathbf{x}^4 (\exp(\mathbf{x}) - 1) - \exp(\mathbf{x})\,\mathbf{x}^5}{(\exp(\mathbf{x}) - 1)^2} = 0$$

ve buradan,

3. IŞINIM YASALARI(devamı)

5 $\mathbf{x}^4$ (exp($\mathbf{x}$) – 1) – exp($\mathbf{x}$) $\mathbf{x}^5$ = 0
5 exp($\mathbf{x}$) – 5 – exp($\mathbf{x}$) $\mathbf{x}$ = 0
5 exp(x) e bölerek,
1- (1 / exp($\mathbf{x}$)) – ($\mathbf{x}$ / 5) = 0   olur. Bu denklem üstel bir ifade olduğu için ancak art ardına yaklaştırma **yöntemi ile sayısal çözüm** elde edilebilir. **Şöyleki**,

x	exp(-x)	x/5	1	Toplam
1	0.367879	0.2	1	0.432121
2	0.135335	0.4	1	0.464665
3	0.049787	0.6	1	0.350213
4	0.018316	0.8	1	0.181684
4.96511	0.006977	0.993022	1	8.17 x 10-7
5	0.006738	1.0	1	-0.00674

Bulunan en yakın sonuç, $\mathbf{x}$ = 4.96511 dir. Dolayısıyla
$c_2 / \lambda T = \mathbf{x} \Rightarrow 1.43897 / \lambda T = 4.96511$ ve buradan,
$\lambda_m T = \mathbf{0.2898}$
bulunur ki bu da Wien kayma yasasıdır.

3. IŞINIM YASALARI(devamı)

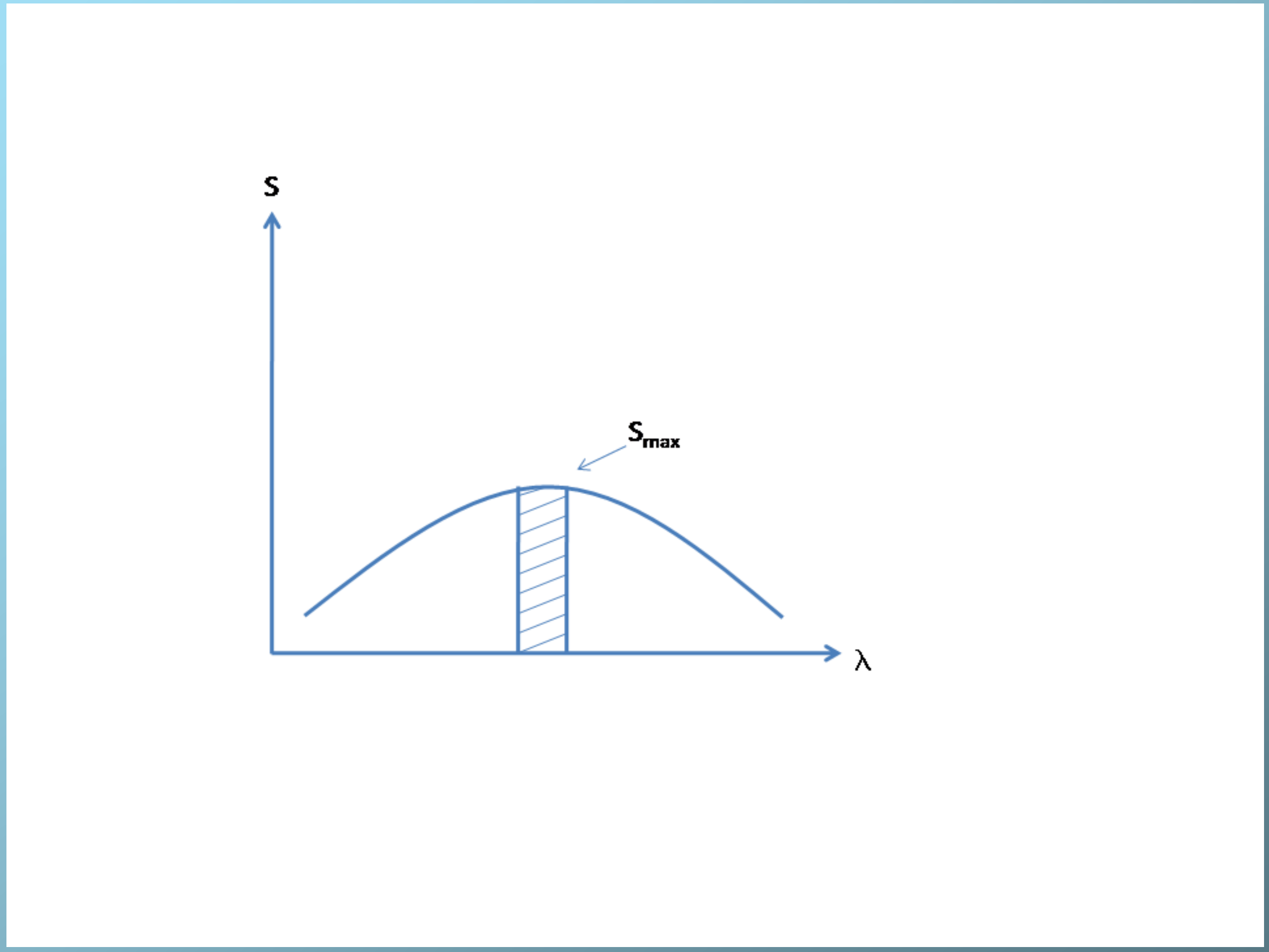
Burada bir özellik daha görülebilir : I_λ nın **maksimum olduğu yerde** yatay konu olan **x değeri** bütün sıcaklıklar için **sabit** olduğuna göre (8) bağıntısından,

I_λ (**max**) ~ T^5 ve **c** = **sabit** olmak üzere,

I_λ(**max**) = **c** T^5 dir. **S** ~ T^4 idi. **S** = π**I** olduğundan da **S** (**max**) ~ T^5 dir.

Demek ki S toplam ışınım gücü T^4 ile **orantılı olduğu halde** I_λ(**max**) ya da **S** (**max**), T^5 ile **orantılı**dır (Şekil **35**).

3. IŞINIM YASALARI(devamı)



Şekil 35. Işınımın maksimum olduğu dalgaboyundaki erke miktarı

3. IŞINIM YASALARI(devamı)

3. Wien ışınım formülü :

$\lambda \rightarrow$ küçük ise $\mathbf{c}_2 / \lambda T >> 1$ olur.

Bu durumda λ ya bağlı ışınım yoğunluğu

$$u_\lambda = \frac{8\pi h \mathbf{c}}{\lambda^5} \; \frac{1}{\exp(h\mathbf{c} / k\lambda T) - 1}$$

bağıntısındaki ikinci terimin paydasında bulunan (-1) sayısı boşlanabilir. O zaman

$$u_\lambda = \frac{8\pi h \mathbf{c}}{\lambda^5} \exp(-\mathbf{c}_2 / \lambda T)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$u_\lambda = (\mathbf{c}_1 / \lambda^5) \exp(-\mathbf{c}_2 / \lambda T)$ idi.

Buradan da $\mathbf{c}_1 = 8\pi h \mathbf{c}$ ve $\mathbf{c}_2 = h\mathbf{c} / k$ olarak bulunur.

Rayleigh – Jeans **formülünü** burada **yeniden çıkarmanın** gereği yoktur. **Çünkü** uzun dalga boyu için onun **doğruluğu kabul edilmiş** ve Planck formülünün **çıkarılmasında da** kullanılmıştır.