# 12. HAFTA

## Güven Bölgeleri ve Kitle Ortalama Vektörünün Bileşenlerinin Eşanlı Karşılaştırılması

Çok değişkenli bir örneklemden sonuç çıkarımı yapmak için, tek değişkenli güven aralığı kavramı, çok değişkenli güven bölgesine genişletilmelidir. $\underline{\theta}$ bilinmeyen kitle parametrelerinin bir vektörü ve $\Theta$ , $\underline{\theta}$ için olası tüm değerlerin bir kümesi olsun. Bir güven bölgesi, uygun $\underline{\theta}$ değerlerinin bölgesidir. Bu bölge veriler ile belirlenir ve $R(\mathbf{X})$ ile gösterilir. Burada $\mathbf{X} = [\underline{X}_1, \underline{X}_2, ..., \underline{X}_n]$ veri matrisidir.

Örneklem seçilmeden önce

$$P(Doğru\ \underline{\theta}'ların\ R(\mathbf{X})\ de\ olması) = 1-\alpha$$

ise $R(\mathbf{X})$ bölgesine $1-\alpha$ 'lık güven bölgesi adı verilir. Bu olasılık doğru ancak bilinmeyen $\underline{\theta}$ değerlerine göre hesaplanır.

$p$-boyutlu normal kitlenin, kitle ortalama vektörü $\underline{\mu}$ için güven bölgesi $\alpha = P[n(\underline{\bar{X}} - \underline{\mu})' S^{-1} (\underline{\bar{X}} - \underline{\mu}) > \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)]$ 'dan elde edilir. Örneklem seçilmeden önce, bilinmeyen $\underline{\mu}$ ve $\Sigma$ değerleri ne olursa olsun

$$P[n(\underline{\bar{X}} - \underline{\mu})' S^{-1} (\underline{\bar{X}} - \underline{\mu}) \leq \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)] = 1-\alpha$$

dır. Her hangi bir örneklemden hesaplanan $\underline{\bar{x}}$ ve $S$ kullanılarak elde edilen

$$n(\underline{\bar{x}} - \underline{\mu})' S^{-1} (\underline{\bar{x}} - \underline{\mu}) \leq \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)$$

eşitsizliği olası tüm parametre değerlerinin uzayı içinde olan $R(\mathbf{X})$ bölgesi ile tanımlanacaktır. Bu durumda bölge merkezi $\underline{\bar{x}}$ 'de olan bir elipsoid olacaktır. Bu elipsoid $\underline{\mu}$ için $(1-\alpha)$ 'lık güven bölgesidir.

$p$-boyutlu normal kitlenin, kitle ortalama vektörü $\underline{\mu}$ için $(1-\alpha)$ 'lık güven bölgesi, bütün $\underline{\mu}$ 'ler için belirlenen bir kümedir.

Her hangi bir $\underline{\mu}_0$ 'ın güven bölgesi içine düşüp düşmediğini belirlemek için, $n(\underline{\bar{x}} - \underline{\mu}_0)' S^{-1} (\underline{\bar{x}} - \underline{\mu}_0)$ genelleştirilmiş kare uzaklığı hesaplanır ve hesaplanan uzaklık değeri,

$\dfrac{(n-1)p}{(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)$ kritik değeri ile karşılaştırılır. Eğer kare uzaklığının değeri, kritik değerden büyük ise, $\underline{\mu}_0$ güven bölgesinin dışındadır. Bu da $H_0:\underline{\mu}=\underline{\mu}_0$'ın, $H_1:\underline{\mu}\neq\underline{\mu}_0$'e karşı testine benzerdir. Yani güven bölgesi bütün $\underline{\mu}_0$ vektörlerini içerir ise $T^2$ testi, $\alpha$ anlam düzeyinde $H_0:\underline{\mu}=\underline{\mu}_0$'ı, $H_1:\underline{\mu}\neq\underline{\mu}_0$'e karşı reddetmeyecektir.

$p\geq 4$ olduğunda, $\underline{\mu}$ için ortak güven bölgeleri grafik ile gösterilemez. Ancak güven elipsoidlerinin eksen uzunlukları bulunabilir. Bu uzunluklar örneklem varyans-kovaryans matrisi $S$'nin $\hat{\lambda}_i$ özdeğerleri ve ilişkili $\underline{\hat{e}}_i$ birim özvektörlerinden belirlenir.

$n(\underline{\bar{x}}-\underline{\mu})'S^{-1}(\underline{\bar{x}}-\underline{\mu})\leq c^2=\dfrac{(n-1)p}{(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)$'nin eksenleri ve eksen uzunlukları $\dfrac{\sqrt{\hat{\lambda}_i}}{\sqrt{n}}c=\sqrt{\hat{\lambda}_i}\sqrt{p(n-1)F_{p,n-p}(\alpha)/n(n-p)}$ , $\underline{\hat{e}}_i$ birim özvektörü boyunca belirlenirler. $\underline{\bar{x}}$ merkezinden başlandığında, güven elipsoidinin eksenleri $\pm\sqrt{\hat{\lambda}_i}\sqrt{p(n-1)F_{p,n-p}(\alpha)/n(n-p)}\ \underline{\hat{e}}_i$ dir. Burada $S\underline{\hat{e}}_i=\hat{\lambda}_i\underline{\hat{e}}_i$ , $i=1,2,...,p$ dir. $\hat{\lambda}_i$'lerin oranları, eksen çiftleri boyunca uzunluğun göreli miktarını belirleyecektir.

**Örnek**: 42 adet mikro dalga fırının kapağı kapalı ve açık durumda olduğunda ortamdaki radyasyon ölçülmüş ve değerler aşağıda verilmiştir. Bu örneklemin kitle ortalama vektörü $\underline{\mu}'=\begin{bmatrix}0.562 & 0.589\end{bmatrix}$ olan normal bir kitleden alınıp alınmadığına $\alpha=0.05$ anlam düzeyinde hem test ederek, hem de güven bölgesine göre karar veriniz ve sonucu yorumlayınız.

| Fırın No | Kapak Kapalı $y_1$ | Kapak Açık $y_2$ | Fırın No | Kapak Kapalı $y_1$ | Kapak Açık $y_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.15 | 0.30 | 22 | 0.05 | 0.10 |
| 2 | 0.09 | 0.09 | 23 | 0.03 | 0.05 |
| 3 | 0.18 | 0.30 | 24 | 0.05 | 0.05 |
| 4 | 0.10 | 0.10 | 25 | 0.15 | 0.15 |
| 5 | 0.05 | 0.10 | 26 | 0.10 | 0.30 |
| 6 | 0.12 | 0.12 | 27 | 0.15 | 0.15 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 0.08 | 0.09 | 28 | 0.09 | 0.09 |
| 8 | 0.05 | 0.10 | 29 | 0.08 | 0.09 |
| 9 | 0.08 | 0.09 | 30 | 0.18 | 0.28 |
| 10 | 0.10 | 0.10 | 31 | 0.10 | 0.10 |
| 11 | 0.07 | 0.07 | 32 | 0.20 | 0.10 |
| 12 | 0.02 | 0.05 | 33 | 0.11 | 0.10 |
| 13 | 0.01 | 0.01 | 34 | 0.30 | 0.30 |
| 14 | 0.10 | 0.45 | 35 | 0.02 | 0.12 |
| 15 | 0.10 | 0.12 | 36 | 0.20 | 0.25 |
| 16 | 0.10 | 0.20 | 37 | 0.20 | 0.20 |
| 17 | 0.02 | 0.04 | 38 | 0.30 | 0.40 |
| 18 | 0.10 | 0.10 | 39 | 0.30 | 0.33 |
| 19 | 0.01 | 0.01 | 40 | 0.40 | 0.32 |
| 20 | 0.40 | 0.60 | 41 | 0.30 | 0.12 |
| 21 | 0.10 | 0.12 | 42 | 0.05 | 0.12 |

**Çözüm:** Bu verilerin dağılımının yapılan testler sonucunda norma dağılıma uymadığı görülmüş ve $\sqrt[4]{\phantom{x}}$ dönüşümü ile normal dağılıma dönüştürülmüştür. Dönüşüm ile elde edilen $x_1 = \sqrt[4]{y_1}$ ve $x_2 = \sqrt[4]{y_2}$ değerlerine ilişkin temel istatistikler aşağıda verilmiştir.

$n = 42$

$$\underline{\bar{\mathrm{x}}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.564 \\ 0.603 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad S = \begin{bmatrix} 0.0144 & 0.0117 \\ 0.0117 & 0.0146 \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Buradan

$$H_0 : \underline{\mu} = \begin{bmatrix} 0.562 \\ 0.589 \end{bmatrix}$$

$$H_1 : \underline{\mu} \neq \begin{bmatrix} 0.562 \\ 0.589 \end{bmatrix}$$

hipotezlerini test etmek için

$T^2 = n(\underline{\bar{\mathrm{x}}} - \underline{\mu}_0)' S^{-1} (\underline{\bar{\mathrm{x}}} - \underline{\mu}_0)$ istatistiği elde edilmelidir.

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 203.018 & -163.391 \\ -163.391 & 200.228 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} T^2 &= 42(\begin{bmatrix} 0.564 \\ 0.603 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.562 \\ 0.589 \end{bmatrix})' \begin{bmatrix} 203.018 & -163.391 \\ -163.391 & 200.228 \end{bmatrix} (\begin{bmatrix} 0.564 \\ 0.603 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.562 \\ 0.589 \end{bmatrix}) \\ &= 42\begin{bmatrix} 0.002 & 0.014 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 203.018 & -163.391 \\ -163.391 & 200.228 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.002 \\ 0.014 \end{bmatrix} \\ &= 42\begin{bmatrix} 0.002 & 0.014 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.881438 \\ 2.47641 \end{bmatrix} \\ &= 1.298 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Kritik değer

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha) &= \frac{(42-1)2}{(42-2)} F_{2,42-2}(0.05) \\ &= 2.05 F_{2,40}(0.05) \\ &= 2.05(3.23) \\ &= 6.6215 \end{aligned}$$

dir. Buradan $T^2 = 1.298 < 6.6215$ olduğundan $H_0$ reddedilemez ve bu örneklemin, kitle ortalama vektörü $\underline{\mu}' = \begin{bmatrix} 0.562 & 0.589 \end{bmatrix}$ olan normal kitleden alındığı sonucuna varılır.

Aynı sonucu güven bölgesinden yararlanarak da bulabiliriz.

Örneklem varyans-kovaryans matrisi $S$'nin özdeğerleri ve ilişkili birim özvektörleri sırasıyla

$$\hat{\lambda}_1 = 0.026 \quad , \quad \underline{\hat{e}}_1' = \begin{bmatrix} 0.704 & 0.710 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\lambda}_2 = 0.002 \quad , \quad \underline{\hat{e}}_2' = \begin{bmatrix} -0.710 & 0.704 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. $\underline{\mu}$ için %95'lik güven elipsi $\underline{\mu}' = (\mu_1 \quad \mu_2)$ 'nün tüm değerlerini içerdiğinde

$$n \begin{bmatrix} \bar{x}_1 - \mu_1 \\ \bar{x}_2 - \mu_2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 - \mu_1 \\ \bar{x}_2 - \mu_2 \end{bmatrix} \le \frac{p(n-1)}{n-p} F_{p.\mathrm{n-p}}(\alpha)$$

sağlanmalıdır. Böylece

$$42\begin{bmatrix}0.564-\mu_1 & 0.603-\mu_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}203.018 & -163.391\\ -163.391 & 200.228\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.564-\mu_1\\ 0.603-\mu_2\end{bmatrix}\leq\frac{2(41)}{40}F_{2.40}(0.05)$$

$$42(203.018)(0.564-\mu_1)^2+42(200.228)(0.603-\mu_2)^2-84(163.391)(0.564-\mu_1)(0.603-\mu_2)\leq 6.6215$$

elde edilir. Buradan $\underline{\mu}'=\begin{bmatrix}0.562 & 0.589\end{bmatrix}$'nün güven bölgesinin içinde olup olmadığını görmek için bu $\underline{\mu}'=\begin{bmatrix}0.562 & 0.589\end{bmatrix}$ değeri yukarıda elde edilen sonuçta yerine yazıldığında

$$42(203.018)(0.564-0.562)^2+42(200.228)(0.603-0.589)^2-84(163.391)(0.564-0.562)(0.603-0.589)=1.298$$

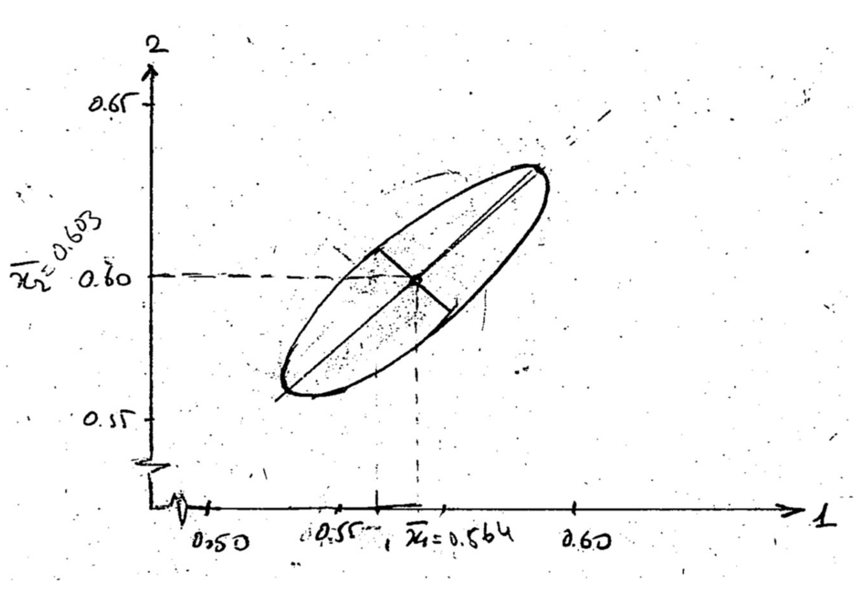
bulunur. Sonuç olarak $1.298\leq 6.6215$ olduğundan $\underline{\mu}'=\begin{bmatrix}0.562 & 0.589\end{bmatrix}$ güven bölgesinin içindedir. Bu sonuç da $\alpha=0.05$ anlam düzeyinde $H_0:\underline{\mu}=\begin{bmatrix}0.562\\ 0.589\end{bmatrix}$ hipotezinin $H_1:\underline{\mu}\neq\begin{bmatrix}0.562\\ 0.589\end{bmatrix}$'e karşı testinde $H_0$'ın reddedilmemesiyle eşdeğerdir.

Büyük ve küçük eksen uzunluklarını yarısı sırasıyla

$$\sqrt{\hat{\lambda}_1}\sqrt{\frac{p(n-1)}{n(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)}=\sqrt{0.026}\sqrt{\frac{2(41)}{42(40)}(3.23)}, \\ =0.064$$

$$\sqrt{\hat{\lambda}_2}\sqrt{\frac{p(n-1)}{n(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)}=\sqrt{0.002}\sqrt{\frac{2(41)}{42(40)}(3.23)} \\ =0.018$$

dır ve merkezi $\underline{\mathrm{x}}'=\begin{bmatrix}0.564 & 0.603\end{bmatrix}$ olan elips



biçiminde çizilmiştir. $\underline{\mu}' = [0.562 \quad 0.589]$ noktası elipsin içinde yer alır.

$\underline{\mathrm{x}}' = [0.564 \quad 0.603]$ orjin alınarak çizilen elipsin büyük ekseni $\hat{\underline{e}}_1' = [0.704 \quad 0.710]$ özvektörü boyunca ve küçük ekseni $\hat{\underline{e}}_2' = [-0.710 \quad 0.704]$ özvektörü boyunca uzanır.

**Eşanlı Güven Aralıkları**

$\underline{X}$ , $N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ dağılımlı bir rasgele vektör ve

$$\begin{aligned} Z &= \underline{l}'\underline{X} \\ &= l_1 X_1 + l_2 X_2 + \ldots + l_p X_p \end{aligned}$$

$\underline{X}$ rasgele vektörüne ilişkin bir lineer birleşim olsun. Buradan

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(\underline{l}'\underline{X}) \\ &= \underline{l}'\underline{\mu} \\ &= \mu_Z \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} Var(Z) &= Var(\underline{l}'\underline{X}) \\ &= \underline{l}'\Sigma\underline{l} \\ &= \sigma_Z^2 \end{aligned}$$

ve $Z \sim N(\mu_Z, \sigma_Z^2)$

dir.

$N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ dağılımından $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \ldots, \underline{X}_n$ rasgele örneklemi alınmış ise, ilişkili $Z$ örneklemi lineer bileşimlerden oluşur ve

$$\begin{aligned} Z_j &= \underline{l}'\underline{X}_j \\ &= l_1 X_{1j} + l_2 X_{2j} + \ldots + l_p X_{pj} \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

dir. Buradan $Z_j$ 'lerin gözlem değerleri $z_1, z_2, \ldots, z_n$ 'lerin örneklem ortalaması ve varyansı sırasıyla

$$\bar{z} = \underline{l}' \, \underline{\bar{\mathrm{x}}} \quad \text{ve} \quad s_Z^2 = \underline{l}' S \underline{l}$$

dir. Burada $\underline{\bar{\mathrm{x}}}$ ve $S$ , $\underline{\mathrm{x}}_1, \underline{\mathrm{x}}_2, \ldots, \underline{\mathrm{x}}_n$ gözlemlerinin örneklem ortalama vektörü ve örneklem varyans-kovaryans matrisidir.

Eşanlı güven aralıkları, $\underline{l}$'nin farklı seçimlerine göre $\underline{l}'\underline{\mu}$ için güven aralıklarının elde edilmesidir. $\underline{l}$ sabit ve $\sigma_Z^2$ bilinmediğinde, $\mu_Z = \underline{l}'\underline{\mu}$ için $(1-\alpha)$'lık güven aralığı

$$t = \frac{\bar{z} - \mu_Z}{s_Z / \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\underline{l}'\,\underline{\bar{\mathrm{x}}} - \underline{l}'\underline{\mu})}{\sqrt{\underline{l}'S\underline{l}}}$$

olan $t$-değerine bağlıdır ve

$$\bar{z} - t_{n-1}(\alpha/2)\frac{s_Z}{\sqrt{n}} \leq \mu_Z \leq \bar{z} + t_{n-1}(\alpha/2)\frac{s_Z}{\sqrt{n}}$$

veya

$$\underline{l}'\,\underline{\bar{\mathrm{x}}} - t_{n-1}(\alpha/2)\frac{\sqrt{\underline{l}'S\underline{l}}}{\sqrt{n}} \leq \underline{l}'\underline{\mu} \leq \underline{l}'\,\underline{\bar{\mathrm{x}}} + t_{n-1}(\alpha/2)\frac{\sqrt{\underline{l}'S\underline{l}}}{\sqrt{n}}$$

dir, burada $t_{n-1}(\alpha/2)$, $n$-1 serbestlik dereceli $t$-dağılımının $(\alpha/2)$ inci yüzdeliğidir.

Kitle ortalama vektörü $\underline{\mu}$'nün farklı bileşenleri için güven aralığı elde edilebilir. Örneğin $\underline{l}' = (1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0)$ alındığında, $\underline{l}'\underline{\mu} = \mu_1$ dır ve bu durumda tek değişkenli normal dağılımlı bir kitlenin, ortalaması $\mu_1$ için güven aralığı elde edilmiş olur. $\underline{l}'\,\underline{\bar{\mathrm{x}}} = \bar{x}_1$ ve $\underline{l}'S\underline{l} = s_{11}$ dir. Açıkça farklı $\underline{l}$ katsayı vektörlerinin seçilmesiyle, her biri $(1-\alpha)$'lık güven katsayısı ile ilişkili $\underline{\mu}$'nün bileşenlerine ilişkin bir çok güven aralığı elde edilebilir. Ancak birlikte alınan bütün durumlar için ilişkili güven katsayısı $(1-\alpha)$ değildir.

$\underline{\mathrm{x}}_1, \underline{\mathrm{x}}_2, \ldots, \underline{\mathrm{x}}_n$ gözlemleri ve özel bir $\underline{l}$ verildiğinde, güven aralığı $\underline{l}'\underline{\mu}$ değerlerinin bir kümesidir, öyle ki

$$|t| = \left| \frac{\sqrt{n}(\underline{l}'\,\underline{\bar{\mathrm{x}}} - \underline{l}'\underline{\mu})}{\sqrt{\underline{l}'S\underline{l}}} \right| \leq t_{n-1}(\alpha/2)$$

veya eşdeğer olarak

$$t^2 = \frac{n(\underline{l}'\,\underline{\bar{\mathrm{x}}} - \underline{l}'\underline{\mu})^2}{\underline{l}'S\underline{l}} = \frac{n(\underline{l}'(\,\underline{\bar{\mathrm{x}}} - \underline{\mu}))^2}{\underline{l}'S\underline{l}} \leq t_{n-1}^2(\alpha/2)$$

dir.

$t^2$, $\underline{l}$'nin tüm seçimleri için oldukça küçük bir değer olabilir. Bu nedenle, $\underline{l}$'nin bir çok değeri (seçimi) için aralıklar oluşturulduğunda $t_{n-1}^2(\alpha/2)$ sabiti daha büyük bir değer olan $c^2$ ile yer değiştirir. $t^2 \le c^2$ için, $t^2$'yi maksimum yapan $\underline{l}$ değeri

$$\max_{\underline{l}} t^2 = \max_{\underline{l}} \frac{n(\underline{l}'(\underline{\mathrm{x}}-\underline{\mu}))^2}{\underline{l}'S\underline{l}}$$

ifadesi maksimum olacak şekilde belirlenir. Önceki bölümlerde verilen maksimizasyon teoremi göz önüne alındığında, $\underline{\mathrm{x}} = \underline{l}$, $\underline{d} = (\underline{\mathrm{x}}-\underline{\mu})$ ve $B = S$ alınırsa

$$\begin{aligned}\max_{\underline{l}} \frac{n(\underline{l}'(\underline{\mathrm{x}}-\underline{\mu}))^2}{\underline{l}'S\underline{l}} &= n\left[\max_{\underline{l}} \frac{(\underline{l}'(\underline{\mathrm{x}}-\underline{\mu}))^2}{\underline{l}'S\underline{l}}\right] \\ &= n(\underline{\mathrm{x}}-\underline{\mu})'S^{-1}(\underline{\mathrm{x}}-\underline{\mu}) \\ &= T^2\end{aligned}$$

dir. Maksimum, $S^{-1}(\underline{\mathrm{x}}-\underline{\mu})$'ye orantılı $\underline{l}$ için oluşur.

**Sonuç:** $\underline{X}_1, \underline{X}_2, ..., \underline{X}_n$, pozitif tanımlı $\Sigma$ ile $N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ dağılımından rasgele bir örneklem olsun. Böylece bütün $\underline{l}$ bileşenleri için eşanlı aralık

$$\underline{l}'\underline{\mathrm{x}} - \sqrt{\frac{p(n-1)}{n(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)\ \underline{l}'S\underline{l}}\ ,\ \underline{l}'\underline{\mathrm{x}} + \sqrt{\frac{p(n-1)}{n(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)\ \underline{l}'S\underline{l}}$$

$(1-\alpha)$ olasılığı ile $\underline{l}'\underline{\mu}$'yü içerir.

**İspat:** Her $\underline{l}$ için,

$$T^2 = n(\underline{\mathrm{x}}-\underline{\mu})'S^{-1}(\underline{\mathrm{x}}-\underline{\mu}) \le c^2 \Rightarrow \frac{n(\underline{l}'\underline{\mathrm{x}} - \underline{l}'\underline{\mu})^2}{\underline{l}'S\underline{l}} \le c^2$$

veya her $c$ için

$$\underline{l}'\underline{\mathrm{x}} - c\sqrt{\frac{\underline{l}'S\underline{l}}{n}} \le \underline{l}'\underline{\mu} \le \underline{l}'\underline{\mathrm{x}} + c\sqrt{\frac{\underline{l}'S\underline{l}}{n}}$$

dir. $c^2 = \frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)$ seçilmesiyle $1-\alpha = P(T^2 \le c^2)$ olasılığı ile bütün $\underline{l}$ 'ler için verilen arlık $\underline{l}'\underline{\mu}$'yü içerecektir. Bu aralık $\underline{\mu}$ ortalama vektörünün $\underline{l}$ ile belirlenen bileşenleri için aralık verir.

Bu sonuçtan elde edilen eşanlı aralıklar, aralığı içeren olasılık $T^2$'nin dağılımına göre belirlendiğinden, $T^2$ aralıkları olarak adlandırılır. Eğer $\underline{l}$ bileşenleri, $\underline{l}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, $\underline{l}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, ..., $\underline{l}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ biçiminde seçilir ise, $T^2$ aralıkları sırasıyla

$$\begin{gathered}
\bar{x}_1 - \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{11}}{n}} \le \mu_1 \le \bar{x}_1 + \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{11}}{n}} \\
\bar{x}_2 - \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{22}}{n}} \le \mu_2 \le \bar{x}_2 + \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{22}}{n}} \\
\vdots \\
\bar{x}_p - \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{pp}}{n}} \le \mu_p \le \bar{x}_p + \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{pp}}{n}}
\end{gathered}$$

aralıklarının hepsi $(1-\alpha)$ güven katsayısı ile eşanlılığı sağlar.

$\underline{l}' = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & l_i & 0 & \cdots & -l_k & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ alındığında, $\underline{l}'\underline{\mu} = \mu_i - \mu_k$ farkına ilişkin eşanlı aralık elde edilir. Burada $\underline{l}'\underline{\mathrm{x}} = (\bar{x}_i - \bar{x}_k)$ ve $\underline{l}'S\underline{l} = s_{ii} - 2s_{ik} + s_{kk}$ dır. Böylece $\mu_i - \mu_k$ farkına ilişkin eşanlı güven aralığı,

$$(\bar{x}_i - \bar{x}_k) - \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{ii} - 2s_{ik} + s_{kk}}{n}} \le (\mu_i - \mu_k) \le (\bar{x}_i - \bar{x}_k) + \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{ii} - 2s_{ik} + s_{kk}}{n}}$$

olarak elde edilir.

**Örnek:** $n = 87$ öğrencinin seviye tespit sınavına($X_1$) ve iki farklı yeterlik testine($X_2$ , $X_3$) ilişkin puanları aşağıdaki gibidir. Puanları dağılımının normal olduğu bilinmektedir.

| Öğrenciler | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 468 | 41 | 26 |
| 2 | 428 | 39 | 26 |
| 3 | 514 | 53 | 21 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 87 | 607 | 67 | 32 |

$\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ ve $(\mu_1+\mu_2+\mu_3)$ için %95'lik eşanlı güven aralıklarını elde ediniz.

**Çözüm:** Verilerden temel istatistikler

$$\underline{\mathrm{x}}=\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}527.74\\ 54.69\\ 25.13\end{bmatrix} \text{ ve } S=\begin{bmatrix}s_{11} & s_{12} & s_{13}\\ s_{12} & s_{22} & s_{23}\\ s_{13} & s_{23} & s_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5691.34 & 600.51 & 217.25\\ 600.51 & 126.05 & 23.37\\ 217.25 & 23.37 & 23.11\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$1-\alpha=0.95$ ve $\alpha=0.05$ olmak üzere kritik değer

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{p(n-1)}{(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)\\ &= \frac{3(87-1)}{(87-3)}F_{3,84}(0.05)\\ &= \frac{3(86)}{84}(2.7)\\ &= 8.29 \end{aligned}$$

dir.

Buradan $\underline{\mu}'=\begin{bmatrix}\mu_1 & \mu_2 & \mu_3\end{bmatrix}$'nün bileşenleri için eşanlı aralıklar aşağıdaki gibi elde edilir.

$\underline{l}'=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ alınır ise,

$$\begin{aligned} \underline{l}'\underline{\mu} &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\end{bmatrix}\\ &= \mu_1 \end{aligned}$$

olur ve buradan $\mu_1$ için eşanlı güven aralığı

$$\begin{aligned} \underline{l}'\underline{\mathrm{x}} &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}527.74\\ 54.69\\ 25.13\end{bmatrix}\\ &= 527.74 \end{aligned} \quad \text{ve} \quad \begin{aligned} \underline{l}'S\underline{l} &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5691.34 & 600.51 & 217.25\\ 600.51 & 126.05 & 23.37\\ 217.25 & 23.37 & 23.11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\\ &= 5691.34 \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\bar{x}_1 - \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)}\ \sqrt{\frac{s_{11}}{n}}\ \le \mu_1 \le\ \bar{x}_1 + \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)}\ \sqrt{\frac{s_{11}}{n}}$$

$$527.74 - \sqrt{8.29}\ \sqrt{\frac{5691.34}{87}}\ \le \mu_1 \le\ 527.74 + \sqrt{8.29}\ \sqrt{\frac{5691.34}{87}}$$

$$504.45 \le \mu_1 \le\ 551.03$$

olarak elde edilir.

$\underline{l}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ alınır ise,

$$\underline{l}'\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}$$

$$= \mu_2$$

olur ve buradan $\mu_2$ için eşanlı güven aralığı

$$\underline{l}'\underline{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 527.74 \\ 54.69 \\ 25.13 \end{bmatrix} \qquad \text{ve} \qquad \underline{l}'S\underline{l} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5691.34 & 600.51 & 217.25 \\ 600.51 & 126.05 & 23.37 \\ 217.25 & 23.37 & 23.11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= 54.69 \qquad\qquad = 126.05$$

olmak üzere;

$$\bar{x}_2 - \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)}\ \sqrt{\frac{s_{22}}{n}}\ \le \mu_2 \le\ \bar{x}_2 + \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)}\ \sqrt{\frac{s_{22}}{n}}$$

$$54.69 - \sqrt{8.29}\ \sqrt{\frac{126.05}{87}}\ \le \mu_2 \le\ 54.69 + \sqrt{8.29}\ \sqrt{\frac{126.05}{87}}$$

$$51.22 \le \mu_2 \le\ 58.16$$

olarak elde edilir.

$\underline{l}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ alınır ise,

$$\underline{l}'\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}$$

$$= \mu_3$$

olur ve buradan $\mu_3$ için eşanlı güven aralığı

$$\underline{l}'\overline{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 527.74 \\ 54.69 \\ 25.13 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \underline{l}'S\underline{l} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5691.34 & 600.51 & 217.25 \\ 600.51 & 126.05 & 23.37 \\ 217.25 & 23.37 & 23.11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= 25.13 \qquad\qquad = 23.11$$

olmak üzere;

$$\bar{x}_3 - \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{33}}{n}} \le \mu_3 \le \bar{x}_3 + \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{33}}{n}}$$

$$25.13 - \sqrt{8.29} \sqrt{\frac{23.11}{87}} \le \mu_3 \le 25.13 + \sqrt{8.29} \sqrt{\frac{23.11}{87}}$$

$$23.65 \le \mu_3 \le 26.61$$

olarak elde edilir.

$\underline{l}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ alınır ise,

$$\underline{l}'\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}$$

$$= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$$

olur ve buradan $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ toplamı için eşanlı güven aralığı

$$\underline{l}'\overline{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 527.74 \\ 54.69 \\ 25.13 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \underline{l}'S\underline{l} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5691.34 & 600.51 & 217.25 \\ 600.51 & 126.05 & 23.37 \\ 217.25 & 23.37 & 23.11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= 607.26 \qquad\qquad = 7522.76$$

olmak üzere;

$$\underline{l}'\overline{\mathrm{x}} - \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{\underline{l}'S\underline{l}}{n}} \le \underline{l}'\underline{\mu} \le \underline{l}'\overline{\mathrm{x}} + \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{\underline{l}'S\underline{l}}{n}}$$

$$607.56 - \sqrt{8.29} \sqrt{\frac{7522.76}{87}} \le (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) \le 607.56 + \sqrt{8.29} \sqrt{\frac{7522.76}{87}}$$

$$580.7864 \le (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) \le 634.333357$$

olarak bulunur.

**Birerli ve Eşanlı Güven Aralıklarının Karşılaştırılması**

Güven aralıklarının elde edilmesi için alternatif başka bir yöntem, kitle ortalaması $\underline{\mu}$'nün bileşenleri $\mu_i$ , $(i=1,2,...,p)$'leri birerli düşünmektir. $\underline{l}'\underline{\mu}$ için oluşturulan eşanlı güven aralığında $\underline{l}'=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & l_i & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ alınabilir, burada $l_i=1$ dir. Bu yaklaşım, $p$-tane rasgele değişkenin kovaryans yapısını göz ardı eder. Yani rasgele değişkenlerin ilişkisiz olduğunu kabul eder. Bu durumda $\underline{l}'=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, $\underline{l}'=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ , ... , $\underline{l}'=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ biçiminde alındığında aralıklar,

$$\begin{gathered}
\bar{x}_1 - t_{n-1}(\alpha/2)\sqrt{\frac{s_{11}}{n}} \le \mu_1 \le \bar{x}_1 + t_{n-1}(\alpha/2)\sqrt{\frac{s_{11}}{n}} \\
\bar{x}_2 - t_{n-1}(\alpha/2)\sqrt{\frac{s_{22}}{n}} \le \mu_2 \le \bar{x}_2 + t_{n-1}(\alpha/2)\sqrt{\frac{s_{22}}{n}} \\
\vdots \\
\bar{x}_p - t_{n-1}(\alpha/2)\sqrt{\frac{s_{pp}}{n}} \le \mu_p \le \bar{x}_p + t_{n-1}(\alpha/2)\sqrt{\frac{s_{pp}}{n}}
\end{gathered}$$

biçiminde elde edilir. Buradaki $i$ inci aralığın $\mu_i$ , $(i=1,2,...,p)$'leri içeren aralıklardan biri olması olasılığının $(1-\alpha)$ olmasını örneklemden önceden bilmemize rağmen, genelde $\mu_i$'leri içeren bütün aralıkların olasılıklarını kesinlikle bilemeyiz. Bu olasılık $(1-\alpha)$ değildir.

Bu problemi biraz açmak için, rasgele değişkenlerin varyans-kovaryans matrisi

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

olan ortak normal dağılıma sahip olduğu özel durumu göz önüne alalım. Varyans-kovaryans matrisi incelendiğinde rasgele değişkenlerin bağımsız olduğu görülmektedir. Böylece her hangi bir değişken üzerinden alınan gözlemler, diğer değişkenler üzerinden alınan gözlemlerden bağımsız olduğundan, bağımsız olaylar için çarpım kuralı uygulanabilir ve örneklem seçilmeden önce

$$P(\mu_i \text{'leri içeren birerli t aralıklarının hepsi}) = (1-\alpha)(1-\alpha)...(1-\alpha)$$
$$= (1-\alpha)^p$$

dir.

**Örnek:** $(1-\alpha)=0.95$ ve $p=6$ olduğunda, eşanlı aralıklar ile *t*-aralıklarını karşılaştırınız.

**Çözüm:** $(1-\alpha)=0.95$ ve $p=6$ olduğunda, $(1-\alpha)^p=(0.95)^6=0.74$ dür. $(1-\alpha)$ olasılığının bileşik ortalamaların bütün durumlarında eşanlılığın geçerliliğini garanti etmesi için, bireysel aralıklar, ayrılmış *t* - aralıklarından daha geniş olmalıdır. Bu genişlik *p*, *n* ve $(1-\alpha)$ 'ya bağlıdır.

$(1-\alpha)=0.95$, $n=15$ ve $p=4$ için birerli ve $T^2$ (eşanlı) aralıklardaki $\sqrt{\frac{s_{ii}}{n}}$ ifadesinin çarpanları sırasıyla,

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)} &= \sqrt{\frac{4(15-1)}{(15-4)}F_{4,15-1}(0.05)} \\ &= \sqrt{\frac{4(14)}{11}(3.36)} \\ &= 4.14\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}t_{n-1}(\alpha/2) &= t_{15-1}(0.025) \\ &= 2.145\end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak eşanlı ($T^2$) aralıkları, birerli (*t*) aralıklarından

$\frac{(4.14-2.145)}{2.145}=0.93$ yani %93 daha geniştir.

**Tablo:** Birerli $t$-aralıkları ile $T^2$ aralıklarının seçilen $n$ ve $p$ , $(1-\alpha)=0.95$ değerleri için kritik değerleri

| $n$ | $t_{n-1}(0.025)$ | $\sqrt{\dfrac{p(n-1)}{(n-p)}F_{p,n-p}(0.05)}$ | |
|---|---|---|---|
| | | $p=4$ | $p=10$ |
| 15 | 2.145 | 4.14 | 11.52 |
| 25 | 2.064 | 3.60 | 6.39 |
| 50 | 2.010 | 3.31 | 5.05 |
| 100 | 1.970 | 3.19 | 4.61 |
| $\infty$ | 1.960 | 3.08 | 4.28 |

Tablodan, $T^2$ aralıklarının, $t$-aralıklarına göre $n$ sabit ve $p$ artığında artmakta ve $p$ sabit, $n$ artığında azalmaktadır.