

3. AKIŞKAN DİNAMİĞİ

3.9. Bernoulli Eşitliğinin Uygulanma Kısıtları

Akışkanlar mekaniğinde temel kabullenmelerden bir tanesi de akışkanın sıkıştırılmaz kabul edilmesidir. Bu kabullenme çoğu sıvılar için doğrudur, ancak gazlar için bazı durumlarda büyük yanlışlıklara neden olmaktadır. Çünkü uygulamada özgül kütle, sıcaklık, basınç her zaman değişir. Ölü nokta basıncının bulunmasında eğer sıcaklığı sabit, özgül kütle $\rho = \frac{P}{RT}$ alır ve Bernoulli eşitliğini izotermal koşul için yazarak

$$\frac{V_1^2}{2g} + z_1 + \frac{RT}{g} \cdot \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

formülünü sıkıştırılmaz akışkanlar için yazabiliriz. İdeal gazın sıkıştırılabilir, düzenli akışı ve izentropik koşulu için ise aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$\left(\frac{k}{k-1}\right) \cdot \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + g \cdot z_1 = \left(\frac{k}{k-1}\right) \cdot \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + g \cdot z_2$$

Bu denklemi, Mach sayısına bağlı olarak boyutsuz formda şu şekilde düzenleyebiliriz.

$$\frac{P_2 - P_1}{P} = \left[\left(1 + \frac{k-1}{2} Ma_1^2\right)^{k/(k-1)} - 1 \right]$$

Bu denklemde (1) indisi normal akım koşullarını, (2) indisi ise ölü nokta koşullarını gösterir. $z_1 = z_2$ ve Mach (mak) sayısı $Ma_1 = V_1/C_1 = V_1/(k \cdot R \cdot T_1)^{1/2}$ alınmıştır.

Yukarıdaki denkleme benzer şekilde sıkıştırılmaz akışkanlar için de aşağıdaki boyutsuz denklem yazılabilir.

$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} = k \cdot \frac{Ma_1^2}{2}$$

Yukarıdaki sıkıştırılabilir ve sıkıştırılmaz akışkanlar için yazılan boyutsuz denklemler bir grafiğe işlenirse Mach sayısının 0,3 değerine kadar birbirinin aynısı olduğu görülür. Bu nedenle genel bir kural olarak ideal gazların akışı Mach sayısının 0,3 ve daha küçük olduğu koşullarda sıkıştırılmaz kabul

edilebilir. Bir başka ifadeyle havanın 102 m/s'ye kadarki hızlarında hava sıkıştırılmaz kabul edilebilir.

Bernoulli eşitliğinin uygulanabilmesi için koşullardan bir tanesi de akımın düzenli olması gerektiğidir. Düzenli akımlarda hız, akım çizgisi üzerindeki uzaklığın (s) bir fonksiyonuydu ($V=V(s)$). Düzensiz (kararsız) akımda ise akım çizgisi boyunca oluşan hız, uzaklığın yanı sıra zamanın da bir fonksiyonudur. Yani $V=V(t)$ 'dir. Buna göre akım çizgisi boyunca düzenli akımlardaki ivme;

$$a_s = V \cdot \frac{\partial V}{\partial s}$$

düzensiz akımlardaki ivme ise;

$$a_s = \frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial s}$$

olmaktadır. Newton'un ikinci kanununu akım çizgisi boyunca kararsız akım için uygularsak Bernoulli eşitliği aşağıdaki gibi elde edilir.

$$P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho_1 \cdot V_1^2 + \gamma \cdot z_1 = \rho \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial V}{\partial t} ds + P_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_2^2 + \gamma \cdot z_2$$

Bu eşitlik Bernoulli eşitliğinin düzensiz akışlar için genel formudur ve düzensiz, sıkıştırılmaz ve sürtünmesiz akımlar için geçerlidir. Düzensiz akım için yazılan Bernoulli eşitliği düzenli akım için yazılandan integral terimi kadar daha fazladır. Genelde bu integrali çözmek olanaksızdır. Çünkü akım çizgisi boyunca $\partial V/\partial t$ değişimi bilinmemektedir. Bazı durumlarda düzensiz (kararsız) akışlar yarı kararlı ya da yarı düzenli kabul edilerek çözülebilmektedir.

Bernoulli eşitliğinin kullanımını sınırlandıran diğer bir kısıt Bernoulli eşitliğinin akım çizgisine dik yönde her zaman kullanılamayacağıdır. Eğer akışkanın basınç çizgileri akım çizgisine dik yönde homojen değilse, Bernoulli eşitliğinin uygulanması büyük hatalara yol açar.

Bernoulli eşitliğini sınırlandıran bir diğer faktörde akışkanın viskoz olmamasıdır. Eğer viskoz kuvvetleri önemliyse bu durumda bir sürtünme ortaya çıkacak ve Bernoulli eşitliği doğru sonuç vermeyecektir.

3.10. Akışkan Dinamiği ve Bernoulli Eşitliğiyle İlgili Uygulama Örnekleri

ÖRNEK-3.1: Yatay boruda akım çizgisi boyunca özgül ağırlığı 8829 N/m³ olan bir yağa 7 m/s²'lik bir ivme kazandırabilmek için basınç gradyenti ($\partial P/\partial s$) ne olmalıdır?

Çözüm:

Akım çizgisi boyunca hareket eden akışkana gelen kuvvetler aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$-\gamma \cdot \sin \theta - \frac{\partial P}{\partial s} = \rho \cdot V \cdot \frac{\partial V}{\partial s}$$

Yatay boruda akım çizgisi de yatay olduğundan ağırlık kuvvetinin akım çizgisi boyunca bileşeni yoktur. Yani $\theta = 0$ olup $\gamma \sin \theta = 0$ 'dır.

$$-\frac{\partial P}{\partial s} = \rho \cdot V \cdot \frac{\partial V}{\partial s}$$

$$\gamma = \rho g$$

$$\rho = \frac{\gamma}{g}$$

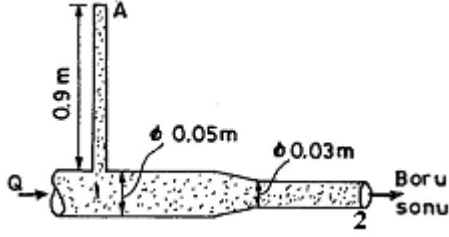
$$V \cdot \frac{\partial V}{\partial s} = 7 \text{ m/s}^2$$

$$-\frac{\partial P}{\partial s} = \frac{8829 \text{ N/m}^3}{9,81 \text{ m/s}^2} \cdot 7 \text{ m/s}^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial s} = -6300 \text{ N/m}^3 (= \text{Pa/m})$$

Buradaki (-) işareti basıncın uzaklıkla azaldığını göstermektedir.

ÖRNEK-3.2: Su, düzenli (kararlı) ve sürtünmesiz olarak aşağıdaki şekilde görülen boruda akmaktadır. Suyun düşey olarak yerleştirilmiş piyezometre borusundan (A noktasından) taşmaması koşuluyla borudan geçen maksimum akışkan verisini bulunuz?



Çözüm:

Piyezometrenin bulunduğu borunun orta noktası (1) ile boru sonu (2)'na Bernoulli eşitliğini uygulayalım. (1) noktasındaki basınç (P_1);

$$P_1 = \left(9810 \text{ N/m}^3\right) \left(0,9 + \frac{0,05 \text{ m}}{2}\right)$$

$$P_1 = 9\,074,25 \text{ Pa}$$

(2) noktasındaki basınç atmosfere açıldığından sıfırdır. Yani $P_2 = 0$ alınacaktır. Borunun orta eksenine referans alınırsa $z_1 = z_2$ olur. Buna göre Bernoulli eşitliğini yazalım.

$$P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_1^2 + \gamma \cdot z_1 = P_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_2^2 + \gamma \cdot z_2$$

$$P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_2^2$$

süreklilik denklemini de (1) ve (2) noktalarına uygulayalım.

$$Q_1 = Q_2$$

$$A_1 \cdot V_1 = A_2 \cdot V_2$$

$$V_2 = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \cdot V_1$$

Burada bulunan V_2 değerini yukarıdaki Bernoulli eşitliğinde yerine koyalım.

$$P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 \cdot V_1^2$$

$$V_1^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \rho - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4\right) = P_2 - P_1$$

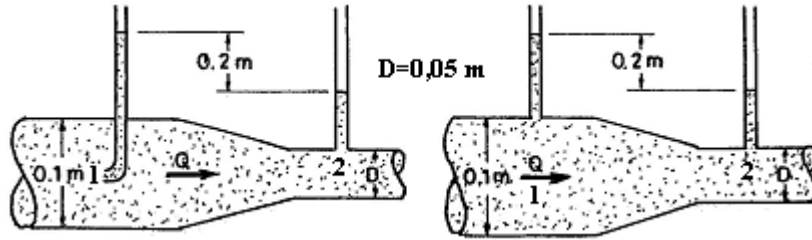
$$V_1^2 = \frac{P_2 - P_1}{\frac{1}{2} \rho \left(1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 \right)} = \frac{0 - 9074,25 \text{ Pa}}{\frac{1}{2} \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \left(1 - \left(\frac{0,05 \text{ m}}{0,03 \text{ m}} \right)^4 \right)}$$

$$V_1 = 1,644 \text{ m/s}$$

$$Q = A_1 \cdot V_1 = \frac{\pi \cdot (0,05 \text{ m})^2}{4} \cdot 1,644 \text{ m/s}$$

$$Q = 3,228 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

ÖRNEK-3.3: Su, aşağıdaki borularda akmaktadır. Borulara pitot tüpü ve piyezometre boruları bağlanmıştır. Şekildeki verilene göre borulardan geçen verdileri hesaplayınız.



Çözüm:

- a) Pitot tüpünün bağlı olduğu boruyu alalım. Bu boruda pitot tüpü ile piyezometre borusundaki su seviyeleri arasındaki fark (0,2 m) dinamik basınca $\left(\frac{1}{2} \rho V_2^2 \right)$ eşittir. Bunu (1) ve (2) noktalarına Bernoulli eşitliğini uygulayarak da görebiliriz.

$$P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_1^2 + \gamma \cdot z_1 = P_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_2^2 + \gamma \cdot z_2$$

$$z_1 = z_2$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (V_2^2 - V_1^2)$$

(1) noktasındaki akışkan hızı sıfırdır. Çünkü pitot tüpünün önü ölü noktadır ve ölü noktadaki hız sıfırdır.

$$V_1 = 0$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_2^2$$

$$\gamma \cdot (0,2 \text{ m}) = \frac{1}{2} \rho \cdot V_2^2$$

$$V_2^2 = \frac{2 \cdot \gamma \cdot (0,2)}{\rho} = \frac{2 \cdot \rho \cdot g \cdot (0,2 \text{ m})}{\rho}$$

$$V_2^2 = 2g \cdot (0,2 \text{ m})$$

$$V_2 = 1,98 \text{ m/s}$$

$$Q = A_2 \cdot V_2$$

$$Q = \frac{\pi \cdot D_2^2}{4} \cdot V_2 = \frac{\pi \cdot (0,05 \text{ m})^2}{4} \cdot 1,98 \text{ m/s}$$

$$Q = 3,88 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

Pitot tüpü ile piyezometre sıvı seviyeleri arasındaki farka (h) der ve bu işlemleri formülize edersek;

$$Q = A_2 \cdot V_2$$

$$Q = \frac{\pi \cdot D_2^2}{4} (2 \cdot g \cdot h)^{1/2}$$

$$Q = 3,48 \cdot D_2^2 \cdot h^{1/2}$$

yazılabilir.

b) Bu şıkta iki piyezometrenin bağlandığı ikinci boruyu ele alalım. Bu boruda da birinci piyezometrenin bağlandığı kısım borunun ortasına (1), ikinci piyezometrenin bağlandığı kısım borunun ortasına (2) diyerek Bernoulli ve süreklilik denklemlerini uygulayalım.

$$P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_1^2 + \gamma \cdot z_1 = P_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_2^2 + \gamma \cdot z_2$$

$$z_1 = z_2 \text{ olduğundan}$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (V_2^2 - V_1^2)$$

$$\gamma \cdot (0,2\text{m}) = \frac{1}{2} \rho \cdot (V_2^2 - V_1^2)$$

$$Q_1 = Q_2$$

$$A_1 \cdot V_1 = A_2 \cdot V_2$$

$$V_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot V_1$$

$$V_2 = \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \cdot V_1 = \left(\frac{0,1\text{ m}}{0,05\text{ m}} \right)^2 \cdot V_1$$

$$V_2 = 4 \cdot V_1$$

$$0,2\gamma = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (16 \cdot V_1^2 - V_1^2)$$

$$0,2\gamma = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (15 \cdot V_1^2)$$

$$V_1^2 = \frac{2 \cdot 0,2\gamma}{\rho \cdot 15} = \frac{2 \cdot (0,2\text{ m}) \cdot (9810\text{ N/m}^3)}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 15}$$

$$V_1 = 0,51\text{m/s}$$

$$Q = A_1 \cdot V_1 = \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} \cdot V_1$$

$$Q = \frac{\pi \cdot (0,1\text{m})^2}{4} \cdot 0,51\text{m/s}$$

$$Q = 0,004\text{m}^3/\text{s}$$

Bu verdiyi formülize edelim. Yine sıvı yükseklik farkına h diyelim.

$$Q = \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} \cdot V_1$$

$$V_1 = \left(\frac{2.h.\gamma}{15\rho} \right)^{1/2} = \left(\frac{2.h.\rho.g}{15\rho} \right)^{1/2} = \left(\frac{2.h.g}{15} \right)^{1/2}$$

$$Q = \frac{\pi.D_1^2}{4} \cdot \left(\frac{2.h.g}{15} \right)^{1/2}$$

$$Q = 0,898D_1^2.h^{1/2}$$

ÖRNEK-3.4: Özgül ağırlığı 9810 N/m³ olan su bir boru içerisinde 9 m/s²lik ivmeyle hareket ediyor;

- a) Akış yukarı yönlü (dik),
b) Akış aşağı yönlü ise basınç gradyentini ($\partial P/\partial s$) bulunuz.

Çözüm:

- a) Akış yukarı yönlü ise ağırlık kuvvetleri akışa karşı koyacak ve $\theta = 90^\circ$ alınacaktır.

$$\rho.V \frac{\partial V}{\partial s} = -\gamma.\text{Sin}\theta - \frac{\partial P}{\partial s}$$

$$\frac{\partial P}{\partial s} = -\rho.V \frac{\partial V}{\partial s} - \gamma.\text{Sin}\theta$$

$$\frac{\partial P}{\partial s} = \left((-1000 \text{ kg/m}^3)(9 \text{ m/s}^2) - \left(9810 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \cdot \text{sin}90 \right) \right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial s} = -18810 \frac{\text{Pa}}{\text{m}}$$

- b) Akış aşağı yönlü ise yerçekiminden kaynaklanan ağırlık kuvveti bileşeni ($\gamma \text{Sin}\theta$) pozitif olacak, akışa yardımcı olacaktır.

$$\rho.V \frac{\partial V}{\partial s} = \gamma.\text{Sin}\theta - \frac{\partial P}{\partial s}$$

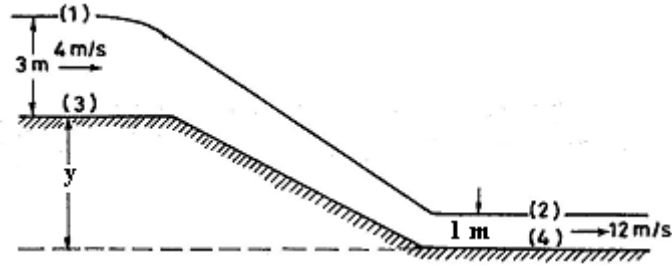
$$\frac{\partial P}{\partial s} = \gamma.\text{Sin}\theta - \rho.V \frac{\partial V}{\partial s}$$

$$\frac{\partial P}{\partial s} = \left(9810 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \cdot \text{sin}90 \right) - \left(1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \cdot (9 \text{ m/s}^2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial s} = 810 \text{ Pa/m}$$

ÖRNEK-3.5: Su, şekilde görülen açık kanalda akmaktadır. (1) noktasındaki su derinliği 3 m, su hızı 4 m/s, (2) noktasındaki su derinliği 1 m ve su hızı 12 m/s'dir. Akışı düzenli, sürtünmesiz kabul ederek;

- a) y uzaklığını,
b) (3) ve (4) noktalarındaki basınçları hesaplayınız.



Çözüm:

- a) (4) noktasını referans eksenini alarak (1) ve (2) noktalarına Bernoulli eşitliğini uygulayalım. Manometrik basınç esas alındığında $P_1 = P_2 = 0$ 'dir.

$$z_1 = y + 3 \text{ m}$$

$$z_2 = 1 \text{ m}$$

$$V_1 = 4 \text{ m/s}$$

$$V_2 = 12 \text{ m/s}$$

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 + \gamma z_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \gamma z_2$$

$$\gamma z_1 = \frac{1}{2} \rho (V_2^2 - V_1^2) + \gamma z_2$$

$$\gamma z_1 = \frac{1}{2} \left(1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \cdot \left((12 \text{ m/s})^2 - (4 \text{ m/s})^2 \right) + (1 \text{ m}) \cdot (\gamma)$$

$$z_1 = \frac{64000 \text{ kg/ms}^2}{\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma} \cdot 1 \text{ m} = \frac{64000 \text{ kg/m} \cdot \text{s}^2}{9810 \text{ N/m}^3} + 1 \text{ m}$$

$$z_1 = 7,524 \text{ m}$$

$$y + 3 \text{ m} = 7,524 \text{ m}$$

$$y = 4,524 \text{ m}$$

- b) Akıma dik yönde (1) ve (3) ile (2) ve (4) noktalarına Bernoulli eşitliğini uygulayalım.

$$P + \rho \cdot \int \frac{V^2}{R} dn + \gamma \cdot z = \text{sabit}$$

eşitliğinde eğrilik yarıçapı ($R=\infty$) olduğundan

$$\rho \cdot \int \frac{V^2}{R} dn = 0$$

alınır ve eşitlik şu hale gelir.

$$P + \gamma \cdot z = \text{sabit}$$

Buna göre (1) ve (3) noktaları için eşitliği yazalım.

$$P_1 + \gamma \cdot z_1 = P_3 + \gamma \cdot z_3$$

$$P_3 = P_1 + \gamma \cdot (z_1 - z_3) = 0 + \left(9810 \frac{N}{m^3} \right) \cdot (3m)$$

$$P_3 = 29\,400 \text{ Pa}$$

Aynı şekilde (2) ve (4) noktalarına Bernoulli eşitliği uygulanırsa;

$$P_2 + \gamma \cdot z_2 = P_4 + \gamma \cdot z_4$$

$$P_4 = P_2 + \gamma \cdot (z_2 - z_4) = \left(0 + 9810 \frac{N}{m^3} \right) \cdot (1m)$$

$$P_4 = 9810 \text{ Pa}$$

ÖRNEK-3.6: 100 mm çaplı bir orifisten çıkan sıvı jetinin daralmış kısmındaki gerçek hız $h = 4$ m yük altında 6,56 m/s'dir.

- a) Hız katsayısını,
b) Ölçülen gerçek verdi 40 l/s olduğunu göre daralma (büzülme) ve verdi katsayılarını hesaplayınız.

Çözüm:

- a) Orifisten çıkan sıvı jetinin gerçek hızı (V_g);

$$V_g = C_v \cdot (2 \cdot g \cdot h)^{1/2}$$

$$C_v = \frac{V_g}{(2 \cdot g \cdot h)^{1/2}} = \frac{6,56 \text{ m/s}}{\left(2,9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4 \text{ m}\right)^{1/2}}$$

$$C_v = 0,740$$

b) Gerçek verdi= $Q = C_c \cdot C_v \cdot A_h \cdot (2 \cdot g \cdot h)^{1/2}$

$$A_h = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$C_d = C_c \cdot C_v$$

$$C_d = \frac{Q}{A_h \cdot (2 \cdot g \cdot h)^{1/2}} = \frac{0,040 \text{ m}^3/\text{s}}{\frac{\pi \cdot (0,1 \text{ m})^2}{4} \cdot \left(2,9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4 \text{ m}\right)^{1/2}}$$

$$C_d = 0,574$$

$$C_d = C_v \cdot C_c$$

$$C_c = \frac{C_d}{C_v} = \frac{0,574}{0,740}$$

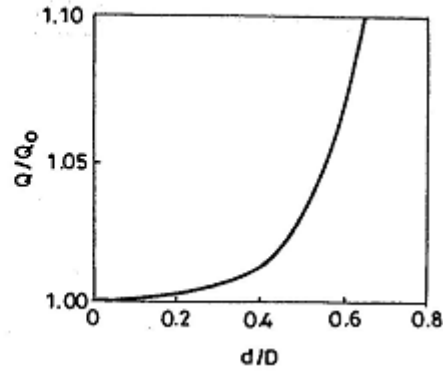
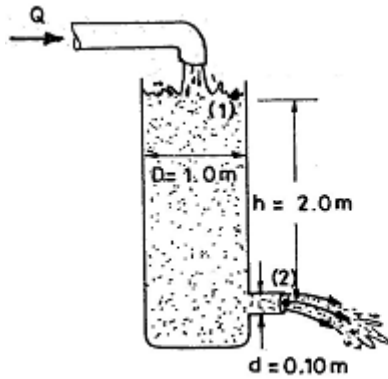
$$C_c = 0,776$$

Hız katsayısı = $C_v = 0,740$

Büzülme katsayısı = $C_c = 0,776$

Verdi katsayısı = $C_d = 0,574$

ÖRNEK-3.7: Su aşağıdaki şekilde görülen depodan çapı $d = 0,10 \text{ m}$ olan lüleden dışarı akmaktadır. Depodaki su yüksekliğinin $h = 2 \text{ m}$ olarak kalması için depoya verilecek Q verdisini bulunuz.



Çözüm:

Akışı düzenli, sürtünmesiz ve sıkıştırılmaz kabul ederek (1) ve (2) noktalarına Bernoulli eşitliğini uygulayalım.

$$P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho_1 \cdot V_1^2 + \gamma \cdot z_1 = P_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho_2 \cdot V_2^2 + \gamma \cdot z_2$$

Burada;

$$P_1 = P_2 = 0$$

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho = \text{sabit}$$

$$z_1 = h$$

$z_2 = 0$ (referans eksenini alındığından)

$$\frac{1}{2} \cdot V_1^2 + g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot V_2^2$$

elde edilir. Her ne kadar depodaki su seviyesi sabit kabul edilse de depoya sürekli su akmasından dolayı (1) kesitinde ortalama bir (V_1) hızı oluşacaktır. Düzenli ve sıkıştırılmaz akım olduğundan süreklilik denklemini kullandığımızda

$$Q_1 = Q_2$$

$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$

$$V_1 = \left(\frac{d}{D} \right)^2 \cdot V_2$$

elde edilir. Yukarıdaki bağıntılar birleştirildiğinde (2) noktasındaki yani lüledeki hız bulunur.

$$V_2 = \left(\frac{2 \cdot g \cdot h}{1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4} \right)^{1/2} = \left(\frac{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 2 \text{ m}}{1 - \left(\frac{0,1}{1} \text{ m} \right)^4} \right)^{1/2}$$

$$V_2 = \left[\frac{39,24}{0,9999} \right]^{1/2} = 6,26 \text{ m/s}$$

$$Q = A_2 \cdot V_2 = \frac{\pi}{4} \cdot (0,1 \text{ m})^2 \cdot \left(6,26 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

$$Q = 0,0492 \frac{m^3}{s}$$

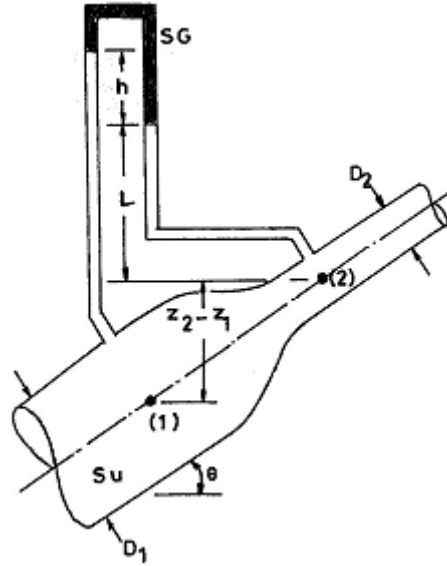
saptanır. Burada depodaki suyun kinetik enerjisini ihmal etmedik, yani $V_1 \neq 0$ aldık.

Eğer depo çapı lülenin çapına göre çok büyük kabul edilirse ($D > d$), $V_1 < V_2$ olur ve $V_1 = 0$ alınabilir. Bu kabullenmenin meydana getirdiği hata aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{V_2}{V_{2/D=\infty}} = \frac{(2.g.h/(1-(d/D)^4))^{1/2}}{(2.g.h)^{1/2}} = \frac{1}{\left(1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right)^{1/2}}$$

bulunur. Q/Q_0 oranını yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi grafiğe dökersek $0 < d/D < 0.4$ iken $1 < Q/Q_0 \leq 1.01$ olduğunu görürüz. Görüldüğü gibi $V_1 = 0$ alınmasıyla hata oranı % 1 olmaktadır. Bu da çok küçüktür ve $V_1 = 0$ alınabilir.

ÖRNEK-3.8: Su aşağıdaki şekilde görülen kesiti değişen boruda akmaktadır. (1) ve (2) noktalarındaki statik basınçlar U-manometresiyle okunmaktadır. Manometrede yağ kullanılmakta olup, yoğunluğu SG ile gösterilmektedir. U-manometresindeki h yüksekliğini bulunuz.



Çözüm:

Akışı düzenli sıkıştırılmaz ve sürtünmesiz kabul ederek (1) ve (2) noktalarına Bernoulli ve süreklilik denklemini uygulayalım.

$$P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_1^2 + \gamma \cdot z_1 = P_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_2^2 + \gamma \cdot z_2$$

$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$

Bu iki eşitliği birleştirelim.

$$P_1 - P_2 = \gamma \cdot (z_2 - z_1) + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_2^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right) \dots \dots \dots (1)$$

Buradaki basınç farkını ($P_1 - P_2$), (1) noktasından başlayıp (2) noktasına giderek manometreden okuyalım.

$$P_1 - \gamma \cdot (z_2 - z_1) - \gamma \cdot (L + h) + SG \cdot \gamma \cdot h + \gamma \cdot L = P_2$$

SG = yağın yoğunluğudur.

$$P_1 - P_2 = \gamma \cdot (z_2 - z_1) + (1 - SG) \cdot \gamma \cdot h \dots \dots \dots (2)$$

Yukarıdaki (1) ve (2) eşitliklerini birleştirdiğimizde;

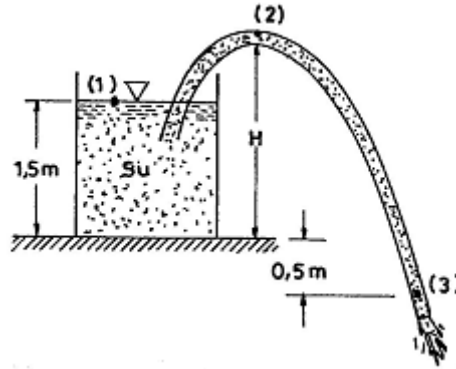
$$(1 - SG) \cdot \gamma \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_2^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right)$$

elde edilir. $V_2 = Q/A_2$ alındığında;

$$h = \left(\frac{Q}{A_2} \right)^2 \cdot \frac{(1 - (A_2 / A_1)^2)}{(2 \cdot g \cdot (1 - SG))}$$

bulunur. Manometredeki (h) yüksekliğinin hesaplanmasında ($z_2 - z_1$) yüksekliğine ihtiyaç yoktur. Çünkü Bernoulli eşitliğinde yükseklik terimi elimine edilmektedir. Bununla birlikte basınç farkı ($P_1 - P_2$), (θ) açısına bağlıdır. Ancak manometredeki (h) yüksekliği (θ)'dan bağımsızdır.

ÖRNEK-3.9: Sıcaklığı 20 C° olan su büyük bir tanktan (yüksekliği 1.5 m), çapı sabit bir boruyla boşaltılmaktadır. Borunun alt ucu ile depo tabanı arasında 0.5 m yükseklik farkı vardır. Atmosfer basıncı 101 330 Pa alınacaktır. Suyun boruyla (sifon) kavitasyon meydana gelmeden boşaltılabilmesi için şekilde görülen H yüksekliği ne olmalıdır.



Çözüm:

Akışı sürekli (düzenli), sürtünmesiz ve sıkıştırılmaz kabul ederek (1), (2) ve (3) noktalarına Bernoulli eşitliğini uygulayalım.

$$P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_1^2 + \gamma \cdot z_1 = P_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_2^2 + \gamma \cdot z_2 = P_3 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_3^2 + \gamma \cdot z_3 \dots\dots\dots(1)$$

Tank tabanını referans eksenini alalım. Buna göre; $z_1 = 1,5$ m, $z_2 = H$ ve $z_3 = -0,5$ m'dir. Tank büyük olduğu için $V_1 = 0$ alınabilir. Tank açık olduğu için $P_1 = 0$ ve sıvı (3) noktasında atmosfere açıldığı için $P_3 = 0$ 'dır Süreklilik denkleminde $A_2 \cdot V_2 = A_3 \cdot V_3$ alınır. Hortum çapı sabit olduğundan $A_2 = A_3$ ve $V_2 = V_3$ 'dir. Buna göre hortumdaki akışkan hızı yukarıdaki (1) nolu eşitlikten aşağıdaki gibi saptanır.

$$V_3 = (2 \cdot g \cdot (z_1 - z_3))^{1/2} = (2 \cdot (9,81 \text{ m/s}^2) \cdot (1,5 \text{ m} - (-0,5 \text{ m})))^{1/2}$$

$$V_3 = 6,264 \text{ m/s}$$

$$V_2 = V_3$$

Yine (1) nolu eşitlikten P_2 basıncı bulunur.

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_1^2 + \gamma \cdot z_1 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_2^2 - \gamma \cdot z_2$$

$$P_2 = \gamma \cdot (z_1 - z_2) - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_2^2 \dots\dots\dots(2)$$

Suyun 20 C° deki buhar basıncı tablolardan 2338 Pa bulunur. Bu nedenle kaviteasyonun oluşmaması için en düşük basınç (boru içindeki) $P = 2338$ Pa olmalıdır. (2) nolu eşitlik ve şekil incelendiğinde en düşük basıncın borunun (2) noktasında oluşacağı görülür. (1) noktasında manometrik basıncı kullandığımızdan ($P_1 = 0$), (2) noktasında da manometrik basıncı kullanmalıyız. Buna göre,

$$P_2 = 2338 \text{ Pa} - 101 \text{ 330 Pa} = -98992 \text{ Pa}$$

$$P_2 = -98992 \text{ Pa}$$

bulunur ve eşitlik (2) den (H) yüksekliği (z_2) elde edilir.

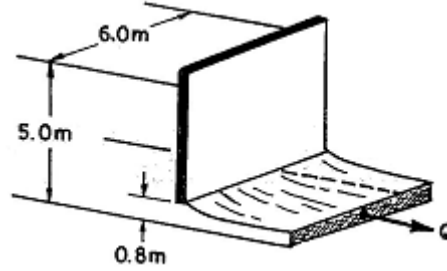
$$-98992 \text{ Pa} = \left(9810 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}\right) \cdot (1,5 \text{ m} - H) - \frac{1}{2} \cdot \left(1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot (6,264 \text{ m/s})^2$$

$$-98992 \text{ Pa} = 14 715 \text{ Pa} - 9810 \cdot H - 19 618,848 \text{ Pa}$$

$$H = 9,591 \text{ m}$$

bulunur. Bu yükseklikten daha büyük ($H > 9,591 \text{ m}$) yüksekliklerde (2) noktasında kavitasyon meydana gelir ve sifon görev yapamaz. Eğer (3) noktası daha aşağı indirilirse verdi artar ve daha küçük H yüksekliği elde edilir.

ÖRNEK-3.10: Su aşağıdaki şekilde görülen açılır-kapanır kapıdan akmaktadır. Kanal genişliği birimine düşen yaklaşık verdi değerini bulunuz.



Çözüm:

Düzenli, sürtünmesiz ve sıkıştırılamaz akışkan için aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$\frac{Q}{b} = z_2 \cdot \left(\frac{2 \cdot g \cdot (z_1 - z_2)}{1 - (z_2 / z_1)^2} \right)^{1/2}$$

Burada; Q/b : birim kanal genişliğine düşen veridir (m^2/s), $z_1 = 5 \text{ m}$, $a = 0,8 \text{ m}$ ve $a/z_1 = 0,16 < 0,20$ olduğundan büzülme katsayısı $C_c = 0,61$ alınabilir.

$$\frac{z_2}{a} = C_c = 0,61$$

$$z_2 = C_c \cdot a = 0,61 \cdot 0,80$$

$$z_2 = 0,488 \text{ m}$$

$$\frac{Q}{b} = (0,488 \text{ m}) \cdot \left(\frac{2 \cdot (9,81 \text{ m/s}^2) \cdot (5 \text{ m} - 0,488 \text{ m})}{1 - (0,488 \text{ m} / 5 \text{ m})^2} \right)^{1/2}$$

$$\frac{Q}{b} = 4,61 \text{ m}^2/\text{s}$$

Eğer, z_1 'in z_2 'den oldukça büyük olduğunu kabul eder ve kapının arkasındaki akışkanın kinetik enerjisini ihmal edersek;

$$\frac{Q}{b} = z_2 \cdot (2 \cdot g \cdot z_1)^{1/2}$$

$$\frac{Q}{b} = (0,488) \cdot (2 \cdot (9,81 \text{ m/s}^2) \cdot (5 \text{ m}))^{1/2}$$

$$\frac{Q}{b} = 4,83 \text{ m}^2/\text{s}$$

Yukarıda kapının arkasındaki suyun hızını (V_1) göz önüne almak ya da almamakla sonucun fazla değişmediğini gözlemlemiş bulunuyoruz. Çünkü derinlik oranı çok büyüktür. $z_1/z_2 = (5 \text{ m})/(0,488 \text{ m}) = 10,2$. Bu sonuca göre kapının arkasındaki akışkanın kinetik enerjisini ihmal etmek sonucu fazla değiştirmemektedir.

ÖRNEK-3.11: Bir uçak 44,72 m/s hızla 3000 m yükseklikte uçmaktadır. Havayı sıkıştırılabilir kabul ederek uçağın ölü noktası olan burnundaki (2) ölü nokta basıncı ile ölü noktanın önündeki (1) noktasındaki basınç farkını ($P_2 - P_1$) bulunuz. Havanın 3000 m yükseklikteki sıcaklığı 268,51 K, özgül ısı katsayısı $k = 1,4$, gaz sabiti 286,9 J/kg-K ve atmosfer basıncı 70 120 Pa (mutlak) alınacaktır.

Çözüm:

Sıkıştırılabilir akışkanlarda Mach sayısı

$$M_{a1} = \frac{V_1}{C_1} = \frac{V_1}{(k \cdot R \cdot T_1)^{1/2}} = \frac{44,72 \text{ m/s}}{1,4 \cdot (286,9 \text{ J/kg} \cdot \text{K}) \cdot (268,51 \text{ K})}$$

$$M_{a1} = 0,1361$$

sıkıştırılabilir akışkanlarda boyutsuz formda aşağıdaki formül yazılabilir.

$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} = \left[\left(1 + \frac{k-1}{2} \cdot (M_{a1})^2 \right)^{k/(k-1)} - 1 \right]$$

$$\frac{P_2 - P_1}{P} = \left[\left(1 + \frac{1,4 - 1}{2} \cdot (0,1361)^2 \right) - 1 \right]$$

$$\frac{P_2 - P_1}{P} = 0,01303$$

$$P_2 - P_1 = 0,01303P_1$$

Buradaki P_1 (1) noktasındaki atmosfer basıncı olup $P_1 = 70\ 120$ Pa olarak verilmiştir. Buna göre basınç farkı aşağıdaki gibidir.

$$P_2 - P_1 = 0,01303 \cdot (70120 \text{ Pa})$$

$$P_2 - P_1 = 914 \text{ Pa}$$

Bu problemi havayı sıkıştırılmaz olarak çözsedydik $P_2 - P_1 = 909$ Pa bulurduk. Buna göre havayı sıkıştırılabilir (914 Pa) ve sıkıştırılmaz (909 Pa) almakla $914 - 909 = 5$ Pa'lık bir fark oluşmaktadır. Bu da ihmal edilebilecek bir değerdir ve Mach sayısının 0,3'den küçük olduğu koşullarda ($Ma_1 < 0,3$) gazlar hem sıkıştırılabilir ve hem de sıkıştırılmaz kabul edilebilir.

ÖRNEK-3.12: Bir Boing 747 uçağı 10 km yükseklikte 0,82 Mach sayısında uçmaktadır. Uçağın kanadındaki ölü nokta basıncını

- Sıkıştırılmaz akış,
- Sıkıştırılabilir (izentropik) akış koşulu için hesaplayınız. 10 000 m yükseklikteki atmosfer koşullarında hava sıcaklığı $-49,9$ C°, mutlak basınç 26500 Pa, özgül kütle $0,414 \text{ kg/m}^3$ ve $k = 1,4$ 'dür.

Çözüm:

a) Akışı sıkıştırılmaz kabul edersek aşağıdaki formülü kullanabiliriz.

$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} = \frac{k \cdot (Ma_1)^2}{2}$$

$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} = \frac{1,4 \cdot (0,82)^2}{2}$$

$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} = 0,417$$

$$P_2 - P_1 = 0,417 \cdot P_1$$

$$P_2 - P_1 = 0,417 \cdot (26500 \text{ Pa})$$

$$P_2 - P_1 = 12\ 481,5 \text{ Pa}$$

c) Akışı sıkıştırılabilir yani izentropik koşul olarak ele alırsak şu eşitliği kullanırız.

$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} = \left[\left(1 + \frac{k-1}{2} (M_{a1})^2 \right)^{k/(k-1)} - 1 \right]$$

$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} = \left[\left(1 + \frac{1,4-1}{2} (0,82)^2 \right)^{1,04/(1,4-1)} - 1 \right]$$

$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} = 0,555$$

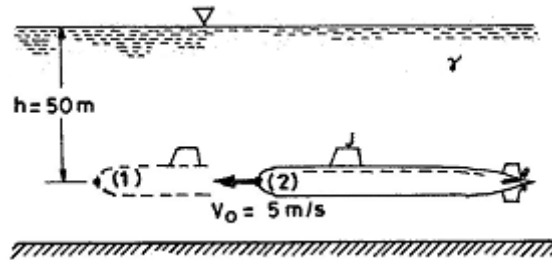
$$P_2 - P_1 = 0,555.P_1$$

$$P_2 - P_1 = 0,555.(26500 \text{ Pa})$$

$$P_2 - P_1 = 14707,5 \text{ Pa}$$

Görüldüğü gibi Mach sayısının 0,82 yani 0,3'den büyük olduğu koşulda sıkıştırılabilirlik faktörünün etkisi büyüktür. Akışı sıkıştırılabilir akış olarak aldığımızdaki basınç, sıkıştırılamaz koşulundaki basınçtan yaklaşık 14 707,5 Pa/12 481,5 Pa= 1,178 kat daha büyüktür. Bu oran bazı durumlarda önemli olabilir. Mach sayısının 1'den büyük ($M_{a1} > 1$) olduğu koşullarda sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz akışkan sonuçları arasındaki farklılıklar sadece miktar yönünden değil içerik yönünden de önem kazanmaktadır.

ÖRNEK-3.13: Bir denizaltı aşağıda görüldüğü gibi yoğunluğu $\gamma = 1,03$ olan suda $V_0 = 5 \text{ m/s}$ hızla 50 m derinlikte hareket etmektedir. Ölü nokta olan (2) noktasındaki basıncı bulunuz.



Çözüm:

Yere bağlı koordinat sisteminde akışkan düzensiz (kararsız)'dır. Örneğin (1) noktasındaki su hızı, denizaltı 2 de iken, sıfırdır ki bu nokta denizaltının başlangıç noktasıdır. Ancak (2) noktası yani denizaltının burnu (1) noktasına geldiğinde $\vec{V}_1 = -\vec{V}_0$ olacaktır. Buna göre hızın zamana göre kısmi türevi olan

$\frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} \neq 0$ 'dır ve akım kararsız yani düzensizdir. (1) ve (2) noktalarına düzenli akımlarda kullanılan Bernoulli eşitliğini uyguladığımızda bizi yanlışla götüren şu eşitliği elde ederiz.

$$P_1 = P_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_0^2$$

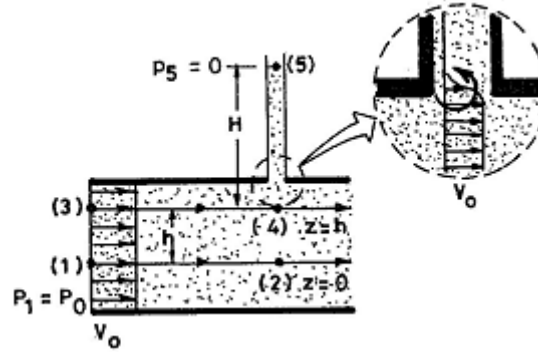
Bu sonuca göre statik basınç (P_1) ölü nokta basıncından (P_2) daha büyük olacaktır. Bu Bernoulli eşitliğinin yanlış kullanımına tipik bir örnektir.

Bu örneğe düzenli akım koşullarını uygulayalım ve koordinat sistemini denizaltıya bağlayalım. Bu durum bize akışın düzenli olmasını verir ve doğru yöntem de budur. Bu durumda Bernoulli eşitliğini uyguladığımızda;

$$P_2 = \frac{\rho \cdot V_1^2}{2} + \gamma \cdot h = \frac{(1030 \text{ kg/m}^3) \cdot (5 \text{ m/s})^2}{2} + \left(10094 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}\right) \cdot (50 \text{ m})$$

$$P_2 = 517900 \text{ Pa}$$

ÖRNEK-3.14: Aşağıdaki şekilde boruda homojen bir akış vardır. Bernoulli eşitliğinin (1)-(2), (3)-(4) ve (4)-(5) noktalarına uygulanışını irdeleyiniz. Sıvıya bağlı düşey piyezometre borusu sabittir, hareket etmemektedir.



Çözüm:

Eğer akım düzenli, sürtünmesiz ve sıkıştırılmaz kabul edilirse Bernoulli eşitliği (1) ve (2) noktalarına aşağıdaki gibi uygulanabilir.

$$P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_1^2 + \gamma \cdot z_1 = P_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_2^2 + \gamma \cdot z_2 = C_{12} = \text{sabit}$$

$$V_1 = V_2 = V_0$$

$z_1 = z_2 = 0$ olduğundan $P_1 = P_2 = P_0$ 'dır. Buna göre Bernoulli sabiti (C_{12});

$$C_{12} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_0^2 + P_0$$

Akım boyunca (3) ve (4) noktalarında

$$V_3 = V_4 = V_0$$

$$Z_3 = Z_4 = h$$

olur ve $P_3 = P_1 - \gamma h$ elde edilir. Çünkü akım çizgileri düz ve yataydır. Yukarıda verilenler birleştirildiğinde ve (3) ile (4) noktalarına uygulandığında $P_3 = P_4$ olduğu anlaşılır ve (3)-(4) arasındaki Bernoulli sabiti (1)-(2) arasındaki Bernoulli sabitine eşittir.

$$C_{34} = C_{12}$$

ya da

$$P_3 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_3^2 + \gamma \cdot z_3 = P_4 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_4^2 + \gamma \cdot z_4 = C_{34} = C_{12}$$

Şekildeki herhangi bir akım çizgisi boyunca oluşan Bernoulli sabitleri birbirine eşittir. Bu nedenle;

$$P + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 + \gamma \cdot z = \text{sabittir.}$$

Ayrıca;

$$P_4 = P_5 + \gamma \cdot H$$

$$P_4 = 0 + \gamma \cdot H$$

$$P_4 = \gamma \cdot H$$

olduğu görülür. Eğer Bernoulli eşitliğini akım çizgisine dik yönde yani (4) ve (5) noktalarına uyguladığımızda yanlış sonuç bulunur ve

$$H = \frac{P_4}{\gamma} + \frac{V_4^2}{2 \cdot g}$$

elde edilir. Halbuki doğru sonuç

$$H = \frac{P_4}{\gamma} \text{ 'dır.}$$

Yukarıdaki sonuca göre Bernoulli eşitliğini akım çizgisi boyunca uygulayabiliriz (1-2 ve 3-4). Akım çizgisine dik yönde yani (4)-(5) noktaları arasına uygulayamayız. Bunun nedeni akımın boru boyunca dönmemesi fakat piyezometre tüpü ile akan akışkan arasında bir dönme etkisinin bulunmasıdır.

Boruya dik doğrultudaki homojen hız profili nedeniyle borudaki akışkan hareket ederken dönmemektedir. Fakat piyezometrenin bağlı olduğu bölümde (4) ile (5) arasında çok ince bir kesme (kayma) tabakası vardır ve birbirine komşu olan tanecikler birbirlerini etkiler ve dönme meydana gelir. Dönmenin meydana geldiği akımlara Bernoulli eşitliği uygulanamaz.