4. AKIŞKANLARIN KİNEMATİĞİ

4.1. Hız Alanı

Akışkanların akım çizgileri, bu çizgiler üzerindeki hızları ve ivmeleriyle ilgilenen bilim dalına kinematik denir. Kinematik akışkan kütlesinin hareketini etkileyen kuvvetler göz önüne alınmadan hareket halindeki akışkan taneciklerinin zaman boyutundaki hız değişimlerini inceleyen bilim dalıdır. Akışkan taneciklerinin yer ve zamana göre hızı ile ilgili ilişkiler incelenir. Akışkanların hareketi akışkan taneciklerinin hızı ve ivmesiyle tanımlanır. Belli bir zamanda bir akışkanın özgül kütle, hız ve ivme gibi özellikleri akışkanın konumunun bir fonksiyonu olarak verilebilir. Akışkan parametrelerinin uzay koordinatlarının fonksiyonu olarak gösterimi akışkanın *alan gösterimi* olarak adlandırılır. Ancak yalnızca uzay koordinatlarıyla parametrenin tanımı yeterli olmamakta zamanında gözönüne alınması gerekmektedir. Bir odanın sıcaklığı uzay koordinatları yanında zamana da bağımlı olarak T= T(x, y, z, t) biçiminde tanımlanmalıdır. Akışkan değişkenlerinin en önemlilerinden birisi hız alanıdır. Hız alanı aşağıdaki gibi formülize edilebilir (Buffler 2009, Çengel ve Cimbala 2008).

$$\vec{V} = u(x, y, z, t)\vec{i} + v(x, y, z, t)\vec{j} + w(x, y, z, t)\vec{k}$$

Burada; u, v ve w hız vektörünün sırayla x, y ve z bileşenleridir. Bir akışkan taneciğinin hızı o taneciğin konum vektörünün zamana göre türevidir.

Koordinat sistemine göre A taneciğinin konumu onun *konum vektörüyle* $(\vec{r}_A)$ verilir. Konum vektörü tanecik hareket ediyorsa zamanın bir fonksiyonudur. Bu konumun zamana göre türevi bize taneciğin hızını verir.

$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{V}_A$$

Hız vektörel bir büyüklük olduğundan hem doğrultusu ve hem de değeri vardır. Hız vektörünün skaler değeri;

$$V = \left|\vec{V}\right| = (u^2 + v^2 + w^2)^{1/2}$$

eşitliği ile bulunur (Edis 1972a).

4.2. Lagrange ve Euler Akış

Akışkanların kinematiğinde akım sorunlarının çözümünde *Lagrange ve Euler* olmak üzere iki yöntem vardır. *Euler* yönteminde bireysel akışkan taneciğinin hareketi izlenmemekte, akım alanı içerisinde sabit bir noktadan geçen akışkan taneciklerinin parametrelerinin zamana göre değişimleri gözönüne alınmaktadır. Akışkan içerisinde koordinatları belli olan herhangi bir

A(x, y, z) noktası ele alınır ve bu noktadaki hız, basınç ve benzer özellikler incelenir(Buffler 2009).

Lagrange yönteminde gözönüne alınan akışkan taneciğinin yörüngesi boyunca olan hareketi incelenir (Ayyıldız 1983). Akım içerisinde sabit noktalar alınmaksızın her bireysel akışkan taneciğinin hareketi izlenmekte ve her an akışkan taneciğinin ortamdaki konumu belirlenmektedir. Buna göre akım alanı içerisinde akışkan taneciğinin koordinatları zamanın fonksiyonu olarak sürekli değişmektedir. Lagrange yöntemi ile sürekli bir akıma ait akışkan taneciklerinin gözönüne alınan belli bir zaman içindeki yörünge, hız ve ivmeleri saptanır (Edis 1972a).

Euler ve Lagrange yöntemleri arasındaki farklılığı ortaya koymak için bir bacadan çıkan dumanı irdeleyelim. Euler yönteminde bacanın bir noktasına bir termometre yerleştirilir ve bu noktadaki sıcaklık zamana bağlı olarak ölçülür. Farklı zamanlarda termometreden farklı akışkan taneciklerinin sıcaklığı ölçülür. T= T(x, y, z, t) bulunur. Lagrange yönteminde, termometre bir akışkan taneciğine bağlanır ve taneciğin hareketi süresince sıcaklığı okunur. Buna göre taneciğin sıcaklığı zamanın fonksiyonu olarak T= T(t) şeklinde elde edilir. Euler ve Lagrange yöntemleri arasında geçiş yapılabilir. Euler yöntemi daha kolay ve daha kullanışlıdır. Ancak bazı durumlarda Lagrange yöntemini kullanmak gerekir. Örneğin x ışınlarını kullanarak damarlardaki kanın akışı ve kanın hareketi Lagrange yöntemiyle izlenebilir. Pompa ve türbin gibi makinelerdeki akışkan hareketinin konumlanmasında Lagrange yöntemini kullanmak gerekebilir (Buffler 2009).Her yıl göç eden binlerce kuş hakkında bilgi edinmede bu yöntemler örnek verilebilir. Örneğin belli bir yerden bir saatte geçen kuş sayısının bulunması Euler yöntemine uymaktadır. Bir kuşun izlediği yolun belirlenmesinde kuş etiketlenir ve radyo dalgalarıyla hareketi göç sırasında izlenir. Bu da Lagrange yönteminin uygulanışına tipik bir örnektir (Munson vd.1983).

4.3. Bir, İki ve Üç Boyutlu Akımlar

Akış yalnızca bir yönde ise ve ayrıca basınç, hız, ivme ve özgül kütle gibi büyüklükler ele alınan bir eksenin ve zamanın fonksiyonu olarak belirtilebiliyorsa bu akış bir boyutlu akıştır. Örneğin kartezyen koordinatlarında x ekseni yönündeki akış bir boyutludur. Tek boyutlu akışta hız $\vec{V} = u\vec{i}$ ile gösterilir.

İki boyutlu akış, akım çizgilerinin bir düzlem içinde bulunması ve birbirlerine paralel düzlem serileri biçiminde olması halinde meydana gelmektedir. Kartezyen koordinatlarında x ve y eksenleri yönündeki akış iki boyutlu akıştır. Böyle bir akışta akım çizgileri birbirine paralel düzlemler meydana getirirler. İki boyutlu akım hızı $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$ biçiminde gösterilir.

Akışkan taneciklerinin kartezyen koordinatlarında x, y ve z eksenleri yönündeki akımı üç boyutlu akım olarak adlandırılmaktadır. Akışkan taneciklerinin her üç eksen yönünde hız bileşenleri vardır. $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$

Uygulamada çoğunlukla hız üç boyutludur. Ancak pek çok durumda sonucu fazla etkilemeden problemin çabuk ve kolay çözümlenmesi için akış bir ya da iki boyutlu kabul edilmektedir (Edis 1972a, Ayyıldız 1983).

4.4. Akım Çizgisi, Yörünge ve Çıkış Çizgisi

Herhangi bir t anında ardı ardına sıralanmış olan noktalardaki hız vektörlerine çizilen teğetlere akım çizgisi denir. Hızlar akım çizgisine teğettir, hızın akım çizgisine dik yönde bir bileşkesi yoktur. Akım çizgileri birbirlerini kesmezler. Akım çizgileri hız alanına teğet olan vektörleri tanımlayan eşitliğin integrali alınarak analitik olarak bulunabilir. Üç boyutlu akımda bu eşitlik aşağıdaki gibi yazılabilir (Çengel ve Cimbala 2008).

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

Bir akışkan taneciğinin t_1 ile t_2 zaman aralığında üzerinde hareket ettiği yola yörünge denir. Düzenli akımlarda akım çizgisi ile yörünge üst üste çakışmaktadır. Başlangıcı r_0'da olan bir taneciğin yörüngesi $\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t)$ ile gösterilir.

Herhangi bir t anında uzayda herhangi bir noktadan geçen akışkan tanecikleri dizisine çıkış (sınır, ihraç) çizgisi denir. Başka bir ifadeyle verilen herhangi bir noktadan geçen akışkan taneciklerinin bir t anındaki yerlerini birleştiren çizgiye çıkış çizgisi denir. Bir akışkana verilen sıvı boya dağılmadan hareket ederse, bu boya tamamen bir çıkış çizgisini temsil eder. Hız alanı zamanın fonksiyonu olmadığında yani akım düzenli olduğunda akım çizgileri, yörünge ve çıkış çizgileri aynı bir denklemle ifade edilebilir ve birbirleriyle çakışır (Ayyıldız 1983).

4.5. Düzenli, Düzensiz, Homojen ve Homojen Olmayan Akımlar

Akım alanı içerisinde herhangi bir noktadaki akım hızının büyüklük ve yönünün zamanla değişmediği akımlara düzenli akım denir. Akım alanı içerisinde farklı noktalarda hızlar farklı olabilir ancak hızın her noktasındaki büyüklüğü ve yönü zamana göre sabittir. Özetle bu akımda zaman göz önüne alınmaz (Ayyıldız 1983). Uzayda herhangi bir noktanın yeri zamanla değişmez. Aynı şekilde özgül kütle (ρ), basınç (P) ve sıcaklık (T) gibi diğer özelliklerde de zamana göre bir değişme meydana gelmez. Bu özellikler düzenli akım koşulu için matematiksel olarak;

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0\,, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\,, \qquad \frac{\partial P}{\partial t} = 0\,, \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = 0\,,$$

biçiminde yazılabilir. Düzenli akıma kararlı, stasyoner daimi akım da denmektedir.

Akım alanı içerisinde herhangi bir noktadaki akım hızının büyüklük ve yönünün zamanla değiştiği akımlara düzensiz akım denir. Bu akımda hız;

$$\frac{\partial V}{\partial t} \neq 0$$

olarak gösterilebilir. Düzensiz akımda akım çizgilerinin konumları sabit olmayıp zamana bağlı olarak değişmektedir. Düzensiz akımı incelemek zordur. Bu nedenle düzenli akım kabulü yapmak her zaman işlemleri kolaylaştırmaktadır. Düzensiz akımlar periyodik olmayan, periyodik ve gerçek rastgele akım olarak üçe ayrılabilir. Periyodik olmayan akıma akmakta olan suyun bir vanayla önünün kesilmesi örnek verilebilir. Benzin-hava karışımının karbüratöre alınması periyodik bir akıştır. Turbulent akımda düzensiz akım karakteri rastgeledir ve pratikte en fazla bu akışla karşılaşılır. Rüzgârın düzensiz rastgele esmesi buna bir örnektir.

Akım alanı içerisinde her noktadaki akım hızının büyüklük ve yönünün sabit olduğu akımlara homojen (uniform) akım denir. Hızın değeri ve yönü her noktada aynıdır ve

$$\frac{\partial V}{\partial s} = 0$$

yazılabilir. Burada “s” mesafeyi göstermektedir. Uzun ve düz boruda akan su bu akım tipine örnek verilebilir.

Akım hızının büyüklük ve yönünün herhangi bir zamanda bir yerden başka bir yere değişiklik gösterdiği akımlara homojen olmayan (non-uniform) akım denir ve;

$$\frac{\partial V}{\partial s} \neq 0$$

şeklinde tanımlanabilir. Daralan kesitte veya eğri boruda suyun akımı homojen olmayan akıştır (Ayyıldız 1983).

4.6. Maddesel Türev

Çok az kullanılan Langrange yönteminde akışkanın ivmesi katı cisim dinamiğinde olduğu gibi a= a(t) ile belirlenmektedir. Euler yönteminde ise ivme taneciğin konumuna ve zamana bağlı olarak ivme alanı ile ifade edilmektedir. Munson vd.(1994) ‘e göre maddesel türev aşağıdaki gibi verilebilir.

Şekil 4.1’de görüldüğü gibi hızı $\vec{V}_A$ olan bir akışkan taneciğinin hızı konumun ve zamanın bir fonksiyonudur.

$$\vec{V}_A = \vec{V}_A(\vec{r}_A, t) = \vec{V}_A\left[x_A(t), y_A(t), z_A(t), t\right]$$

Burada; $x_A = x_A(t)$, $y_A = y_A(t)$, $z_A = z_A(t)$ hareket eden taneciğin konumunu vermektedir. Hız, hem zamanın ve hem de konumun fonksiyonu olduğundan zamanla konumda meydana gelen değişim nedeniyle değişecektir. A taneciğin ivmesi;

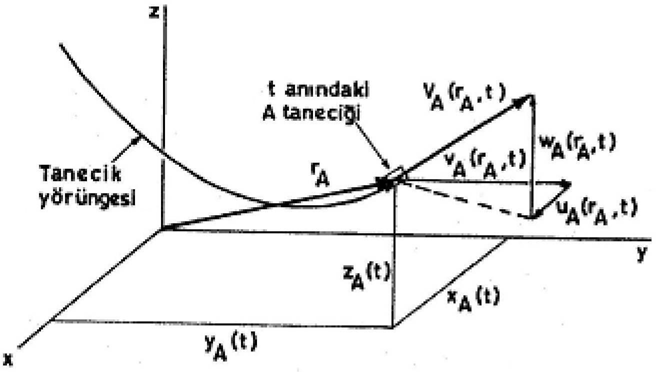
$$\vec{a}_A(t) = \frac{d\vec{V}_A}{dt} = \frac{\partial \vec{V}_A}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}_A}{\partial x}.\frac{dx_A}{dt} + \frac{\partial \vec{V}_A}{\partial y}.\frac{dy_A}{dt} + \frac{\partial \vec{V}_A}{\partial z}.\frac{dz_A}{dt}$$

Taneciğin hız bileşenleri:

$$u_A = \frac{dx_A}{dt} \qquad v_A = \frac{dy_A}{dt} \qquad w_A = \frac{dz_A}{dt}$$

olduğundan ivme eşitliği aşağıdaki biçime dönüşür.

$$\vec{a}_A = \frac{\partial \vec{V}_A}{\partial t} + u_A \frac{\partial \vec{V}_A}{\partial t} + v_A \frac{\partial \vec{V}_A}{\partial y} + w_A \frac{\partial \vec{V}_A}{\partial z}$$



Şekil 4.1. Akışkan taneciğinin (t) anındaki konumu ve hızı (Munson vd. 1994)

Bir tanecik için yazılan bu eşitliği genel eşitlik biçimine dönüştürdüğümüzde;

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

şeklini alır. Vektörel formdaki bu ifadeyi skaler formda yazdığımızda;

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$ eşitlikleri elde edilir (Çengel ve Cimbala 2008).

Burada a_x, a_y ve a_z: sırasıyla ivmenin x, y ve z koordinat bileşenleridir. Yukarıdaki eşitlikler m*addesel türev* olarak adlandırılır ve kısa formda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

Bu maddesel türevdeki operatör (işlemci) D( )/Dt aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\frac{D(\,)}{Dt} = \frac{\partial(\,)}{\partial t} + u\frac{\partial(\,)}{\partial x} + v\frac{\partial(\,)}{\partial y} + w\frac{\partial(\,)}{\partial z}$$

$$\frac{D(\,)}{Dt} = \frac{\partial(\,)}{\partial t} + (\vec{V}\vec{\nabla})(\,)$$

Buradaki vektör işlemcisi Del (∇);

$$\vec{\nabla}(\,) = \frac{\partial(\,)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(\,)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial(\,)}{\partial z}\vec{k}$$

biçimindedir. Yukarıdaki bağıntıdaki $(\vec{V}\vec{\nabla})$ ise aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\vec{V}.\vec{\nabla}(\,) = u\frac{\partial(\,)}{\partial x} + v\frac{\partial(\,)}{\partial y} + w\frac{\partial(\,)}{\partial z}$$

Yukarıdaki ivme bağıntılarında hızın zamana göre değişimini ifade eden. $\partial\vec{V}/\partial t$'ye "Lokal ivme" denir. Herhangi bir t anında hareket doğrultusunda noktadan noktaya hızın değişimine *konvektif ivme* denir ve bileşenleri aşağıdaki gibidir.

$$\text{Konvektif ivme} = u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}$$

Hareket halindeki akışkanın ivmesi lokal ve konvektif ivmelerden oluşur. Eğer akım düzenli ise lokal ivme sıfırdır.

Maddesel türev yalnızca ivmenin değil diğer akışkan özelliklerinin de analizinde çok yararlıdır. Herhangi bir değişkenin maddesel türevi; o değişkenin zamanla değişiminin bir hızıdır. Örneğin bir akışkanda sıcaklık alanı T= T(x, y, z, t) olsun. Bu sıcaklık alanı içerisinde bir akışkan taneciğinin (A) sıcaklığının değişim hızının bulunması istensin. Eğer hız alanı $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$ biliniyorsa, sıcaklığın değişim hızı aşağıdaki eşitliklerden bulunabilir.

$$\frac{\partial T_A}{dt} = \frac{\partial T_A}{\partial t} + \frac{\partial T_A}{\partial x}.\frac{dx_A}{dt} + \frac{\partial T_A}{\partial y}.\frac{dy_A}{dt} + \frac{\partial T_A}{\partial t}.\frac{dz_A}{dt}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V}.\overrightarrow{\nabla T}$$

Yine örnek olarak özgül kütledeki değişim maddesel türeve bağlı olarak aşağıdaki gibi verilebilir;

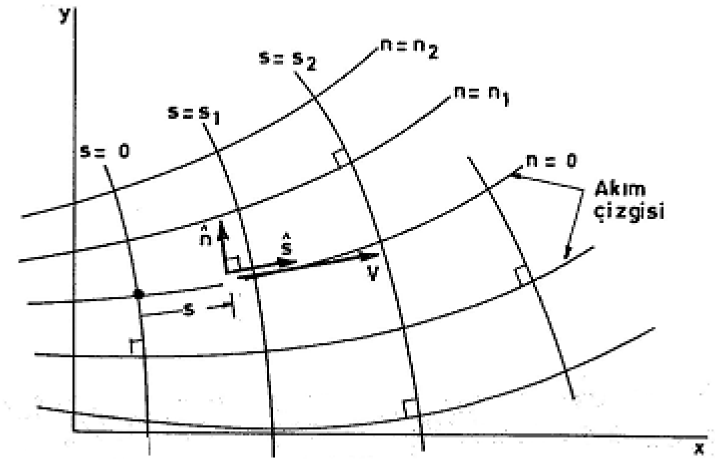
$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}$$

Buradaki; $D\rho / Dt$: herhangi bir taneciğin akım alanından geçerken özgül kütlesinin maddesel türevi olarak isimlendirilir. Eşitliğin sağ tarafındaki son üç terim herhangi bir t anında hareket doğrultusunda özgül kütlenin değişimini ifade ettiğinden konvektif değişim, ilk terim ise herhangi bir noktada zaman değişimi içerisinde özgül kütle değişimini ifade ettiğinden lokal değişim adını alır.

Maddesel türev hareket eden taneciğin herhangi bir özelliğinin zamanla değişimini bulmak için kullanılmasının yanında diğer alanlarda da kullanılabilir Maddesel türevin herhangi bir alana uygulanabilmesi için iki koşul vardır. Bunlar; ele alınan parametrenin, alan tanımı ile hız alanı tanımıdır.

4.7. Akım Çizgisi Koordinatları

Pek çok akışta, akışın akım çizgileriyle ilgili koordinat sistemini kullanmak gerekebilir. Buna bir örnek olarak Şekil 4.2’de gösterilen düzenli, iki boyutlu akım verilebilir. Bu tür akımlar kartezyen koordinatlarıyla, r ve θ’yı içeren kutupsal koordinatlarla ya da akım çizgisi koordinatlarıyla gösterilebilir. Akım çizgisi koordinat sisteminde akım çizgisi boyunca (s) ve akım çizgisine dik (n) sembolüyle akış tanımlanır. Şekilde bu yöndeki birim vektörler $(\vec{s})$ ve $(\vec{n})$ ile gösterilmiştir. Koordinat uzaklığını gösteren (s) ile birim vektör olan $(\vec{s})$ birbirine diktir. Ancak sabit (n) ve sabit (s) çizgileri düz değildir. Akım çizgisi koordinatlarının en büyük yararı hızın sürekli (s) doğrultusuna teğet kalmasıdır. Yani $\vec{V} = V.\vec{s}$’dir. Bu, akışkanın tanecik ivmesini tanımlamada ve akımla ilgili problemleri çözmede kolaylık sağlar. Örneğin düzenli ve iki boyutlu akımda ivme aşağıdaki gibi yazılabilir.



Şekil 4.2. Akım çizgisi koordinatları (Munson vd. 1994)

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = a_s.\vec{s} + a_n.\vec{n}$$

$$\vec{a} = V\frac{\partial V}{\partial s}\vec{s} + \frac{V^2}{R}\vec{n}$$

Skaler formda ise

$$a = (a_s^2 + a_n^2)^{1/2}$$

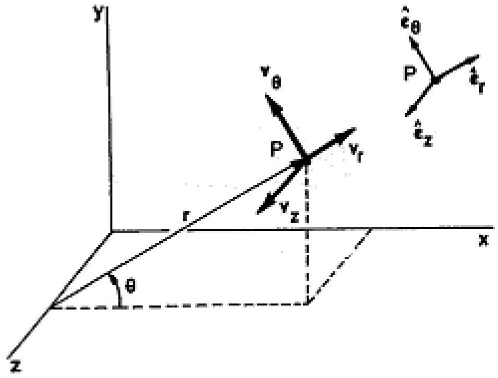
$$a_s = V.\frac{\partial v}{\partial s} \text{ ve } \partial_n = \frac{V^2}{R}$$

biçiminde yazılabilir. Burada; R eğrilik yarıçapıdır. İvmenin ilk terimi akım çizgisi boyunca oluşan konvektif ivmeyi, ikinci terim (V^2/R) ise akışkan hareketine dik santrifüj ivmeyi verir. Birim vektör $(\vec{n})$'in akım çizgisinden eğrinin merkezine doğru yöneldiği unutulmamalıdır (Munson vd. 1994).

4.8. Silindirikal (polar) Koordinatlar

Silindirikal koordinatlarda r, θ ve z koordinatları kullanılır (Şekil 4.3). Şekilde;

r = z ekseninden olan radyal uzaklık
θ= x eksenine paralel bir çizgiyle r arasındaki açı
z= z ekseni boyunca ölçülen uzaklıktır.



Şekil 4.3. Silindirikal koordinatlar (Munson vd. 1994)

Şekildeki P noktasının hızı v_r: radyal hızı v_θ teğetsel hız ve v_z: aksiyal hız bileşeni olmak üzere aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\vec{V} = v_r.\vec{e}_r + v_\theta.\vec{e}_a + v_z.\vec{e}_z$$

Buradaki; $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ ve $\vec{e}_z$ ilgili birim vektörlerdir. Silindirikal koordinatlardaki maddesel türev;

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{dt} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial r}v_r + \frac{1}{r}.\frac{\partial\vec{V}}{\partial\theta}v_\theta + \frac{\partial\vec{V}}{\partial z}v_z$$

olarak yazılabilir (Munson vd. 1994).

4.9. Akışkanların Kinematiğiyle İlgili Uygulama Örnekleri

ÖRNEK-4.1: Üç boyutlu bir akımda hız bileşenleri u= 4x, v= 4y ve w= -8z olarak verilmiştir.

a) Bu akım düzenli akım mıdır?
b) A(2, 4, 6) noktasındaki hız ve ivme bileşenleri ile bileşke hız ve ivme değerlerini bulunuz.

Çözüm:

a) Bir akımın düzenli akım olabilmesi için hız bileşenlerinin zamana göre kısmi türevlerinin sıfır olması gerekmektedir. Yanı;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

olmalıdır.

$$\frac{\partial(4x)}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial(4y)}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial(-8z)}{\partial t} = 0$$

olduğundan akım düzenlidir.

b) A(2, 4, 6) noktasında x= 2, y= 4 ve z= 6'dır.
Hız bileşenleri;

$u= 4x = 4(2)= 8$ m/s

$v= 4y = 4(4)= 16$ m/s

$w= -8z= -8(6)= -48$ m/s

Bileşke hız değeri (V);

$V= (u^2+v^2+z^2)^{1/2}$

$V= (8^2+16^2+(-48)^2)^{1/2}$

$V= 51,22$ m/s

İvme bileşenleri;

$x = 2,\ y = 4$ ve $z = 6$

$$a_x = u.\frac{\partial u}{\partial x} + v.\frac{\partial u}{\partial y} + w.\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$a_x = 4x.4 + 4y.0 + (-8z).0 + 0$$

$$a_x = 32 \text{ m/s}^2$$

$$a_y = u.\frac{\partial v}{\partial x} + v.\frac{\partial v}{\partial y} + w.\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$a_y= 4x.0+4y.4+(-8z).0+0$$

$$a_y= 64 \text{ m/s}^2$$

$$a_z = u.\frac{\partial w}{\partial x} + v.\frac{\partial w}{\partial y} + w.\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$a_z = 4x.0 + 4y.4 + (-8z).0 + 0$$

$$a_z = 384 \text{ m/s}^2$$

Bileşke ivme (a);

$$a = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)^{1/2} = (32^2 + 64^2 + 384^2)^{1/2}$$

$a = 390{,}61 m/s^2$

ÖRNEK-4.2: Titreşimli yağmurlama başlığından çıkan suyun hızı

$$\vec{V} = u_0.\mathrm{Sin}\left[w.\left(t - \frac{y}{v_0}\right)\right].\vec{i} + v_0\vec{j}$$

ile verilmektedir. Burada u_0, w ve v_0 sabitlerdir. (y) ekseni üzerindeki hız bileşeni sabit kalmaktadır ($v=v_0$). Hızın (x) bileşeni (y= 0'da) $u=u_0.\mathrm{Sin}(w.t)$ olmaktadır.

a) t= 0 ve $t = \pi/2.w$ 'da orijinden geçen akım çizgilerini saptayınız.
b) t= 0 ve $t = \pi/2.w$ 'da orijinden geçen taneciklerin yörüngelerini bulunuz.

Çözüm:

a) $u = u_0.\mathrm{Sin}\left(w.\left(t - \frac{y}{v_0}\right)\right)$ ve $v= v_0$ olduğundan akım çizgilerinin bulunması için kullanılan denklemi yazalım;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_0}{u_0.(\mathrm{Sin}(w.(t-y)/v_0))}$$

Herhangi bir (t) zamanı için bu denklemin integrali alınırsa;

$$u_0.\left(\frac{v_0}{w}\right).\mathrm{Cos}\left[w.\left(t - \frac{y}{v_0}\right)\right] = v_0.x + c \quad \text{...(1)}$$

elde edilir.

Burada;

c : Sabittir. Orijinde (x= 0 ve y= 0) ve t= 0 anında geçen akım çizgisi için, (c) nin değeri ilgili değerleri yerine koyarak (1) nolu eşitlikten;

$$c = \frac{u_0.v_0}{w}$$

olarak bulunur. Bu nedenle bu koşuldaki akım çizgisi için akım çizgisi eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$x = \frac{u_0}{w}.\left[\mathrm{Cos}\left(\frac{w.y}{v_0}\right) - 1\right] \quad \text{..(2)}$$

Benzer şekilde t= π/2.w için de orijinden geçen akım çizgisi için (c) sabiti (1) eşitliğinden sıfır bulunur.

c= 0

Buna göre orijinden geçen bu akım çizgisi için eşitlik;

$$x = \frac{u_0}{w}.\text{Cos}\left[w.\left(\frac{\pi}{2.w} - \frac{y}{v_0}\right)\right] \quad \text{ya da}$$

$$x = \frac{u_0}{w}.\text{Cos}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{w.y}{v_0}\right)$$

$$x = \frac{u_0}{w}.\text{Sin}\left(\frac{w.y}{v_0}\right) \quad \text{...(3)}$$

bulunur. Yukarıda bulduğumuz iki akım çizgisi aynı değildir. Çünkü akım düzensizdir. Örneğin orijinde (x= 0 ve y= 0) ve t= 0'da hız $\vec{V} = v_0.\vec{j}$ olurken $t = \pi/2.w$ 'daki hız $\vec{V} = u_0.\vec{i} + v_0.\vec{j}$ olmaktadır. Buna göre orijinden geçen akım çizgisinin açısı zamana göre değişmektedir.

b) Bir taneciğin yörüngesi yani zamana bağlı olarak konumu, hız alanından ve hızın tanımından bulunabilir;

$$u = \frac{dx}{dt}$$

$$v = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = u_0 Sin\left[w.\left(t - \frac{y}{v_0}\right)\right]$$

$$\frac{dy}{dt} = v_0$$

bağıntılarını buluruz. Buradaki son eşitliği entegre edelim.

$y = v_0.t + c_1$ ....(4)

Burada;

c_1 : Sabittir. (y)'nin değerini yukarıda yerine koyalım.

$$\frac{dx}{dt} = u_0.Sin\left[w.\left(t - \frac{v_0.t + c_1}{v_0}\right)\right]$$

$$\frac{dx}{dt} = -u_0.Sin\left(\frac{c_1.w}{v_0}\right)$$

bulunur. Bu eşitlik yörüngenin (x) bileşenini bulmak için entegre edilir.

$$x = -\left[u_0.Sin\left(\frac{c_1.w}{v_0}\right)\right].t + c_2 \quad \text{..(5)}$$

Burada;

c_2 : Sabittir. Orijinde (x=y=0), t= 0 anında (4) ve (5) eşitliklerinden c_1=c_2= 0 bulunur. Buna göre yörünge;

x= 0 ve y= v_0.t ....(6)

bulunur. Benzer şekilde $t = \pi / 2.w$'de orijindeki tanecik için (4) ve (5) eşitliklerinden;

$$c_1 = -\frac{\pi.v_0}{2.w}$$

$$c_2 = -\frac{\pi.u_0}{2.w}$$

bulunur. Buna göre bu taneciğin yörüngesi;

$$x = u_0.\left(t - \frac{\pi}{2.w}\right)$$

$$y = v_0.\left(t - \frac{\pi}{2.w}\right) \quad \text{..(7)}$$

biçimindedir. Bu eşitlikteki (t)'yi elimine ederek ya da $t \geq 0$ alarak x(t) ve y(t)'nin konumu yardımıyla yörünge çizilir.

$$y = \frac{v_0}{u_0}.x \quad \text{..(8)}$$

Akışkan düzensiz olduğundan akım çizgileri ve yörüngeler üst üste çakışmazlar.

ÖRNEK-4.3: Bir akışkan hareketinde hız alanı bileşenleri ($t \geq 0$) için $u = x.e^{-t}$ ve v= y ve w= 0 olarak verilmiştir.

a) Akım çizgisi denklemini bulunuz.
b) Taneciğin yörünge denklemini çıkarınız.

Çözüm:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{u}{v}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x.e^{-t}}{y}$$

$$\frac{dx}{x.e^{-t}} = \frac{dy}{y}$$

$$\ln y = e^{t} \ln x + c$$

$$\ln y - e^{t}.\ln x = c$$

$$\ln y.e^{e^{t}} = 0$$

bulunur.

c) Yörünge denklemi tanecik koordinatlarının zamanın fonksiyonu olduğu gözönünde bulundurularak integral alınarak elde edilir.

$$u = \frac{dx}{dt} = x.e^{-t}$$

$$v = \frac{dy}{dt} = y$$

$$\frac{dx}{x} = e^{-t}dt$$

$$\ln x = -e^{-t} + c$$

$$\frac{dy}{y} = dt$$

$$\ln y = t + c$$

ÖRNEK-4.4: Düzenli, iki boyutlu bir akışkanın hız alanı;

$$\vec{V} = \left(\frac{v_0}{L}\right).\left(x\vec{i} - yj\right)$$

olarak verilmiştir. Bu akımın ivme alanını bulunuz.

Çözüm:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}.\vec{\nabla}\right)\left(\vec{V}\right)$$

$$\vec{a} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + u.\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v.\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w.\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}$$

Hız alanından;

$$u = \left(\frac{v_0}{L}\right).x$$

$$v = \left(\frac{v_0}{L}\right).y$$

elde edilir. Düzenli akışta $\partial(\,)/\partial t = 0$'dır. İki boyutlu akımda w=0 ve $\partial(\,)/\partial z = 0$'dır.

Buna göre;

$$\vec{a} = u.\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v.\frac{\partial\vec{V}}{\partial y}$$

$$\vec{a} = \left(u.\frac{\partial u}{\partial x} + v.\frac{\partial u}{\partial y}\right).i + \left(u.\frac{\partial v}{\partial x} + v.\frac{\partial v}{\partial y}\right).j$$

$$\vec{a} = \left[\left(\frac{v_0}{L}\right).(x).\left(\frac{v_0}{L}\right) + \left(-\frac{v_0}{L}\right).(y).(0)\right].\vec{i} + \left[\left(\frac{v_0}{L}\right).(x).(0) + \left(-\frac{v_0}{L}\right).(y).\left(-\frac{v_0}{L}\right)\right].j$$

$$a_x = \frac{v_0^2.x}{L^2}$$

$$a_y = \frac{v_0^2.y}{L^2}$$

Akışkanın (x) ve (y) doğrultusunda ivmesi vardır. Akış düzenli olduğundan lokal ivme yoktur ve verilen noktadan akışkanın hızı zamanla değişmez, sabittir. Bununla birlikte, taneciğin yörüngesi boyunca bir noktadan diğer noktaya hızın değişimi nedeniyle konvektif ivme vardır. Hız vektöriyel büyüklük olduğundan hem yönü ve hem de değeri vardır. Bu akımda akışkanın hız değeri ve doğrultusu konuma bağlı olarak değişir.

Bu akışta ivmenin değeri orijindeki merkezi dairelerle sabittir. Bu durum aşağıdaki formülden de görülebilir.

$$a = |\vec{a}| = \left(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)^{1/2}\right)$$

$$a = \left(\frac{v_0}{L}\right)^2 . \left(x^2 + y^2\right)^{1/2}$$

Aynı zamanda ivme vektörü x ekseninden belirli bir (θ) açıyla tanımlanır.

$$\theta = \arctan\theta\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\text{'dir.}$$

ÖRNEK-4.5: Bir müteşebbis bir fabrikada kolay bozulabilen bir ürün imal etmektedir. Fabrikanın konumu x= 0 ve ürünün dağıtılacağı bölgeler x>0 ile gösterilmektedir. Ürünün satış fiyatını (P); imal tarihinden itibaren geçen süre (t) ve ürünün dağıtılacağı bölgenin fabrikadan olan uzaklığı (x) belirlemektedir. Yani P= P(x, t)'dir. Herhangi bir yerleşimde ürünün fiyatı zamanla azalmakta olup bu azalış;

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -c_1$$

ile gösterilmektedir. Burada (c_1) pozitif bir sabittir (dolar/saat). Malın gemiyle iletimine bağlı olarak malın satış fiyatı (P),

$$\frac{\partial P}{\partial x} = +c_2$$

formülüne göre artmaktadır. (c_2) sabit olup (dolar/km) ile tanımlanmaktadır. Eğer üretici dağıtım güzergahı boyunca malını hep aynı fiyatta satmak isterse hangi hızla gitmelidir.

Çözüm:

Verilen bir grup mal için fiyatın zamanla değişimi maddesel türev kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\frac{DP}{Dt}=\frac{\partial P}{\partial t}+\vec{V}.\nabla P=\frac{\partial P}{\partial t}+u.\frac{\partial p}{\partial X}+v\frac{\partial P}{\partial y}+w.\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial P}{\partial t}+u.\frac{\partial P}{\partial x}$$

Burada hareketin bir boyutlu olduğunu kabullendik ve $\vec{V}=u.\vec{i}$ aldık. u: Ürünün taşındığı güzergahtaki hızıdır. Eğer ürünün dağıtım güzergahı boyunca fiyatı sabit kalacaksa DP/Dt= 0 olmalıdır. Ya da

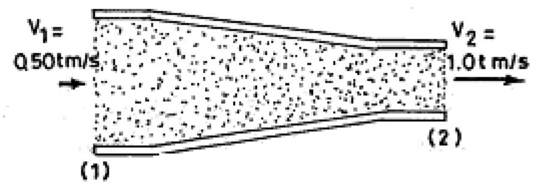
$$\frac{\partial P}{\partial t}+u.\frac{\partial P}{\partial x}=0$$

olur. Buna göre dağıtım hızı (u);

$$u=\frac{\partial P/\partial t}{\partial P/\partial x}=\frac{c_1}{c_2}$$

bulunur. Burada lokal etkinin $(\partial P/\partial t)$ neden olduğu fiyat azalması, konvektif etki $(u.\partial P/\partial x)$ tarafından neden olunan fiyat artışıyla dengelenir. Daha hızlı yapılan bir dağıtım ürünün fiyatında artışa neden olacaktır (DP/Dt>0 olup ürün bozulmadan satış merkezine ürün daha erken ulaşacaktır). Daha düşük hız ise ürünün daha düşük fiyatla satılmasına neden olacaktır (Bu durumda DP/Dt<0 olup fabrikadan uzak olan yerlerdeki fiyat artışı bozulmanın meydana gelmesiyle azalacaktır).

<u>ÖRNEK-4.6:</u> Aşağıdaki şekilde verilen boruda V_1= 0.50 t (m/s) ve V_2= 1.0 t (m/s) olup t(s) zamanı göstermektedir. (1) ve (2) noktalarındaki lokal ivmeyi bulunuz. İki nokta arasındaki konvektif ivmenin işaretini açıklayınız.



Çözüm:

Lokal ivme $a=\partial V/\partial t$'dir.

(1) noktası için;

$$a_1=\frac{\partial(0{,}50\,t)}{\partial t}=0{,}5\,m/s^2$$

(2) noktası için;

$$a_2=\frac{\partial(1{,}0\,t)}{\partial t}=1m/s^2$$

Akışkan (1)'den (2)'ye akarken hızı artmakta ve (V_1), (V_2)'ye yükselmektedir. Bu bölgede $\partial V/\partial t$ sıfır olsa bile (ki burada sıfır değildir) akışkan taneciklerinin bir ivmesi vardır yani $a_x = \partial u/\partial x$'dir. (1) ile (2) arasında hızın artması yani a_x ivmesinin büyümesi için $\partial u/\partial x > 0$'dir. Yani pozitiftir ve akışkanın ivmesi artar.

ÖRNEK-4.7: Bir lüle akışkanı doğrusal olarak (V_1)'den (V_2)'ye çıkaracak şekilde tasarlanmıştır. Yani hızın denklemi V= ax+b şeklindedir. Hız x_1= 0'da V_1= 10 m/s ve x_2= 1 m'de V_2= 25 m/s olarak verilmiştir.

a) Lokal ve konvektif ivmeyi,
b) (1) ve (2) noktalarındaki akışkan ivmesini bulunuz,
c) Eğer akım düzensiz ($\partial V/\partial t \neq 0$) ise ve $\partial V_1/\partial t = 20\,m/s^2, \partial V_2/\partial t = 60\,m/s^2$ olarak verilmişse (1) ve (2) noktalardaki ivmeleri bulunuz.

Çözüm:

a) x_1= 0, V_1= 10 m/s ve V= ax+b'den b= 10

x_2= 1 m, V_2= 25 m/s ve V= ax+b'den a= 15 bulunur. Buna göre hız alanı;

$$\vec{V} = (15x + 10)\vec{i} \Rightarrow \vec{u} = (15x + 10)\vec{i}$$

elde edilir. Akım düzenli olduğu için $\partial u/\partial t = 0$'dır.

$$\text{Konvektif ivme= } u\frac{\partial u}{\partial x} = (15x + 10).\frac{\partial(15x + 10)}{\partial x} = (15x + 10).(15)$$

$$u.\frac{\partial u}{\partial x} = 225x + 150$$

b) (1) noktasındaki ivme;

x_1= 0

$$a_1 = 225(1) + 150$$

$$a_1 = 150\,m/s^2$$

(2) noktasındaki ivme;

x_2= 1 m

$$a_2 = 225(2) + 150$$

$$a_1 = 375\,m/s^2$$

c) Akım düzensiz olduğundan ivmenin değeri aşağıdaki gibidir.

$$a = \frac{\partial u}{\partial t} + u.\frac{\partial u}{\partial x}$$

(1) noktası için;

$$a_1 = 20 + 150$$

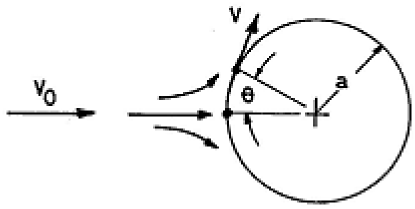
$$a_1 = 170\,m/s^2$$

(2) noktası için;

$$a_2 = 60 + 375$$

$$a_2 = 435\,m/s^2$$

<u>ÖRNEK-4.8:</u> Bir akışkan (V_0) yaklaşma hızıyla şekilde görülen (a) yarıçaplı bir kürenin etrafından akmaktadır. Kürenin yüzeyindeki akışkanın hızı $V = 2.V_0.Sin\theta$ bağıntısıyla verilmektedir. Silindirin yüzeyindeki yatay ve düşey ivme bileşenlerini (V_0), (a) ve (θ)'ya bağlı olarak bulunuz.



Çözüm:

Problemin çözümünde silindirikal koordinatlardan yararlanalım.

$$a = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial r}.v_r + \frac{1}{r}.\frac{\partial V}{\partial \theta}.v_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}.v_z$$

Akım düzenlidir ve bu nedenle $\partial V / \partial t = 0$'dır. Hız denklemi yalnızca (θ)'ya bağımlı olduğundan $\partial V / \partial r$ ve $\partial V / \partial z$ değerleri sıfırdır.

$$a = \frac{1}{r}.\frac{\partial V}{\partial \theta}.v_\theta$$

Yatay bileşen (a_x);

$$a_x = \frac{1}{r}.\frac{\partial V}{\partial \theta}.v_{\theta x}$$

r= a.Cosθ

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 2.V_0.Cos\theta$$

$$v_{\theta x} = V.Cos(90-\theta)$$

$$v_{\theta x} = V.Sin\theta$$

$$v_{\theta x} = 2.V_0.Sin^2\theta$$

$$a_x = \frac{1}{a.Cos\theta}\left(2.V_0.Cos\theta\right)\left(2.V_0.Sin^2\theta\right)$$

$$a_x = \frac{4.V_0^2}{a}.Sin^2\theta$$

İvmenin düşey bileşeni (a_y);

$$a_y = \frac{1}{r}.\frac{\partial V}{\partial \theta}.v_{\theta y}$$

r= a.Cosθ

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 2.V_0.Cos\theta$$

$$v_{\theta y} = V.Sin(90-\theta)$$

$$v_{\theta y} = V.Cos\theta$$

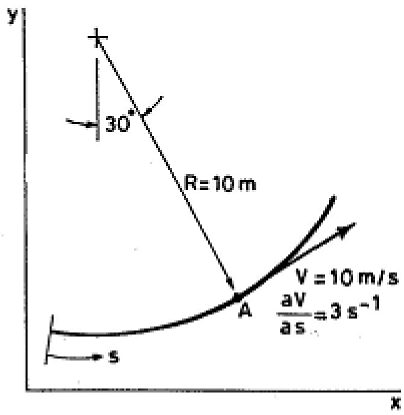
$$v_{\theta y} = 2.V_0.Sin\theta.Cos\theta$$

Buna göre;

$$a_y = \frac{1}{a.Cos\theta}.\left(2.V_0.Cos\theta\right).\left(2.V_0Sin\theta.Cos\theta\right)$$

$$a_y = \frac{4V_0^2}{a}$$ bulunur.

ÖRNEK-4.9: Bir akışkan şekilde görüldüğü gibi akım çizgisi boyunca akmaktadır. $\partial V/\partial s = 3\ s^{-1}$, $V = 10\ m/s$, $R = 10\ m$ olarak verildiğine göre (A) noktasının ivmesini bulunuz. İvmenin eğimini ve x ekseniyle yaptığı açıyı bulunuz.



Çözüm:

Akım çizgisi koordinatlarında ivmenin değeri akım çizgisi boyunca $a_s = V(\partial V/\partial s)$, akım çizgisine dik yönde $a_n = V^2/R$'dir.

$$a_s = V.\frac{\partial V}{\partial s}$$

$$a_s = (10\ m/s).(3\ s^{-1})$$

$$a_s = 30\ m/s^2$$

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{(10\ m/s)^2}{10\ m}$$

$$a_n = 10\ m/s^2$$

$$a = \left(a_n^2 + a_s^2\right)^{1/2}$$

$$a = \left((10\ m/s^2)^2 + (30\ m/s^2)^2\right)^{1/2}$$

$$a = 31{,}62 m/s^2$$

ivmenin eğimi= $\tan\theta = \dfrac{a_n}{a_s} = \dfrac{10}{30}$

θ= 18.43^o

(x) ekseniyle yaptığı açı= 18.43 + 30= 48.43^o olur.

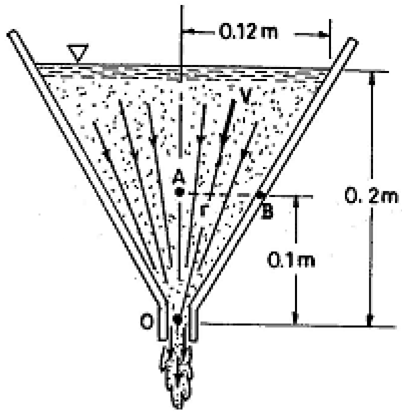
ÖRNEK-4.10: Aşağıdaki şekilde görülen hunide su akmaktadır. Hunideki akış yaklaşık olarak radyal olup (0) noktasından dik geçmektedir. Hız alanı V= c/r^2 ile verilmektedir.

Burada;

c : Sabit,

r : Radyal koordinattır.

Eğer hız V= 0.4 m/s ve r= 0,1 m alınırsa (A) ve (B) noktalarının ivmeleri ne olur?



Çözüm:

Silindirikal koordinatlarda ivmenin değerini yazalım.

$$a = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial r}.v_r + \frac{1}{2}.\frac{\partial V}{\partial \theta}.v_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}.v_z$$

$$a = 0 + \frac{\partial V}{\partial r}v_r + 0 + 0$$

$$a = \frac{\partial V}{\partial r}v_r$$

(c) sabitini bulalım.

$$V = \frac{c}{r^2}$$

$c = V.r^2$

$c = (0,4\ m/s).(0,1\ m)^2$

$c = 4.10^{-3}\ m^3/s$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial (c/r^2)}{\partial r}$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{2c}{r^3}$$

$V_r = c/r^2$

Buna göre (A) noktasının ivmesi (a_n)

$$a_A = \frac{\partial V}{\partial r} v_r$$

$$a_A = -\frac{2.c}{r^3}.\frac{c}{r^2} = -\frac{2.c}{r^5} = \frac{-2.(4.10^{-3} m^3/s)}{(0{,}1m)^5}$$

$a = -3{,}2\ m/s^2$

(B) noktasının ivmesi (a_B)
önce $|OB| = r$ uzaklığını bulalım.

$$\tan\theta = \frac{0{,}12m}{0{,}2m}$$

$$\theta = 30{,}964^o$$

$$r = \frac{0{,}1m}{Cos(30{,}964)}$$

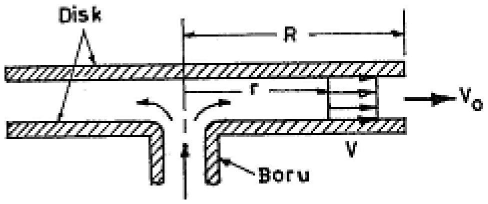
$$r = 0{,}11662m$$

$$a_B = \frac{\partial V}{\partial r} v_r$$

$$a_B = \frac{-2.c^2}{r^5} = \frac{-2.(4.10^{-3}\ m^3/s)^2}{(0{,}11662\ m)^5}$$

$$a_B = -1{,}48 m/s^2$$

ÖRNEK-4.11: Hava aşağıdaki şekilde görülen bir boruyla iki disk arasına verilmekte ve V= V_0.R/r hızıyla almaktadır. R: diskin yarıçapı, r: radyal koordinat ve V_0: diskin sonundaki akışkan hızıdır. Eğer r= 1m, 2 m ve 3 m iken V_0= 5 m/s ve R= 3 m koşulundaki akışkan ivmesini bulunuz.



Çözüm:

Silindirikal koordinatlardaki ivmeyi yazalım.

$$a = \frac{\partial V}{\partial r}.v_r$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{-V_0..R}{r^2}$$

$$V_r = V_o.R/r$$

$$a = \left(-\frac{V_0.R}{r^2}\right).\left(V_0.\frac{R}{r}\right)$$

$$a = -\frac{V_0^2.R^2}{r^3}$$

r= 1 m için $a = -\frac{(5m/s)^2.(3m)^2}{(1m)^3} = -225m/s^2$

r= 2 m için $a = -\frac{(5m/s)^2(3m)^2}{(2m)^3} = -28{,}125m/s^2$

r= 3 için $a = -\frac{(5m/s)^2(3m)^2}{(3m)^3} = -8{,}333m/s^2$