5. BORULARDAKİ VİSKOZ (SÜRTÜNMELİ) AKIM

5.14. Borularda Viskoz (Sürtünmeli) Akım İle İlgili Uygulama Örnekleri

ÖRNEK-5.1: Sıcaklığı 10 C° olan suyun özelliklerini taşıyan bir akışkan 4 mm çapında ve 0,25 m uzunluğunda bir pipetle 4 cm³/s'lik verdide emilmektedir. Akım tipi laminer midir? Tam gelişmiş akım mıdır? Açıklayınız. 10 C°'deki suyun kinematik viskozitesi $1{,}31.10^{-5}$ m²/s alınacaktır.

Çözüm:

Akımın laminer olması için Re<2100 olması gerekir.

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho . V . D}{\mu} = \frac{\rho . D}{\mu} . \left(\frac{4.Q}{\pi . D^2} \right) = \frac{4.\rho . Q}{\pi . \rho . D . \vartheta}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{4.Q}{\pi . D . \vartheta}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{4.(4.10^{-6} m^3/s)}{\pi .(4.10^{-3} m).(1{,}31.10^{-5} m^2/s)}$$

Re= 97,19 (laminer)

laminer akımda giriş bölgesi uzunluğu;

$$\frac{Le}{D} = 0{,}06.\mathrm{Re}$$

Le= 0,06.D.Re

Le= 0,06.4 mm. 97,19

Le= 23,33 mm

Pipetin uzunluğu 250 mm'dir ve giriş bölgesi uzunluğu bundan çok küçük olduğu için akım tam gelişmiş akım kabul edilebilir.

ÖRNEK-5.2: Özgül kütlesi 1010 kg/m³ ve dinamik viskozitesi 2.10^{-3} Pa.s olan süt çapı 25,4 mm olan yatay boru içerisinde akmaktadır. Akışın verdisi 2.10^{-4} m³/s olup akış sürtünmeli (viskoz), kararlı ve sıkıştırılamaz kabul edilecektir. Boru pürüzsüzdür.

a) Akışın cinsini,
b) Sürtünme katsayısını,

c) Çeper (duvar) kayma gerilmesini,
d) Sürtünme (kayma) hızını,
e) Boru duvarından 10 mm uzaklıktaki ortalama hızı,
f) Bir metre boru uzunluğuna düşen basınç düşümünü ve sürtünme kaybını (hidrolik eğimi) bulunuz.

Çözüm:

a) $$V = \frac{4.Q}{\pi.D^2} = \frac{4.(2.10^{-4}\, m^3/s)}{\pi.(25{,}4.10^{-3}\, m)^2}$$

V= 0,3947 m/s

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho.V.D}{\mu} = \frac{(1010\,kg/m^3).(0{,}3947\,m/s).(25{,}4.10^{-3}\ m)}{2.10^{-3}\ Pa.s}$$

Re= 5063 > 4000 olduğundan türbülanstır.

b) Boru pürüzsüz ve Re < 10^5 olduğundan

$$f = \frac{0{,}316}{\mathrm{Re}^{0{,}25}} = \frac{0{,}316}{(5063)^{0{,}25}}$$

f= 0,03746

c) Çeper (duvar) kayma gerilmesi (τ_w);

$$\tau_w = f.\rho.\frac{V^2}{8} = (0{,}03746).\left(1010\frac{kg}{m^3}\right).(0{,}3947\,m/s)^2/8$$

$$\tau_w = 0{,}7368\ Pa$$

d) Sürtünme hız (u^*);

$$u^* = V.\left(\frac{f}{8}\right)^{1/2} = (0{,}3947\,m/s).\left(\frac{0{,}03746}{8}\right)^{1/2}$$

u^*= 0,027 m/s ya da

$$u^* = (\tau_w/\rho)^{1/2} = (0{,}7368\,Pa/1010\,kg/m^3)^{1/2}$$

$$u^* = 0{,}027 m/s$$

e) Boru duvarından y= 10 mm uzaklıktaki ortalama akışkan hızı $(\bar{u})$

$$\bar{u} = u^*.2{,}5.\ln\left(\frac{y.u^*}{\vartheta}\right) + 5.u^*$$

$$\bar{u} = (0{,}027 m/s).(2{,}5).\ln\left(\frac{0{,}01\, m.0{,}027 m/s}{(2.10^{-3}\, Pa.s/1010 kg/m^3)}\right) + 5.(0{,}027 m/s)$$

$$\bar{u} = 0{,}4668\ m/s$$

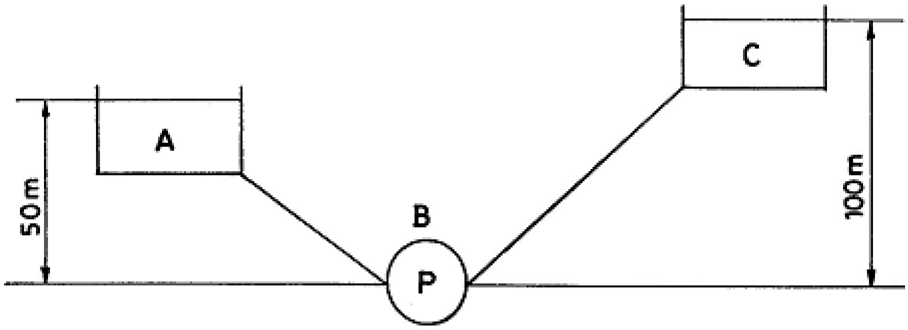
f) $$\frac{\Delta P}{L} = \frac{4.\tau_w}{D} = \frac{4.(0{,}7368 Pa)}{(25{,}4.10^{-3}\, m)}$$

$$\frac{\Delta P}{L} = 116{,}03 \frac{Pa}{m}$$

$$i = \frac{h_L}{L} = \frac{f}{D}.\frac{V^2}{2.g} = \frac{0{,}03746.(0{,}3947 m/s)^2}{(25{,}4.10^{-3}\, m).(2.9{,}81\, m/s^2)}$$

$$i = \frac{h_L}{L} = 0{,}01171\, m/m \text{ (hidrolik eğim)}$$

ÖRNEK-5.3: Aşağıdaki şekilde B noktasına yerleştirilen pompa ile A deposundan C deposuna saniyede 0,15 m³ su pompalanacaktır. Sistemde sürtünme nedeniyle meydana gelen enerji kaybı 4,55 m, A deposunun B pompasına olan düşey uzaklığı 50 m, C deposunun B pompasına olan düşey uzaklığı 100 m olduğuna göre B noktasına yerleştirilen pompanın suyu A deposundan alıp C deposuna göndermesi için gerekli gücü bulunuz. Şekil kayıpları ihmal edilecektir.



Çözüm:

A ve C noktalarına Bernoulli eşitliğini uygulayalım.

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2.g} + H_m = z_c + \frac{P_C}{\gamma} + \frac{V_c^2}{2.g} + h_L$$

50+0+0+H_m= 100 m+0+0+4,55 m

H_m= 54,55 m

$$N = \frac{H_m.Q.\gamma}{1000} = \frac{(54,55\,m).(0,15\,m^3/s).(9810\,N/m^3)}{1000}$$

N= 80,27 kW

ÖRNEK-5.4: Özgül kütlesi 1000 kg/m^3, kinematik viskozitesi 1.10^{-6} m^2/s ve akım tipi türbülanslı olan su, çapı 0,1 m olan bir borudan 4.10^{-2} m^3/s'lik verdi ile akmaktadır. Boruda sürtünmeden kaynaklanan basınç düşümü 1 m boruya $\Delta P = 2590$ Pa ölçülmüştür.

a) Viskoz alt tabakanın kalınlığını bulunuz,
b) Boru merkezindeki su hızını hesaplayınız. Ortalama hızla karşılaştırınız,
c) Boru cidarına 0,025 m uzaklıkta türbülans kayma gerilmesinin laminer akım kayma gerilmesine oranı nedir?

Çözüm:

a) Viskoz alt tabakanın kalınlığını bulmak için önce kayma hızını bulalım.

$$u^* = \left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{1/2}$$

Çeper (duvar) kayma gerilmesi olan τ_w için hem laminer ve hem de türbülans akımda aşağıdaki bağıntı kullanılabilir.

$$\tau_w = \frac{\Delta P.D}{4.L} = \frac{(2590\,Pa).(0,1\,m)}{4.(1\,m)}$$

$$\tau_w = 64,75\,Pa$$

Buna göre kayma hızı (u^*);

$$u^* = \left(\frac{64,75Pa}{1000kg/m^3}\right)^{1/2}$$

u^*= 0,254 m/s

Viskoz alt tabakanın kalınlığı (δ_s) ,

$$\delta_s = 5.\frac{\vartheta}{u^*} = \frac{5.(1.10^{-6}\ m^2/s)}{(0,254\ m/s)}$$

$$\delta_s = 1{,}9685.10^{-5}\ m$$

$$\delta_s = 0{,}019685 mm$$

b) $\dfrac{V}{V_c} = \dfrac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}$ Buradan merkez hız (V_c);

$$V_c = \frac{(n+1).(2n+1)}{2.n^2}.V = \frac{(8{,}4+1).(2.8{,}4+1)}{2.(8{,}4)^2}.V$$

$$V_c = 1,186.(5{,}09\ m/s) = 6{,}04\ m/s$$

$$V = \frac{4.Q}{\pi.D^2} = \frac{4.(0{,}04 m^3/s)}{\pi.(0{,}1\ m)^2} = 5{,}09 m/s$$

$$Re = \frac{5{,}09 m/s).(0{,}1m)}{1.10^{-6}} = 509000$$ olduğundan şekilden n=8,4 bulunur.

c) Hem laminer ve hem de türbülanslı akışta aşağıdaki bağıntı kullanılabilir. Bu formüldeki (τ), laminer akımdaki ve türbülans akımdaki kayma gerilmelerinin toplamıdır. Yani;

$\tau = \tau_{lam} + \tau_{turb}$ yazılabilir.

τ_{lam} = Akışkanın viskoz olması nedeniyle meydana gelen laminer kayma gerilmesi,

τ_{turb} = Akışkanın türbülanslı olması nedeniyle sürtünmeden kaynaklanan kayma gerilmesi.

$$\tau = \frac{2\tau_{w.}r}{D} = \frac{2.(64{,}75\ Pa).(0{,}025\ m)}{(0{,}1\ m)} = 32{,}4\ Pa$$

$$\tau = \tau_{lam} + \tau_{turb} = 32{,}4\ Pa$$

Bu formülde r = 0,025 m olup ele alınan noktanın boru cidarına uzaklığıdır. Bir boruda meydana gelen toplam kayma gerilmesi (τ) aynı zamanda aşağıdaki bağıntıyla da bulunmaktadır.

$$\tau_{lam} = -\mu \frac{d\bar{u}}{dr}$$

$$\tau_{turb} = -\rho.\overline{u'.v'}$$

Türbülanslı akımda boru merkezindeki (dış tabakada) meydana gelen hız gradyenti $(d\bar{u}/dr)$;

$$\frac{d\bar{u}}{dr} = -\frac{V_c}{nR}.\left(1-\frac{r}{R}\right)^{(1-n)/n}$$

bulunur.

$$\frac{d\bar{u}}{dr} = -\frac{(6{,}04\,\text{m/s})}{8{,}4\times(0{,}1/2\,\text{m})}.\left(1-\frac{0{,}025\,\text{m}}{0{,}05\,\text{m}}\right)^{(1-8{,}4)/8{,}4}$$

$$\frac{d\bar{u}}{dr} = -26{,}5\ s^{-1}$$

Buna göre laminer kayma gerilmesi (τ_{lam});

$$\tau_{lam} = -\mu.\frac{d\bar{u}}{dr} = -(\vartheta\rho).\frac{d\bar{u}}{dr}$$

$$\tau_{lam} = -\left(1.10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s}\right).\left(1000\ \text{kg/m}^3\right).\left(-26{,}5\,\text{s}^{-1}\right)$$

$$\tau_{lam} = 0{,}0265\,\text{Pa}$$

$$\tau_{turb} = \tau - \tau_{lam} = 32{,}4\,\text{Pa} - 0{,}0265\,\text{Pa}$$

$$\tau_{turb} = 32{,}3735\,\text{Pa}$$

$$\frac{\tau_{turb}}{\tau_{lam}} = \frac{32{,}3735\,\text{Pa}}{0{,}0265\,\text{Pa}} = 1221{,}64$$

Beklenildiği gibi bu bölgede (dış tabakada) kayma gerilmesinin çoğunu türbülans kayma gerilmesi oluşturmaktadır.

ÖRNEK-5.5: Çapı 150 mm olan bir boruda özgül kütlesi 1200 kg/m^3, kinematik viskozitesi 1,2.10^{-5} m^2/s olan bir yağ akmaktadır. Yağın verdisi 0,07 m^3/s'dir.

Aralarındaki yatay uzaklık 120 m olan (1) ve (2) kesitlerindeki basınç sırasıyla 343 350 Pa ve 196 200 Pa'dır. Akışın yönü (1)'den (2)'ye doğru ise;

a) Çeper kayma gerilmesini,
b) Sürtünme (kayma) hızını,
c) Boru eksenindeki hızı bulunuz.

Çözüm:

a) Borunun (1) ve (2) kesitlerine Bernoulli eşitliğini uygulayalım.

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_L$$

z_1=z_2= 0 (yükseklik farkı yok, boru yatay)

V_1=V_2 (kesit değişmiyor)

$$\frac{P_1}{\gamma} = \frac{P_2}{\gamma} + h_L$$

$$\Delta P = P_1 - P_2 = 343350\text{Pa} - 196200\text{Pa}$$

$$\Delta P = 147150 \text{ Pa}$$

Basınç düşümüne bağlı sürtünme denklemi (yatay boruda);

$$\Delta P = f.\frac{L}{D}.\rho.\frac{V^2}{2}$$

$$f = \frac{\Delta P.2D}{L.\rho.V^2} = \frac{(147150\text{ Pa}).(2).(0,15\text{ m})}{(120\text{m}).\left(1200\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right).(3,96)^2}$$

f= 0,0195

$$V = \frac{4.Q}{\pi.D^2} = \frac{4.(0,07\text{ m}^3/\text{s})}{\pi.(0,15\text{ m})^2} = 3,96\text{ m/s}$$

Çeper (duvar) kayma gerilmesi (τ_w) ;

$$\tau_w = f.\rho\frac{V^2}{8} = 0,0195.\left(1200\text{kg}/\text{m}^3\right)\frac{(3,96\text{m}/\text{s})^2}{8}$$

$$\tau_w = 45{,}87\text{Pa}$$

b) $u^* = \left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{1/2} = \left(\frac{45{,}87\,Pa}{1200\,kg/m^3}\right)^{1/2}$

u^*= 0,196 m/s

c) $R_e = \frac{V.D}{\vartheta} = \frac{(3{,}96\,m/s).(0{,}15\,m)}{(1{,}2.10^{-5}\,m^2/s)}$

Re= 49500 olduğundan n= 6,7 alınabilir. Buna göre;

$$\frac{V}{V_c} = \frac{2.n^2}{(n+1).(2.n+1)}$$

$$V_c = \frac{V.(n+1).(2n+1)}{2.n^2} = \frac{(3{,}96\,m/s).(7{,}7).(14{,}4)}{2.(6{,}7)^2}$$

V_c= 4,891 m/s

Türbülans akımda merkez hızı bulmak için başka yöntemlerde vardır. Ama en güvenilir yöntem yukarıdakidir. Ancak aşağıdaki yöntemler de kullanılabilmektedir.

Birinci yöntem türbülans akımda maksimum (boru merkezindeki) hızın ortalama hızın yaklaşık $\frac{1}{0{,}80}.....\frac{1}{0{,}87}$ oranında olmasıdır. Yani;

$$V_{max} = V_c = \frac{V}{0{,}80}....\frac{V}{0{,}87}$$

$$V_c = \frac{3{,}96\,m/s}{0{,}80}....\frac{3{,}96\,m/s}{0{,}87}$$

V_c= 4,95 m/s ... 4,552 m/s arasında değişmektedir.

İkinci yöntemde genellikle pürüzsüz borularda geçiş bölgesi için kullanılan ancak viskoz alt tabaka dışında diğer bölgelerde iyi sonuçlar veren aşağıdaki formüller kullanılmaktadır.

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = 2{,}5.\ln\left(\frac{y.u^*}{\vartheta}\right) + 5{,}0 \quad \text{(geçiş ve dış tabakada)}$$

$$\frac{V_c - \overline{u}}{u^*} = 2{,}5.\ln\left(\frac{R}{y}\right) \quad \text{(boru merkezinde)}$$

iki formülü birleştirirsek merkez hız formülü bulunur.

$$\frac{V_c}{u^*} = 2{,}5.\ln\left(\frac{R}{y}\right) + 2{,}5.\ln\left(\frac{y.u^*}{\vartheta}\right) + 5{,}0$$

R = Boru yarıçapı (0,075 m),
y = Duvardan olan uzaklık (0,075 m),
u^*= 0,196 m/s bulundu.
ϑ = 1,2.10^{-5} m^2/s

$$\frac{V_c}{u^*} = 2{,}5.\ln\left(\frac{0{,}075\,\text{m}}{0{,}075\,\text{m}}\right) + 2{,}5.\ln\left(\frac{0{,}075\,\text{m}.0{,}196\,\text{m/s}}{1{,}2.10^{-5}\,\text{m}^2/\text{s}}\right) + 5$$

$$\frac{V_c}{u^*} = 0 + 22{,}7767$$

V_c= 22,7767.u^*

V_c= 22,7767.(0,196 m/s)= 4,464 m/s

III. Yöntem de;

$$\frac{V_c}{u^*} = 2{,}5.\ln\left(\frac{R}{y}\right) + 5{,}75\log_{10}\left(\frac{u^*.y}{\vartheta}\right) + 5{,}5$$

formülünü kullanmaktır.

$$\frac{V_c}{(0{,}196\,\text{m/s})} = 2{,}5.\ln\left(\frac{0{,}075\,\text{m}}{0{,}075\,\text{m}}\right) + 5{,}75\log_{10}\left(\frac{0{,}196\,\text{m/s}.0{,}075\,\text{m}}{1{,}2.10^{-5}\,\text{m}^2/\text{s}}\right) + 5{,}5$$

$$\frac{V_c}{0{,}196} = 0 + 23{,}2568$$

V_c= 4,56 m/s bulunur .

ÖRNEK-5.6: Yarıçapı R olan bir boruda Reynolds sayısı a) Re= 100000, b) Re= 1000 olduğunda boru ekseninden olan uzaklığın (r), boru yarıçapına (R) oranı olan r/R'nın hangi değerlerin de ortalama akışkan hızı (V), akışkanın zaman ortalamalı hızına $(\overline{u})$ eşit olur.

Çözüm:

a) Re<100 000 iken şekilden n= 7,2 bulunur.

$$\frac{V}{V_c}=\frac{2n^2}{(n+1).(2n+1)} \qquad\qquad \frac{\bar{u}}{V_c}=\left(1-\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Bizden istenen; $V=\bar{u}$ olmasıdır.

$$\frac{2n^2}{(n+1).(2n+1)}=\left(1-\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{7,2}}$$

$$\frac{r}{R}=0,7582$$

Yani r= 0,7582.R olduğunda $V=\bar{u}$ olur.

b) Re= 1000 olduğunda akım laminerdir. laminer akımda hız profili;

$$\bar{u}=V_c\left[1-\left(\frac{2.r}{D}\right)^2\right]$$

biçimindedir ve yine laminer akımda V= V_c/2'dir.

$$\bar{u}=V$$

$$V_c.\left[1-\left(\frac{2.r}{D}\right)^2\right]=\frac{V_c}{2}$$

$$1-\left(\frac{2.r}{D}\right)^2=\frac{1}{2}$$

D= 2.R

$$1-\left(\frac{2.r}{2.R}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$1-\left(\frac{r}{R}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$\frac{r}{R} = 0{,}7071 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK-5.7: Sıcaklığı 50 C°, kinematik viskozitesi $1{,}76.10^{-5}$ m^2/s olan hava, çapı 203,2 mm olan borudan 3,048 m/s hızla geçerek kenar uzunluğu (a) olan kare kanala gelmektedir. Borunun ve kare kanalın yüzeyleri pürüzsüzdür $(k = 0)$. Eğer boru ve kanaldaki hidrolik eğim (1 m boru boyuna düşen yük) birbirine eşit ise kanalın bir kenarının uzunluğunu (a) bulunuz.

Çözüm:

Önce borudaki hidrolik eğimi bulalım ve bundan yola çıkarak kare kanalın bir kenarının uzunluğunu elde edelim.

$$Re = \frac{V_b.D}{\vartheta} = \frac{(3{,}048 m/s).(0{,}2032 m)}{1{,}76.10^{-5}\ m^{2/s}}$$

Re= 35190 bulunur.

$\frac{k}{D} = 0$ ve Re= 35190 için f= $0{,}316/Re^{0{,}25}$ formülünden sürtünme katsayısı f= 0,023 bulunur. Buna göre boru için hidrolik eğim (**İ**);

$$İ_b = \frac{h_L}{L} = \frac{f}{D}.\frac{V_b^2}{2.g} = \frac{0{,}023.(3{,}048 m/s)^2}{(0{,}2032m).(2.9{,}81 m/s^2)}$$

$$İ_b = \frac{h_L}{L} = 0{,}0536$$

Buna göre kanal için;

$$İ_k = \frac{h_L}{L} = \frac{f}{4.R}.\frac{V_k^2}{2.g} = 0{,}0536 \text{ yazılabilir.}$$

$$Q = \frac{\pi.D_b^2}{4}.V_b = \frac{\pi.(0{,}2032m)^2.(3{,}048m/s)}{4} = 0{,}0988 m^3/s$$

$$4R = 4\frac{A}{Ç} = \frac{4.a^2}{4a} = a \text{ ve}$$

$$V_k = \frac{Q}{A} = \frac{0{,}0988 m^3/s}{a^2}$$

Kanaldaki hızın değerini iki eşitliği birleştirerek bulalım.

$$\frac{f}{4.R}.\frac{V_k^2}{2.g} = 0{,}0536$$

$$\frac{f}{a}.\frac{(0{,}0988\,m^3/s/a^2)^2}{2.9{,}81} = 0{,}0536$$

$$a = f^{1/5}.0{,}392$$

Burada; a’nın birimi metredir. Hidrolik çapa bağlı Re sayısı;

$$Re = \frac{V_k.4.R}{\vartheta} = \frac{(0{,}0988/a^2).(a)}{1{,}76.10^{-5}}$$

$$Re = \frac{5613{,}6}{a}$$

Bu aşamadan sonra deneme-yanılma yöntemini uygulayalım. Borunun sürtünme katsayısı ile kanalın sürtünme katsayısını aynı alalım. Buna göre;

$$a = (0{,}023)^{1/5}.0{,}392$$

a= 0,1843 m

$Re = \dfrac{5613{,}6}{0{,}1843} = 30459$ elde edilir.

$$f = \frac{0{,}316}{(30459)^{0{,}25}}$$

f= 0,0239

bulunur. Bu değer daha önce bulduğumuz f= 0,023 ile örtüşmemektedir. Bu nedenle sürtünme katsayıları aynı oluncaya kadar işleme devam edilmelidir.

$$a = (0{,}0239)^{1/5}.0{,}392$$

a= 0,1858

$$Re = \frac{5613{,}6}{0{,}1858} = 30213$$

$$f = \frac{0{,}316}{(30213)^{0{,}25}} = 0{,}0239$$

bulunur ve iki sürtünme katsayısı aynı olduğu için;

a= 0,1858 m= 185,8 mm'dir.

Borunun kesit alanı= $\dfrac{\pi.D^2}{4} = \dfrac{\pi.(0,2032m)^2}{4} = 0,03243m^2$

Kanalın kesit alanı **=** $a^2 = (0,185m)^2 = 0,03452m^2$

ÖRNEK-5.8: Çapı 101,6 mm, mutlak pürüzlülüğü 0,15 mm, uzunluğu 6 m olan bir boruda ortalama hız ile sürtünme katsayısı arasındaki ilişki aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$V = \left(\frac{87,78}{60f + 7,5}\right)^{1/2} \quad \text{(m/s)}$$

Boruda akan akışkanın kinematik viskozitesi $1,66291.10^{-5}$ m^2/s olarak verildiğine göre akışkan verdisini bulunuz.

Çözüm:

Bu soru II. Tip akış problemine girmektedir. Hızı bulmak için bir f değeri kabul edelim. Bu f değeri 0,022 olsun. Buna göre akışkan hızı (V);

$$V = \left(\frac{87,78}{60.(0,022) + 7,5}\right)^{1/2}$$

V= 3,15 m/s

Bağıl pürüzlülük $\dfrac{k}{D} = \dfrac{0,15\,mm}{101,6\,mm} \cong 0,0015$

$$Re = \frac{V.D}{\vartheta} = \frac{V.(0,1016m)}{(1,66291.10^{-5}\ m/s)}$$

Re= 6109,77 V

Buna göre;

Re= 6109,77 (3,15 m/s)

Re= 19245,8

Re= 19245,8 ve $\frac{k}{D} = 0{,}0015$ için Moody diyagramından f= 0,029 elde edilir ve $f = 0{,}022 \neq 0{,}029$ olduğundan iterasyona devam edilir. Bu sefer f= 0,029 alınır.

$$V = \left(\frac{87{,}78}{60.(0{,}029) + 7{,}5} \right)^{1/2}$$

V= 3.08 m/s

Re= 6109,77 (3,08 m/s)

Re= 18818

Bu Re ile Moody'den f= 0,029 bulunur.
Buna göre kabul edilen f= 0,029 değeri ile bulunan f= 0,029 değeri aynıdır. Böylece V= 3,08 m/s bulunur.

$$Q = \frac{\pi . D^2}{4} . V = \left(\frac{\pi .(0{,}1016\,m)}{4} \right) .(3{,}08\,m/s)$$

Q= 0,02497 m^3/s

elde edilir.

ÖRNEK-5.9: Özgül kütlesi ρ= 1,226 kg/m^3, viskozitesi 1,791.10^{-5} Pa.s olan hava galvanizlenmiş demir boru (k= 0,15 mm) içerisinde yatay olarak 0,06 m^3/s'lik verdiyle iletilmektedir. Basınç düşümünün 30 m'de 3448 Pa'dan daha fazla olmaması için boru çapını bulunuz. Hava sıkıştırılamaz kabul edilecektir.

Çözüm:

Bu soru III. Tip akış problemine bir örnektir. Yatay boruda z_1=z_2 ve çap sabit olduğundan V_1=V_2'dir.

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2.g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2.g} + h_L$$

$$\frac{P_1}{\gamma} = \frac{P_2}{\gamma} + f\,\frac{L}{D} . \frac{V_2^2}{2.g}$$

$$P_1 = P_2 + f\,\frac{L}{D} . \frac{\gamma . V^2}{2.g}$$

$$V=\frac{4.Q}{\pi.D^2}=\frac{4.(0{,}06m^3/s)}{\pi.D^2}$$

$$V=\frac{0{,}0764}{D^2}$$

$$P_1-P_2=f.\frac{L}{D}\rho.\frac{V^2}{2} \quad \text{...(1)}$$

$$P_1-P_2=f\frac{L}{2D}.\rho.\left(\frac{0{,}0764}{D^2}\right)^2$$

$$3448\,Pa=f\,\frac{(30\,m)}{2D}.(1{,}226\,kg/m^3).\frac{(5{,}83696.10^{-3})}{D^4}$$

$$3448Pa=0{,}1073.\frac{f}{D^5}$$

D= 0,1255 $f^{1/5}$ ....(2)

$$Re=\frac{\rho.V.D}{\mu}=\frac{(1{,}226kg/m^3).(0{,}0764/D^2).D}{(1{,}791.10^{-5}\,Pa.s)}$$

$$Re=\frac{5230}{D} \quad \text{...(3)}$$

$$\frac{k}{D}=\frac{0{,}15\,mm}{D} \quad \text{...(4)}$$

Yukarıda 4 adet eşitlik elde ettik. Deneme yanılma yöntemini kullanarak boru çapını bulalım. Sürtünme katsayısını f= 0,02 kabul edelim.

$$D=0{,}1255.f^{1/5}=0{,}1255.(0{,}02)^{1/5}=0{,}0574m$$

$$\frac{k}{D}=\frac{0{,}15\,mm}{57{,}4\,mm}=0{,}002613$$

$$Re=\frac{5230}{0{,}0574}=91115$$

Bulunan $\frac{k}{D}$ ve Re’ye göre Moody diyagramından f= 0,027 bulunur. Bu f, kabul edilen 0,02 değerine eşit olmadığından işleme devam ederiz. Bu sefer f= 0,027 alırız.

$D = 0,1255.(0,027)^{1/5} = 0,0609$ m

$$\frac{k}{D} = \frac{0,15\,m}{60,5\,mm} = 0,002463$$

$$Re = \frac{5230}{0,0609} = 85878$$

Yeni $\frac{k}{D}$ ve Re'ye göre Moody diyagramında f= 0,027 bulunur ve bu değer kabul edilene eşit olduğundan borunun çapı; D= 60,9 mm hesaplanmış olur.

ÖRNEK-5.10: Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi A, B, C depoları birbirine 1, 2 ve 3 borularıyla bağlanmıştır. Herbir borunun çapı 304,8 mm ve sürtünme katsayısı 0,02'dir. Boru uzunluğu boru çapına göre çok büyük olduğundan şekil (yersel) kayıplar ihmal edilecektir. A deposunun referans eksenindeki C deposundan yüksekliği 31 m, B deposunun yüksekliği 6 m'dir. (1) borusunun uzunluğu 306 m, (2) borusunun uzunluğu 153 m ve (3) borusunun uzunluğu 122 m alınacaktır. Akışkan A deposundan B ve C deposuna akmaktadır. Herbir depoya giren ya da çıkan verdiyi bulunuz.

Çözüm:

Sistemde;

$Q_1 = Q_2 + Q_3$

$V_1 = V_2 + V_3$ ....(1)

Yazılabilir. Bernoulli eşitliğini uygulayalım.

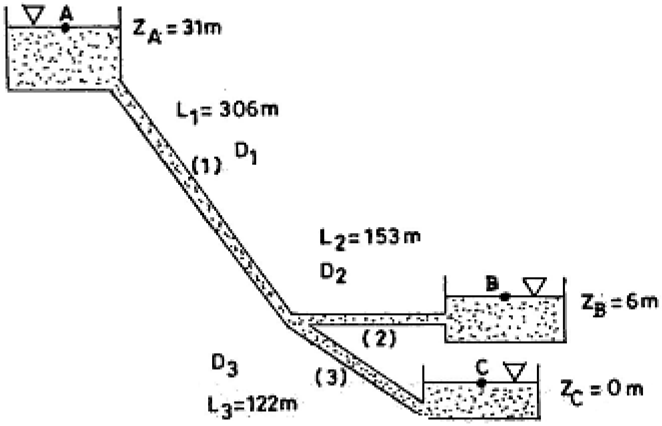
$$z_A = z_B + f_1.\frac{L_1}{D_1}.\frac{V_1^2}{2.g} + f_2.\frac{L_2}{D_2}.\frac{V_2^2}{2.g}$$

$$z_A = z_C + f_1.\frac{L_1}{D_1}.\frac{V_1^2}{2.g} + f_3.\frac{L_3}{D_3}.\frac{V_3^2}{2.g}$$

$z_A = 31$ m

$f_1 = f_2 = f_3 = 0,02$

$D_1 = D_2 = D_3 = 304,8$ mm



L_1= 306 m L_2= 153 L_3= 122 m
Z_B= 6 m
z_C= 0

$$31 = 6 + 0{,}02.\frac{306}{0{,}3048}.\frac{V_1^2}{2.9{,}81} + 0{,}02.\frac{153}{0{,}3048}.\frac{V_2^2}{2.9{,}81}$$

$24{,}43 = V_1^2 + 0{,}5V_2^2$ ....(2)

$$31 = 0 + 0{,}02.\frac{306}{0{,}3048}.\frac{V_1^2}{2.9{,}81} + 0{,}02\frac{122}{0{,}3048}.\frac{V_3^2}{2.9{,}81}$$

$30{,}3 = V_1^2 + 0{,}4V_3^2$ ....(3)

(1), (2) ve (3) eşitlikleri aşağıdaki gibi çözelim.

(2) ve (3) eşitlik birlikte çözülürse;

$5{,}87 = -0{,}5.V_2^2 + 0{,}4.V_3^2$

$$V_3 = \left(\frac{5{,}87 + 0{,}5V_2^2}{0{,}4}\right)^{1/2}$$

bulunur. (2) eşitlik tekrar düzenlenirse;

$24{,}43 = V_1^2 + 0{,}5.V_2^2$

$24{,}43 = (V_2+V_3)^2 + 0{,}5V_2^2$

$$24{,}43 = \left[V_2 + \left(\frac{5{,}87 + 0{,}5.V_2^2}{0{,}4} \right)^{1/2} \right]^2 + 0{,}5.V_2^2$$

Bu formülün çözümünde V_2= 0,94 m/s elde edilir.

$$V_1 = (24{,}43 - 0{,}5.V_2^2)^{1/2}$$

$$V_1 = (24{,}43 - 0{,}5.(0{,}94)^2)^{1/2}$$

V_1= 4,898 m/s

$$Q_1 = \frac{\pi.D_1^2}{4}.V_1 = \frac{\pi.(0{,}3048m)^2}{4}.(4{,}898m/s) = 0{,}357m^3/s$$

A deposundan gelen toplam verdi 0,357 m^3/s'dir.

$$Q_2 = \frac{\pi.D_2^2}{4}.V_2 = \frac{\pi.(0{,}3048m)^2}{4}.(0{,}94m/s) = 0{,}0686m^3/s$$

B deposuna gelen sıvı verdisi 0,0686 m^3/s
C deposuna gelen sıvı ise (Q_3);

$$Q_3 = Q_1 - Q_2 = 0{,}357 - 0{,}0686 = 0{,}2884\,m^3/s$$

<u>ÖRNEK-5.11:</u> Aşağıdaki şekildeki sistemde şekil kayıpları ihmal edilecektir. İlgili değerler şekil üzerinde verilmiştir.

a) D_1 ve D_2 çaplarını,
b) Verdiyi,
c) Paralel borulardaki ve düz borulardaki yük kayıplarını bulunuz.

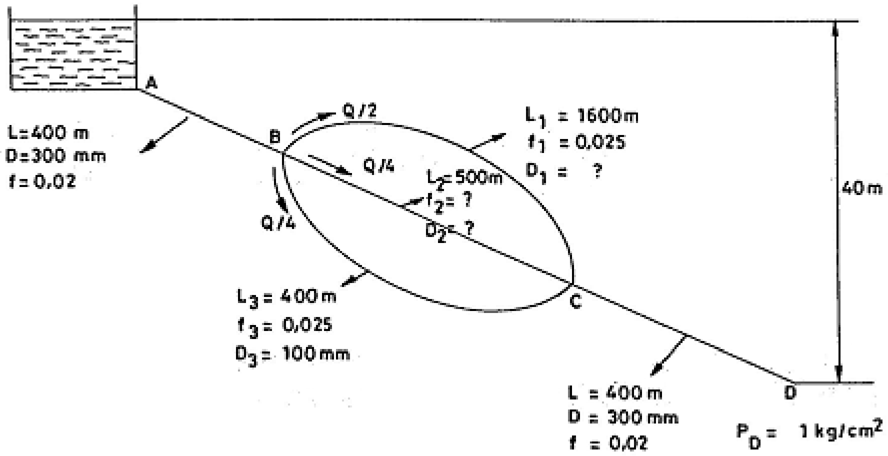
Çözüm:

a) Paralel borularda yük kayıpları birbirine ve verdi üç borudaki toplam verdiye eşittir.

$$h_{L_1} = h_{L_2} = h_{L_3}$$

Q= Q_1+Q_2+Q_3

$$f_1.\frac{L_1}{D_1}.\frac{V_1^2}{2.g} = f_2.\frac{L_2}{D_2}.\frac{V_2^2}{2.g} = f_3.\frac{L_3}{D_3}.\frac{V_3^2}{2.g}$$



$$f_1.\frac{L_1}{D_1}.V_1^2 = f_2.\frac{L_2}{D_2}.V_2^2 = f_3.\frac{L_3}{D_3}.V_3^2$$

$$V_1 = \frac{4.Q_1}{\pi.D_1^2} = \frac{4.Q}{2.\pi.D_1^2} = \frac{2.Q}{\pi.D_1^2}$$

$$V_2 = \frac{4.Q_2}{\pi.D_2^2} = \frac{4.Q}{.\pi.D_2^2.4} = \frac{Q}{\pi.D_2^2}$$

$$V_3 = \frac{4.Q_3}{\pi.D_3^2} = \frac{4.Q}{\pi.D_3^2.4} = \frac{Q}{\pi.D_3^2}$$

$$f_1.\frac{L_1}{D_1}.\frac{4.Q^2}{\pi^2.D_1^4} = f_2.\frac{L_2}{D_2}.\frac{Q^2}{\pi^2.D_2^4} = f_3.\frac{L_3}{D_3}.\frac{Q^2}{\pi^2.D_3^4}$$

$$4f_1.\frac{L_1}{D_1^5} = f_2.\frac{L_2}{D_2^5} = f_3.\frac{L_3}{D_3^5}$$

$$f_3.\frac{L_3}{D_3^5} = 0{,}025.\frac{(400\,m)}{(0{,}1m)^5} = 1.10^6 m^{-4}$$

$$4f_1.\frac{L_1}{D_1^5} = 1.10^6$$

$$D_1 = \left(\frac{4.f_1.L_1}{1.10^6}\right)^{1/5} = \left(\frac{4.0{,}025.1600\,m}{1.10^6\ m^{-4}}\right)$$

$$D_1 = 0{,}17411\,m$$

$$D_2 = \left(\frac{f_2.L_2}{1.10^6\ m^{-4}}\right)^{1/5} = \left(\frac{0{,}02.500m}{1.10^6\ m^{-4}}\right)$$

$$D_2 = 0{,}1\ m$$

b) A ve D arasına Bernoulli eşitliğini uygulayalım.

$$z_A + \frac{P}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2.g} = z_D + \frac{P_D}{\gamma} + \frac{V_D^2}{2.g} + h_L$$

$$40\,m + 0 + 0 = 0 + \frac{P_D}{\gamma} + 0 + h_L$$

$$h_L = 40\,m - \frac{P_D}{\gamma} = 40\,m - \frac{9{,}81.10^4}{9810 N/m^3} N/m^2$$

h_L= 40 m-10 m

h_L= 30 m

$$h_L = h_{L_{AB}} + h_{L_{BC}} + h_{L_{CD}}$$

$$h_L = f_{AB}.\frac{L_{AB}}{D_{AB}}.\frac{V_{AB}^2}{2g} + f_3.\frac{L_3}{D_3}.\frac{V_3^2}{2g} + f_{CD}.\frac{L_{CD}}{D_{CD}}.\frac{(V_{CD})^2}{2g}$$

$$V_{AB} = \frac{4.Q}{\pi.(D_{AB})^2}\ , \quad V_3 = \frac{Q}{\pi.D_3^2}\ , \quad V_{CD} = \frac{4.Q}{\pi(D_{CD})^2}$$

$$h_L = 0{,}02.\frac{(400m)}{(0{,}3m)}.\frac{16.Q^2}{\pi^2.(0{,}3m)^4.2g} + 0{,}025.\frac{(400m)}{(0{,}1m)}.\frac{Q^2}{2g.\pi^2.(0{,}1)^4} + 0{,}02.\frac{(400m)}{(0{,}3m).2g}.\frac{16.Q^2}{\pi^2.(0{,}3)^4}$$

10 m= $272.Q^2+5164.Q^2+272.Q^2$

10 m= $5708.Q^2$

Q= 0,04186 m^3/s

c) Paralel borulardaki yük kayıpları birbirine eşit olduğundan bir borudaki yük kaybını bulursak yeterli olacaktır.

$$h_{L_3} = f_3.\frac{L_3}{D_3^5}.\frac{Q^2}{2.g.\pi^2} = \frac{0{,}025.(400m).(0{,}04186\,m^3/s)^2}{(0{,}1m)^5.2.g.\pi^2} = 9{,}05\,m$$

$h_{L_3} = 9{,}05\,m$ ya da $h_{L_3} = 5164.Q^2$

$$h_{LAB} = f_{AB}.\frac{L_{AB}}{D_{AB}^5}.\frac{16.Q^2}{2g.\pi^2} = \frac{(0{,}02)(400m).16(0{,}04186m^3/s)}{(0{,}3m)^5.2.g.\pi^2}$$

$h_{LAB} = 0{,}4766\,m$ ya da $h_{LAB} = 272.Q^2 = 0{,}4766\,m$

h_{LCD} : 0,4766 m'dir. Çünkü AB boru hattıyla aynı özelliklere sahiptir.

ÖRNEK-5.12: Çapı 30 cm olan yeni dökme demir boruda 0,3 m^3/s verdiyle su iletilmektedir. Suyun kinematik viskozitesi $1{,}31.10^{-6}$ cm^2/s olduğuna göre birim yük kaybını (hidrolik eğimi);

a) Moody eğrilerini,
b) Chezy formülünü,
c) Manning formülünü,
d) Williams Hazen eşitliğini,
e) Blair formülünü kullanarak bulunuz.
f) 1000 m'deki yük kayıpları her formülde ne olur.

Çözüm:

a) Ortalama hız $V = \frac{4.Q}{\pi.D^2}$

$$V = \frac{4.(0{,}3m^3/s)}{\pi.(0{,}3m)^2} = 4{,}244\,m/s$$

$$Re = \frac{V.D}{\vartheta} = \frac{(4{,}244\,m/s).(0{,}30\,m)}{1{,}31.10^{-6}\,m^2/s} = 971908$$

$k = 0{,}26\,mm$

$$\frac{k}{D} = \frac{0{,}26\,mm}{300\,mm} = 0{,}00087$$

Re ve $\frac{k}{D}$ için Moody diyagramından

f= 0,0198

$$İ = \frac{h_L}{L} = \frac{f}{D}.\frac{V^2}{2.g} = \frac{0{,}0198.(4{,}244\,m/s)^2}{(0{,}30\,m).(2.9{,}81\,m/s^2)}$$

İ= 0,0606

b) Chezy formülü

$$İ = \frac{h_L}{L} = \frac{V^2}{C^2.R}$$

Yeni döküm boruda $C = \frac{100.\sqrt{R}}{0,25 + \sqrt{R}} = 52,28$

$$R = \frac{D}{4} = \frac{0,30m}{4} = 0,075m$$

$$İ = \frac{(4,244 m/s)^2}{(52,28)^2.(0,075m)} = 0,08786$$

c) Manning formülü

$$h_L^{1/2} = \frac{V.L^{0,5}}{n.R^{2/3}}$$

$$İ = \frac{h_L}{L} = \left(\frac{V}{n.R^{2/3}}\right)^2$$

n= 94 (yeni döküm boru)

$$İ = \left[\frac{4,244m/s}{94.(0,075m)^{2/3}}\right]^2$$

İ= 0,06444

d) Williams-Hazen formülü

$$İ = \frac{h_L}{L} = \left[\frac{V}{0,85.W.R^{0,63}}\right]^{\frac{1}{0,54}}$$

$$İ = \left[\frac{4,244m/s}{0,85.130.(0,075m)^{0,63}}\right]^{\frac{1}{0,54}}$$

İ= 0,04908

e) Blair formülünü kullanırken önce borunun (dökme demir) hangi sınıfa gireceğini belirleyeceğiz. Yeni dökme demir boru IV sınıf boru grubuna girmekte ve aşağıdaki formül kullanılabilmektedir.

$$\dot{I} = \frac{h_L}{L} = \left[\frac{V}{107{,}3.R^{0,63}}\right]^{\frac{1}{0,52}}$$

$$\dot{I} = \left[\frac{4{,}244\,m/s}{107{,}3.(0{,}075\,m)^{0,67}}\right]^{\frac{1}{0,52}}$$

İ= 0,05645

f) L= 1000 m alınırsa yük kayıpları.

Moody eğrilerine göre h_L= 0,0606.1000 m= 60,6 m

Chezy formülüne göre h_L= 0,08786.1000 m= 87,86 m

Manning formülüne göre h_L= 0,06444.1000 m= 64,44 m

Williams-Hazen formülüne göre h_L= 0,04908.1000 m= 49,08 m

Blair formülüne göre h_L= 0,05645.1000 m= 56,45 m bulunur.

ÖRNEK-5.13: Özgül kütlesi 789 kg/m^3 ve viskozitesi 1,19.10^{-3} Pa.s olan etil alkol bir rafineride 60 mm'lik boruda akmaktadır. Verdiyi ölçmek için kullanılan lüle tip akış ölçerdeki basınç düşümü 4 kPa olarak ölçülmüştür. Etil alkolün bu basınçtaki verdisi 0,003 m^3/s olduğuna göre akış ölçerin çapını bulunuz.

Çözüm:

$$Re = \frac{\rho.V.D}{\mu} = \frac{4\rho Q}{\pi D\mu} = \frac{4.(789\,kg/m^3)(0{,}003\,m^3/s)}{\pi.(0{,}06\,m)(1{,}19.10^{-3}\,Pa.s)}$$

Re= 42 200

$$Q = C_n.A_n.\left(\frac{2.(P_1 - P_2}{\rho.(1-\beta^4)}\right)^{1/2}$$

$$0{,}003\frac{m^3}{s} = C_n.\frac{\pi}{4}d^2.\left(\frac{2.(4000Pa)}{789\frac{kg}{m^3}.(1-\beta^4)}\right)^{1/2}$$

$$1{,}20.10^{-3} = \frac{C_n.d^2}{(1-\beta^4)^{0,5}} \quad \text{...(1)}$$

Bu formülde lüle çapının (d) birimi metredir.

$$\beta = \frac{d}{D} = \frac{d}{(0{,}06\,m)}$$

Yukarıdaki bulduğumuz (1) formülü ile Re sayısına bağlı olarak (C_n) lüle verdi katsayısını veren şekilde deneme yanılma (iterasyon) yöntemini kullanmamız gerekir. Öncelikle akışın ideal olduğunu ve C_n= 1 alındığını kabul edelim. Buna göre birinci eşitlikten lüle çapı aşağıdaki gibi bulunur.

$$d = (1.20.10^{-3}.(1-\beta^4)^{0{,}5})^{1/2} \quad \text{..(2)}$$

Ayrıca genellikle 1-$\beta^4 \cong 1$ alınabilir. Bu nedenle (d) için bir yaklaşık değer 2. eşitlikten bulunabilir.

$$d = (1{,}20.10^{-3})^{1/2} = 0{,}0346\,m$$

Buradan başlangıç tahmininin d= 0,0346 m ve

$$\beta = \frac{d}{D} = \frac{0{,}0346}{0{,}06} = 0{,}577 \quad \text{bulunur.}$$

Şekilden Re= 42200 için C_n= 0,972 elde ederiz. Bu değer kabul ettiğimiz C_n= 1 değerine eşit değildir. Buna göre eşitlik (1) ve şekilden bir sonuç elde edemeyeceğiz demektir. Daha sonra;

Çaplar oranı β = 0,570 ve C_n= 0,972 alalım.

1. eşitlikten

$$d = \left(\frac{1{,}20.10^{-3}}{0{,}972}.\left(1-0{,}577^4\right)\right)^{1/2}$$

d= 0,0341 m

Bu yeni değerle $\beta = \dfrac{0{,}0341}{0{,}060} = 0{,}568$ ve Re= 42200 ile şekilden C_n= 0,972 bulunur ve bu da kabul ettiğimiz değerle uyumludur. Sonuç olarak lüle tip akış ölçerin çapı (d);

d= 34,1 mm

elde edilir.

<u>ÖRNEK-5.14:</u> Bir viskozimetrede üs kanunu modeline göre akan domates ketçapının koyuluk indeksi $K = 125\,\dfrac{dyn-s^n}{cm^2}$ ve akım davranış indeksi n=0,45 olarak veriliyor. Viskozimetre tüpünün çapı D=25,4 mm, uzunluğu 1 m, ketçapın debisi Q=0,0003 m³/s ve ketçabın özgül kütlesi $\rho = 1130\,\dfrac{kg}{m^3}$ ise basınç düşümünü bulunuz.

Çözüm:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0{,}0003}{\dfrac{\pi(25{,}4.10^{-3})^2}{4}} = 0{,}592\,\frac{m}{s}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{8(V^{2-n})(D/2)^n \rho}{K(\dfrac{3n+1}{n})^n}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{8(0{,}592^{2-0{,}45})(0{,}0254/2)^{0{,}45}1130}{12{,}5(\dfrac{3.0{,}45+1}{0{,}45})^{0{,}45}} = 21{,}38$$

Laminer akım olduğundan $f = \dfrac{64}{\mathrm{Re}}$ alınır.

$$\Delta P = f\,\frac{L\rho V^2}{2D} = \frac{64}{21{,}38}\,\frac{1.1130.\,0{,}592^2}{2.0{,}0254} = 23\,336\ Pa$$ bulunur.

<u>ÖRNEK-5.15:</u> Şeftali püresi çapı 25,4 mm olan çekme çelik borudan 0,0042 m³/s verdiyle akmaktadır. Pürenin kıvam indeksi $K = 72\,\dfrac{dyn-s^n}{cm^2}$, akım davranış indeksi n=0,35 ve yoğunluğu SG=1,07 dir. Uzunluğu 12 m olan boruda akan şeftali püresinin neden olduğu basınç kaybını bulunuz.

Çözüm:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0{,}0042}{\dfrac{\pi(25{,}4.10^{-3})^2}{4}} = 8{,}3\,\frac{m}{s}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{8(V^{2-n})(D/2)^n \rho}{K(\dfrac{3n+1}{n})^n}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{8(8{,}3^{2-0{,}35})(0{,}0254/2)^{0{,}35}1070}{7{,}2(\frac{3.0{,}35+1}{0{,}35})^{0{,}35}} = 4563 \text{ türbülans}$$

$$\varepsilon = \frac{D}{k} = \frac{25{,}4}{0{,}0015} = 16\,933$$

Re ve ε için Moody diyagramından f=0,038 bulunur ve basınç düşümü,

$$\Delta P = h_L.\gamma = f\,\frac{L\rho V^2}{2D} = 0{,}038\frac{12.\,1070.\,8{,}3^2}{2.0{,}0254} = 661\,669\ Pa \text{ bulunur.}$$