KÖKLÜ İFADELER

n, 1 den büyük bir sayma sayısı olmak üzere,

$x^n = a$ denklemini sağlayan x sayısına a nın n yinci dereceden **kökü** denir.

$x^n = a$ ise, $x = \sqrt[n]{a}$ dır.

KÖKLÜ İFADELERİN ÖZELİKLERİ

1) n tek ise, $\sqrt[n]{a}$ daima reeldir.

2) n çift ve a < 0 ise, $\sqrt[n]{a}$ reel sayı belirtmez.

3) a ≥ 0 ise, $\sqrt[n]{a}$ daima reeldir.

4) a ≥ 0 ise, $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ dir.

5) n tek ise, $\sqrt[n]{a^n} = a$ dır.

6) n çift ise, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ dır.

7) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

8) n çift ve b ile c aynı işaretli olmak üzere,

$\frac{b}{c} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{b^n \cdot a}{c^n}}$ dir.

9) n tek ise, $\frac{b}{c} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{b^n \cdot a}{c^n}}$ dir.

10) a, pozitif reel (gerçel) sayı olmak üzere,

$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$ dir.

11) k pozitif tam sayı ve a pozitif gerçel sayı olmak üzere;

i) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[k \cdot n]{a^{m \cdot k}}$

ii) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{k}]{a^{\frac{m}{k}}}$ dır. $\left(\frac{n}{k} \in \mathbb{Z}^+\right)$

12) $(a \neq 0$ ve $b \neq 0)$ ise $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$

1. Toplama - Çıkarma İşlemi

Kök dereceleri birbirine eşit ve kök içindeki sayılar da birbirine eşit olan ifadelerin kat sayıları toplanır ya da çıkarılır. Bulunan sonuç köklü ifadenin kat sayısı olur.

$$b \cdot \sqrt[n]{a} + c \cdot \sqrt[n]{a} - d \cdot \sqrt[n]{a} = (b + c - d) \cdot \sqrt[n]{a}$$

2. Çarpma İşlemi

n ve m, 1 den büyük tek sayı ya da a ve b negatif olmamak üzere,

1) $c \cdot \sqrt[n]{a} \cdot d \cdot \sqrt[n]{b} = c \cdot d \cdot \sqrt[n]{a \cdot b}$ dir.

2) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}}$ dir.

3) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n \cdot m]{a^m} \cdot \sqrt[m \cdot n]{b^n} = \sqrt[m \cdot n]{a^m \cdot b^n}$ dir.

3. Bölme İşlemi

Uygun koşullarda,

1) $\dfrac{c \cdot \sqrt[n]{a}}{d \cdot \sqrt[n]{b}} = \dfrac{c}{d} \cdot \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ dir.

2) $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \dfrac{a^{\frac{1}{m}}}{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}} = a^{\frac{n-m}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a^{n-m}}$ dir.

3) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \dfrac{\sqrt[n \cdot m]{a^m}}{\sqrt[m \cdot n]{b^n}} = \sqrt[m \cdot n]{\dfrac{a^m}{b^n}}$ dir.

İÇ İÇE KÖKLER

1) $\sqrt[m]{a \cdot \sqrt[n]{b \cdot \sqrt[k]{c}}} = \sqrt[m \cdot n \cdot k]{a^{n \cdot k} \cdot b^k \cdot c}$

2) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}} = \sqrt[m \cdot n \cdot k]{a}$

3) $\underbrace{\sqrt{a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt{a \ldots \sqrt{a}}}}}_{n \text{ tane } a} = \sqrt[2^n]{a^{2^n - 1}} = a^{\frac{2^n - 1}{2^n}}$

4) $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$

5) $0 < y < x$ olmak üzere,

$\sqrt{(x + y) \pm 2 \cdot \sqrt{x \cdot y}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ dir.

Örnek: 196 sayısının değerini bulalım.

$$\begin{array}{r|c} 196 & 2 \\ 98 & 2 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \quad \begin{array}{l} 196 = 2\,.\,2\,.\,7\,.\,7 \\ 196 = 2^2\,.\,7^2 \\ 196 = 14^2 \text{ olduğu için} \\ \sqrt{196} = 14\text{'tür.} \end{array}$$

Örnek:

$1 < x < 2$ olduğuna göre,

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2x - 3$ B) $2x + 1$ C) $-3x-x$

D) 1 E) 2

ÇÖZÜM

$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x - 1|$

$\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x - 2|$ dir. Ayrıca,

$x > 1$ ise $x - 1 > 0$ olup $|x - 1| = x - 1$ ve

$x < 2$ ise $x - 2 < 0$ olup $|x - 2| = -x + 2$ dir.

O hâlde,

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} &= |x - 1| + |x - 2| \\ &= x - 1 - x + 2 \\ &= 1 \text{ olur.} \end{aligned}$$