4. HAFTA

Sürekli Rasgele Vektörün Ortak Dağılım ve Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

$X_1, X_2, ..., X_p$ 'nin her biri sürekli rasgele değişkenler ise, $\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_p)$ rasgele vektörü sürekli ortak dağılıma sahiptir.

Tanım: $\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_p)$ bir rasgele vektör ve bu rasgele vektörün dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(\mathrm{x}) &= F_{X_1, X_2, ..., X_p}(x_1, x_2, ..., x_p) \\ &= F_{\underline{X}}(x_1, x_2, ..., x_p) \\ &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, ..., X_p \leq x_p) \end{aligned}$$

dır.

Tanım: $\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_p)$ ortak dağılım fonksiyonu

$$F_{\underline{X}}(x_1, x_2, ..., x_p) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, ..., X_p \leq x_p)$$

olan bir rasgele vektör olsun. F sürekli ve $\dfrac{\partial^p F}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_p}$ kısmi türevi var ise $\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_p)$ rasgele vektörü sürekli ortak dağılıma sahiptir.

Tanım: $\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_p)$ sürekli ortak dağılıma sahip bir rasgele vektör olsun. $\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_p)$ rasgele vektörünün ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_{\underline{X}}(\mathrm{x}) &= f_{X_1, X_2, ..., X_p}(x_1, x_2, ..., x_p) \\ &= f_{\underline{X}}(x_1, x_2, ..., x_p) \\ &= \frac{\partial^p F_{\underline{X}}(x_1, x_2, ..., x_p)}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_p} \end{aligned}$$

ile verilir.

Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu olasılıkları bulmada kullanılır. Tek değişkenli durumda

$A \subseteq \mathbb{R}$ için

$$P(X \in A) \int_A f_X(x) d_x$$

ve çok değişkenli durumda

$A \subseteq \mathbb{R}^p$ için

$$P(\underline{X} \in A) = \iint_{A} \cdots \int f_{\underline{X}}(x_1, x_2, ..., x_p) d_{x_p}, ..., d_{x_2}, d_{x_1}$$

dir.

Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonunun Özellikleri

i) Bütün $x_1, x_2, ..., x_p$ 'ler için $\int_A f_{\underline{X}}(x_1, x_2, ..., x_p) \geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{X}}(x_1, x_2, ..., x_p) d_{x_p, ..., d_{x_2}, d_{x_1}} = 1$

iii) $F_{\underline{X}}(x_1, x_2, ..., x_p) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_p} f_{\underline{X}}(y_1, y_2, ..., y_p) d_{y_p, ..., d_{y_2}, d_{y_1}}$

iv) $A \subseteq \mathbb{R}^p$ olan herhangi bir A bölgesi için

$$P(\underline{X} \in A) = \int_A f_{\underline{X}}(x_1, x_2, ..., x_p) d_{x_p}, ..., d_{x_2}, d_{x_1}$$

dir. i) inci ve ii) inci özellikler $f_{\underline{X}}(x_1, x_2, ..., x_p)$ 'in ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu olması için gerekli şartlardır.

Örnek: $\underline{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \subseteq \mathbb{R}^2$ olmak üzere $\underline{X}$ 'in ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{\underline{X}}(\text{x}) = f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1 \ ; \ 0 \leq x \leq 1, \ \ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \ ; \ \textit{diğer yerlerde} \end{cases}$$

biçiminde olsun.

a) $f_{X,Y}(x, y)$ ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğunu gösteriniz.

b) $F_{X,Y}(x, y)$ ortak dağılım fonksiyonunu bulunuz.

c) $P(X + Y \leq 1)$ olasılığının değerini bulunuz.

Çözüm:

a) i)'nin tanımından $\forall_{x,y}$ için $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$ dır.

ii)'den $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) d_y d_x \stackrel{?}{=} 1$

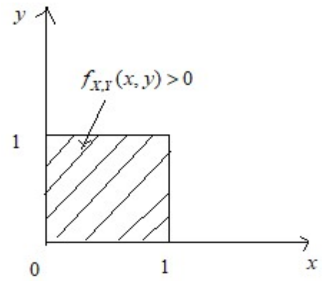
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)d_y d_x = \int_0^1\int_0^1 1\, d_y d_x$$

$$= \int_0^1 ([y]_0^1)\, d_x$$

$$= \int_0^1 1\, d_x$$

$$= ([x]_0^1)$$

$$= 1$$



dir ve $f_{X,Y}(x,y)$ ortak olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

b)

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)d_v d_u$$

$$= \int_0^x\int_0^y 1\, d_v d_u$$

$$= \int_0^x ([v]_0^y)\, d_u$$

$$= \int_0^x y\, d_u$$

$$= y\int_0^x 1\, d_u$$

$$= y([u]_0^x)$$

$$= xy$$

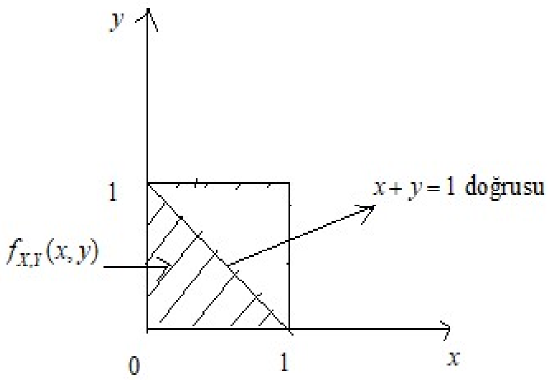
dır ve buradan

$$F_{X,Y}(x,y) = xy \quad ; \quad 0 \le \mathrm{x} \le 1, \quad 0 \le y \le 1$$

olarak elde edilir.

c) $P(X+Y \leq 1)$ olasılığını bulmak için doğru bölge üzerinde ortak olasılık yoğunluk fonksiyonun çift katlı integraline ihtiyaç vardır. Bölge öyle belirlenecek ki hem $f_{X,Y}(x,y) > 0$ ve $x+y<1$ olsun.

$x+y=1 \Rightarrow y=1-x$



$$P(X+Y \leq 1) = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x} f_{X,Y}(x,y) d_y d_x$$

$$= \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-x} 1 \; d_y d_x$$

$$= \int_{0}^{1} ([y]_0^{1-x}) \; d_x$$

$$= \int_{0}^{1} (1\text{-}x) \; d_x$$

$$= (\left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1)$$

$$= (1 - \frac{1}{2}) - 0$$

$$= \frac{1}{2}$$

olarak bulunur.

Örnek : $\underline{X}' = (X, Y)$ rasgele vektörü

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y} & ; \; x,y \geq 0 \\ 0 & ; \; \textit{diğer yerlerde} \end{cases}$$

ortak olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olsun.

a) $F_{X,Y}(x,y)$ dağılım fonksiyonunu elde ediniz.

b) $P(X \leq Y)$ olasılığının değerini bulunuz.

Çözüm:

a)

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v) d_v d_u$$

$$= \int_{0}^{x}\int_{0}^{y} e^{-u}e^{-v}\ d_v d_u$$

$$= \int_{0}^{x} e^{-u}(\int_{0}^{y} e^{-v}\ d_v)\ d_u$$

$$= \int_{0}^{x} (e^{-u}\left[-e^{-v}\right]_0^y\ )d_u$$

$$= \int_{0}^{x} e^{-u}(-(e^{-y}-e^{0}))d_u$$

$$= \int_{0}^{x} e^{-u}(1-e^{-y})d_u$$

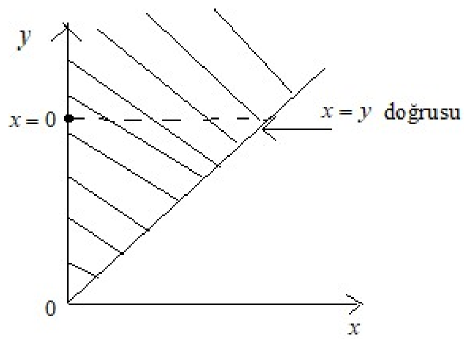
$$= (1-e^{-y})\int_{0}^{x} e^{-u}\ d_u$$

$$= (1-e^{-y})\left[-e^{-u}\right]_0^x$$

$$= (1-e^{-y})(1-e^{-x})\ \ ;\ \ x,y \geq 0$$

olarak bulunur.

b) $P(X \leq Y)$ olasılığı için $x = y$ sınır doğrusuna bakalım.



$y;\ (0,\infty)$ aralığında ve sabit y için $x;\ (0,y)$ aralığında değer alır.

$$P(X \le Y) = \int_{y=0}^{\infty} \int_{x=0}^{y} f_{X,Y}(x, y) d_x d_y$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{y} e^{-x-y} \; d_x d_y$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-y} (\int_0^{y} e^{-x} \; d_x) \; d_y$$

$$= \int_0^{\infty} (e^{-y} \left[-e^{-x} \right]_{x=0}^{y} \;) d_y$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-y} (-(e^{-y} - e^0)) d_y$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-y} (1 - e^{-y}) d_y$$

$$= \int_0^{\infty} (e^{-y} - e^{-2y}) d_y$$

$$= \left[-e^{-y} + \frac{1}{2} e^{-2y} \right]_0^{\infty} = -(e^{-\infty} - e^0) + \frac{1}{2}(e^{-2\infty} - e^0) = e^0 - \frac{1}{2} e^{-2y} = \frac{1}{2}$$

bulunur.

Sürekli Rasgele Değişkenlerin Marjinal ve Koşullu Yoğunluk Fonksiyonları

Kesikli rasgele değişkenler için verilen sonuçlar, sürekli rasgele değişkenler için de geçerlidir. Basitlik için $\underline{X}' = (X, Y)$ olan iki değişkenli sürekli bir rasgele vektör göz önüne alınsın.

Tanım: $\underline{X}' = (X, Y)$ ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{X,Y}(x, y)$ olan ortak dağılıma sahip sürekli bir rasgele vektör ise, X rasgele değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) d_y$$

ve benzer biçimde Y rasgele değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) d_x$$

dir.

Tanım: $\underline{X}' = (X, Y)$ ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{X,Y}(x, y)$ olan ortak dağılıma sahip sürekli bir rasgele vektör ise, Y rasgele değişkenin değeri verildiğinde X rasgele değişkeninin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X/Y}(x/y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)},\ f_Y(y)>0$$

olarak elde edilir.

Dağılım fonksiyonu ile çalışmak, yoğunluk fonksiyonu ile çalışmaktan daha kolaydır. X rasgele değişkeninin $F_X(x)$ dağılım fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}F_X(x)&=P(X\le x)\\&=P(X\le x\ ,\ -\infty<y<\infty)\\&=F_{X,Y}(x,\infty)\\&=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(u,y)d_y d_u\\&=\int_{-\infty}^{x}g(u)d_u\end{aligned}$$

dır. Böylece X rasgele değişkeni

$$\begin{aligned}f_X(x)&=F'_X(x)\\&=g(x)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)d_y\end{aligned}$$

marjinal yoğunluk fonksiyonuna sahiptir. Benzer biçimde Y rasgele değişkeni

$$\begin{aligned}f_Y(y)&=F'_Y(y)\\&=g(y)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)d_x\end{aligned}$$

marjinal yoğunluk fonksiyonuna sahiptir.

$f_{X/Y}(x/y)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunu tam olarak anlamını anlamak biraz zordur. Koşullu olasılıklar $P(Y=y)=0$ olduğundan, $P(X\le x/Y=y)$ ’den bulunamaz. Yani $Y=y$ üzerine koşul konulamaz. Bunun yerine limit argümanlarına başvurulur. Limit durumunda koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$F_{X/Y}(x/y) = \lim_{h\to 0} P(X \le x / y-h \le Y \le y+h)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{ \frac{\int_{-\infty}^{x}\int_{y-h}^{y+h} f_{X,Y}(u,v)d_v d_u}{\int_{y-h}^{y+h} f_Y(v)d_v} \right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{ \frac{\int_{-\infty}^{x} 2hf_{X,Y}(u,y)d_u}{2hf_Y(y)} \right\}$$

dir. Burada $h \to 0$ için $\int_{y-h}^{y+h} f_{X,Y}(u,v)d_v \to 2hf_{X,Y}(u,y)$ ve $\int_{y-h}^{y+h} f_Y(v)d_v \to 2hf_Y(y)$ dir.

Böylece,

$$F_{X/Y}(x/y) = \frac{\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u,y)d_u}{f_Y(y)}$$

elde edilir. Bu fonksiyonun türevi alınarak, koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{d}{dx}(F_{X/Y}(x/y))$$
$$= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)},\ f_Y(y) > 0$$

biçiminde bulunur.

Örnek : $\underline{X}' = (X,Y)$ rasgele vektörü ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y} & ;\ 0 \le x \le y \\ 0 & ;\ diğer\ yerlerde \end{cases}$$

biçiminde olsun.

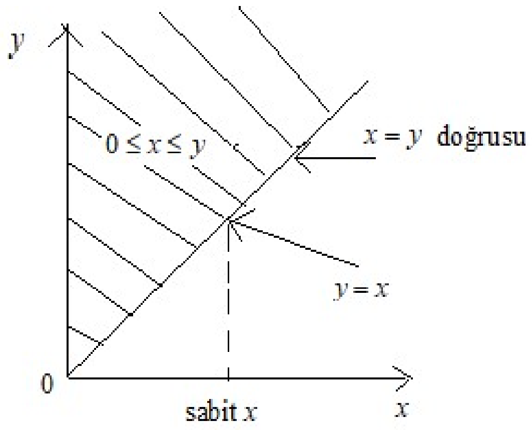
a) X rasgele değişkenin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_X(x)$ 'i bulunuz.

b) Y rasgele değişkenin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_Y(y)$ 'i bulunuz.

c) $f_{X/Y}(x/y)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

a) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)d_y$



x'in sabit bir değeri için $x = y$ dir ve $x = 0$ için y sabit bir değer alır.

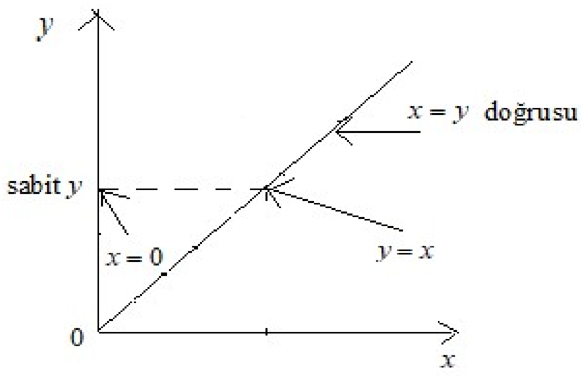
$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)d_y \\
&= \int_{x}^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda y} d_y \\
&= (-\frac{\lambda^2}{\lambda} e^{-\lambda y}\Big|_x^{\infty}) \\
&= \lambda e^{-\lambda y}
\end{aligned}
$$

dır ve

$$
f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & ;\ x \geq 0 \\ 0 & ;\ diğer\ yerlerde \end{cases}
$$

Bu da λ parametreli üsteldir ve $X \sim Exp(\lambda)$ dağılır.

b) $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)d_x$



$f_{X,Y}(x,y)=0$, $x>y$ dır. Buradan

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^y f_{X,Y}(x,y)d_x \\ &= \int_o^y \lambda^2 e^{-\lambda y} d_x \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda y}(x\big|_0^y) \\ &= \lambda^2 y e^{-\lambda y} \end{aligned}$$

dır ve

$$f_Y(y)=\begin{cases} \lambda^2 y e^{-\lambda y} & ;\ y\geq 0 \\ 0 & ;\ \textit{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olmak üzere $Y \sim Gamma(\alpha=2,\lambda)$ dağılır.

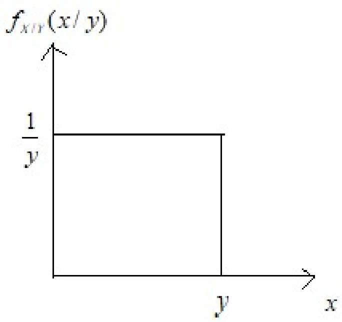
c)

$$\begin{aligned} f_{X/Y}(x/y) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \\ &= \frac{\lambda^2 e^{-\lambda y}}{\lambda^2 y e^{-\lambda y}} \\ &= \frac{1}{y} \end{aligned}$$

dır ve

$$f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{y} & ;\ 0\leq x\leq y \\ 0 & ;\ \textit{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olmak üzere $(X/Y) \sim U(0,Y)$ dağılır.



Örnek : $\underline{X}' = (X, Y)$ rasgele vektörü ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & ; \;\; 0 \le x \le 1, \;\; 0 \le x \le 1, \;\; x+y \le 1 \\ 4x-2y & ; \;\; 0 \le x \le 1, \;\; 0 \le x \le 1, \;\; x+y > 1 \\ 0 & ; \;\; \textit{diğer yerlerde} \end{cases}$$

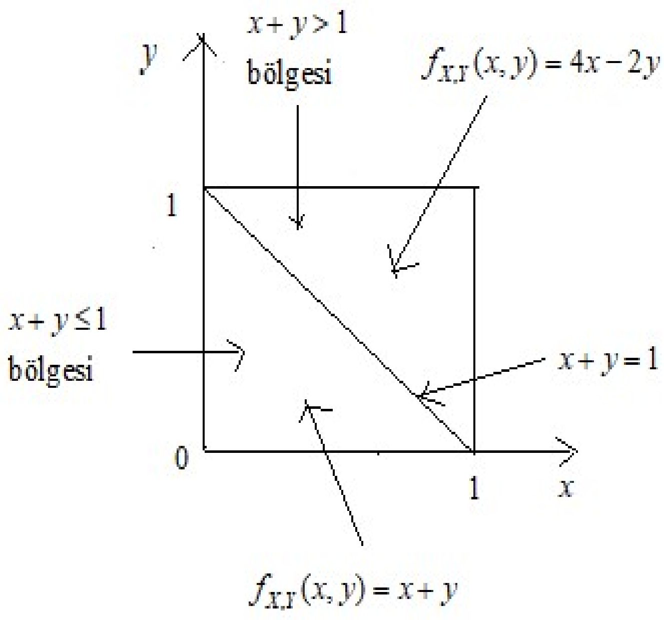
biçiminde olsun.

a) X rasgele değişkenin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_X(x)$ 'i bulunuz.

b) Y rasgele değişkenin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_Y(y)$ 'i bulunuz.

c) $f_{X/Y}(x/y)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:



a) $f_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)d_y$

burada

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}0 & ;\ y<0\\ 0 & ;\ y>1\\ x+y & ;\ 0\le y\le 1-x\\ 4x-2y & ;\ 1-x\le y\le 1\\ 0 & ;\ \textit{diğer yerlerde}\end{cases}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int\limits_{0}^{1-x}(x+y)d_y+\int\limits_{1-x}^{1}(4x-2y)d_y\\ &= (xy+\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x})+(4xy-y^2\Big|_{1-x}^{1})\\ &= x(1-x)+\frac{(1-x)^2}{2}+(4x-1)-(4x-x)-(1-x)^2\\ &= \frac{9}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

dir ve

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{9}{2}x^2-2x+\frac{1}{2} & ;\ 0\le x\le 1\\ 0 & ;\ \textit{diğer yerlerde}\end{cases}$$

olarak elde edilir.

b) Benzer şekilde Y rasgele değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+8y-9y^2) & ;\ 0\le y\le 1\\ 0 & ;\ \textit{diğer yerlerde}\end{cases}$$

dir.

c)

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \qquad ; \ x, y \in [0,1]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x+y}{\frac{1}{2}(1+8y-9y^2)} & ; \ x+y \leq 1 \\ \dfrac{4x-2y}{\frac{1}{2}(1+8y-9y^2)} & ; \ x+y > 1 \end{cases}$$

dir.

Sürekli Rasgele Değişkenlerin Bağımsızlığı

Tanım: $\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_p)$ p-boyutlu bir rasgele vektör olsun. $\underline{X}$ rasgele vektörünün elamanları olan $X_1, X_2, ..., X_p$ rasgele değişkenlerinin (stokastik) bağımsız olması için tüm $x_1, x_2, ..., x_p$ ’ler için gerek ve yeter şart;

a) $F_{X_1, X_2, ..., X_p}(x_1, x_2, ..., x_p) = \prod_{i=1}^{p} F_{X_i}(x_i)$

veya

b) $f_{X_1, X_2, ..., X_p}(x_1, x_2, ..., x_p) = \prod_{i=1}^{p} f_{X_i}(x_i)$

olmasıdır.

Özel olarak $\underline{X}' = (X, Y)$ ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{X,Y}(x, y)$ ve marjinal olasılık fonksiyonları $f_X(x)$ ve $f_Y(y)$ olan sürekli bir rasgele vektör olsun. X ve Y rasgele değişkenlerinin (istatistiksel) bağımsız olması için gerek ve yeter şart tüm x ve y’ler için

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

olmasıdır.

Torem: X ve Y rasgele değişkenlerinin (istatistiksel) bağımsız olması için gerek ve yeter şart tüm x ve y’ler için

$$F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

olmalıdır.

İspat: İlk olarak

$$F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

olsun. Buradan,

$$\begin{aligned}
f_{X,Y}(x,y)&=\frac{\partial^2}{\partial_x\partial_y}(F_{X,Y}(x,y))\\
&=\frac{\partial^2}{\partial_x\partial_y}(F_X(x)F_Y(y))\\
&=(\frac{\partial F_X(x)}{\partial_x})(\frac{\partial F_Y(y)}{\partial_y})\\
&=f_X(x)f_Y(y)
\end{aligned}$$

dır. Böylece, tanımdan *X* ve *Y* sürekli rasgele değişkenleri (istatistiksel) bağımsızdır.

Diğer taraftan, *X* ve *Y* rasgele değişkenleri (istatistiksel) bağımsız olsun. Buradan,

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned}
F_{X,Y}(x,y)&=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f_{X,Y}(u,v)d_u d_v\\
&=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f_X(u)f_Y(v)d_u d_v\\
&=\left[\int_{-\infty}^{x}f_X(u)d_u\right]\left[\int_{-\infty}^{y}f_Y(v)d_v\right]\\
&=F_X(x)F_Y(y)
\end{aligned}$$

dir.

Ortak Sürekli Rasgele Değişkenlerin Beklenen Değeri

$\underline{X}'=(X_1,X_2,...,X_p)$ ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{X_1,X_2,...,X_p}(x_1,x_2,...,x_p)$ olan sürekli bir rasgele vektör ve $g:\mathbb{R}^p\rightarrow\mathbb{R}$ 'ye bir fonksiyon olsun. Buradan,

$$E(g(X_1,X_2,...,X_p)) = \int_{x_1=-\infty}^{\infty}\int_{x_2=-\infty}^{\infty}\cdots\int_{x_p=-\infty}^{\infty} g(x_1,x_2,...,x_p) f_{X_1,X_2,...,X_p}(x_1,x_2,...,x_p) d_{x_p}...d_{x_2}d_{x_1}$$

dir. Özel olarak $\underline{X}' = (X,Y)$ rasgele vektörü için

$$E(g(X,Y)) = \int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty} g(x_1,x_2) f_{X,Y}(x,y) d_y d_x d_{x_1}$$

dir.

Sürekli Rasgele Değişkenler için Beklenen Değerin Özellikleri:

Sürekli rasgele değişkenler için var olması halinde beklenen değerin özellikleri, kesikli rasgele değişkenler ile aynıdır. Bu nedenle aşağıdaki ifadelerin ispatları kesikli durum için yapılanlarla aynıdır. Burada $\sum_x$ yerine, $\int_{-\infty}^{\infty}$ integrali gelmektedir.

i) $\underline{X}' = (X_1,X_2,...,X_p)$ p-boyutlu sürekli bir rasgele vektör ve a , b sabitleri ve g , h fonksiyonları ($g:\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $h:\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$) için

$$E(a\, g(\underline{X}) + b\, h(\underline{X})) = aE(g(\underline{X})) + bE(h(\underline{X}))$$

dir.

ii) X ve Y sürekli rasgele değişkenleri için

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

dir. Bu sonuçtan $X_1,X_2,...,X_p$ sürekli rasgele değişkenleri için

$$E(X_1 + X_2 + ... + X_p) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_p)$$

dir. Burada $X_1,X_2,...,X_p$ ’lerin bağımsız olması gerekmez.

iii) X ve Y bağımsız sürekli rasgele değişkenler ve g, h ($g,h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) fonksiyonlar ise

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

ve

$$E(g(X)\, h(Y)) = E(g(X))\, E(h(Y))$$

dir.

Sürekli Rasgele Değişkenler için Kovaryans ve Korelasyon

X ve Y sürekli rasgele değişkenleri için

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E[(X-E(X))(Y-E(Y))] \\ &= E(XY)-E(X)E(Y) \\ &= E(XY)-\mu_X\mu_Y \end{aligned}$$

dir. Burada,

$$E(XY)=\int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty} xy\, f_{X,Y}(x,y)d_y d_x$$

dir ve

$$Corr(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

dir.

Koşullu Beklenen Değer

X ve Y sürekli rasgele değişkenleri için $Y=y$ verildiğinde, X rasgele değişkenin koşullu beklenen değeri

$$E(X/Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X/Y}(x/y)d_x$$

dir. Benzer biçimde

$$E(g(X)/Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X/Y}(x/y)d_x$$

dir.

$E(g(X)/Y=y)$, y'nin bir fonksiyonu (y'ye bağlı bir sayı) olmasına rağmen, $E(g(X)/Y)$ bir rasgele değişkendir ve rasgelelik Y'den gelmektedir.

Teorem: Aşağıdaki beklenen değerler sonlu ise X ve Y sürekli rasgele değişkenleri için

i) $E(X)=E_Y[E(X/Y)]$

ii) g'nin her fonksiyonu için

$$E(g(X)) = E_Y[E(g(X)/Y)]$$

iii) $Var(X) = E_Y[Var(X/Y)] + Var_Y[E(X/Y)]$

İspat: Kesikli rasgele değişkenler için verilen ispatla aynıdır. Bu nedenle ispatlar tekrar verilmeyecek. Burada $\sum_x$ yerine, $\int_{-\infty}^{\infty}$ integrali gelmektedir.