Diferensiyel Geometri I

1.Bölüm

Tanım (Afin Uzay): $A \neq \phi$ bir cümle, V ise K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f \quad : \quad A \times A \quad \longrightarrow \quad V$$

fonksiyonu varsa A, V ile birleştirilmiş bir afin uzaydır.
$A1)$ $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$
$A2)$ $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P,Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ vardır.

Örnek: $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$ cümlesini alalım. $\mathbb{R}^n$ cümlesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & (P, Q) & \rightarrow & f(P, Q) = Q - P \end{array}$$

fonksiyonu afin uzaydaki önermeleri doğrular. Dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ bir afin uzaydır.

Ödev: Her vektör uzayı bir afin uzaydır. Gösteriniz.

Öklid Uzayı: A bir reel afin uzay ve A ile birleşen vektör uzayı V olsun.
$X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcccl} \langle\rangle & : & V \times V & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (X, Y) & \rightarrow & \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{array}$$

öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımıyla A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece A afin uzayı Öklid uzayı adını alır.
$\mathbb{E}^n$ standart Öklid uzayıdır.

Tanım (Dik Çatı): $\mathbb{E}^n$ uzayında sıralı bir $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ nokta $n+1$ lisine $\mathbb{R}^n$ de karşılık gelen $\left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, ..., \overrightarrow{P_0P_n}\right\}$ vektör n lisi $\mathbb{R}^n$ de bir ortonormal baz ise $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ sistemine $\mathbb{E}^n$ nin bir dik çatısı veya öklid çatısı denir.

Örnek: $\mathbb{E}^n$ uzayında
$E_0 = (0, 0, ..., 0), E_1 = (1, 0, ..., 0), ..., E_n = (0, 0, ..., 1)$ noktaları bir dik çatı oluştururlar.

Tanım: $\mathbb{E}^n$ uzayında $\{E_0, E_1, ..., E_n\}$ çatısına standart öklid çatısı denir.

Tanım: $\mathbb{E}^n$ uzayında bir X noktasının standart öklid çatısına göre ifadesi $\overrightarrow{E_0X} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{E_0E}_i$ dir. $x : \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarına X noktasının öklid koordinat fonksiyonları ve $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ sistemine öklid koordinat sistemi denir.